

**3. kontrolna zadaća iz
Matematičke analize III.**

Zadatak 1 [15 bodova] *Provjerite čine li matrice L i U LU-dekompoziciju matrica A . Riješite sustav jednadžbi $Ux = b$.*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -2 \\ -6 & 0 & -4 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 0 & 12 & -8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Rješenje: $A = LU$, $x = (-1, 1/2, 1)^T$.

Zadatak 2 [20 bodova] *Izračunajte L_∞ normu matrice A i njene inverzne matrice A^{-1} , te broj uvjetovanosti.*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 1 & -4 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 2 & -\frac{6}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Ako se prilikom rješavanja sustava jednadžbi $Ax = b$ vektor slobodnih koeficijenata $\mathbf{b} = (-2, 0, 1)^T$ promijeni za $\Delta \mathbf{b} = (-0.05, 0.02, 0.05)^T$, a matrica $\mathbf{A}$ ostane nepromijenjena, koliko će se promijeniti rješenje $\mathbf{x}$ sustava?

Rješenje: $\|A\|_\infty = 8$, $\|A^{-1}\|_\infty = 4$ $\text{cond}_\infty(A) = 32$,

$$\frac{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}\| \frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} = 32 \cdot 0.05/2 = .8,$$

Zadatak 3 [20 bodova] *Zadan je vektor $a = (0, 3, -4)^T$. Odredite Householderovu matricu $H = I - 2uu^T$, $u = a/\|a\|_2$ i izračunajte Hb , gdje je $b = (-5, -20, -15)^T$.*

Rješenje: $a) u = (0, \frac{3}{5}, -\frac{4}{5})^T$, $H = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 24 \\ 0 & 24 & -7 \end{bmatrix}$, $Hb = (-5, -20, -15)^T$

Zadatak 4 [20 bodova] *Provjerite nalazi li se nultočka ξ funkcije $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 12x + 16$ u intervalu $[0, 3]$. Ako se zna da u polovištu intervala $x_1 = \frac{3}{2}$ funkcija f postiže negativnu vrijednost, u kojem od podintervala: $[0, x_1]$ ili $[x_1, 3]$ će se i dalje nalaziti nultočka? Procijenite apsolutnu pogrešku $|x_1 - \xi|$*

Rješenje: $[0, x_1]$, $|x_1 - \xi| \leq \frac{3}{2}$

Zadatak 5 [20 bodova] *Nekom iterativnom metodom dobivena je aproksimacija $x_n = 0.4$ nultočke funkcije $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1.1x - \frac{1}{3}$. Procijenite apsolutnu pogrešku $|x_n - \xi|$.*

Rješenje: $|x_n - \xi| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1} = \frac{.032}{.1} = .32$

Zadatak 6 [15 bodova] *Neka funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ima neprekidnu drugu derivaciju na intervalu $[a, b]$, a prva (f') i druga (f'') derivacija funkcije f na tom intervalu primaju stalan predznak. Koji uvjet još nedostaje da bi Newtonov iterativni proces uz $x_0 \in [a, b]$, $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, konvergirao prema jedinstvenom rješenju ξ jednadžbe $f(x) = 0$.*

Rješenje: $f(a) \cdot f(b) < 0$

**3. kontrolna zadaća iz
Matematičke analize III.**

Zadatak 1 [15 bodova] *Provjerite čini je li matrica L Cholesky-faktor matrice A . Riješite sustav jednadžbi $L^T x = b$.*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rješenje: $A = LL^T$, $x = (1, 1, 0)^T$.

Zadatak 2 [20 bodova] *Izračunajte L_∞ normu matrice A i njene inverzne matrice A^{-1} , te broj uvjetovanosti.*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 3 & -4 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{4} & -1 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Ako se prilikom rješavanja sustava jednadžbi $Ax = b$ vektor slobodnih koeficijenata $b = (\frac{1}{3}, 0, -\frac{6}{3})^T$ promijeni za $\Delta b = (0.05, -0.02, -0.05)^T$, a matrica A ostane nepromijenjena, koliko će se promijeniti rješenje x sustava?

Rješenje: $\|A\|_\infty = 11$, $\|A^{-1}\|_\infty = \frac{13}{3}$ $\text{cond}_\infty(A) = \frac{143}{3}$,

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = (143/3) \cdot 0.05 / (6/3) = 1.19,$$

Zadatak 3 [20 bodova] *Izračunajte prve 3 iteracije kod Jacobijeve metode za rješavanje sustava jednadžbi: $2x + y = 1$, $x + 2y = 2$ počevši od $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.*

Rješenje: $(\frac{1}{2}, 1)$, $(0, \frac{3}{4})$, $(\frac{1}{8}, 1)$.

Zadatak 4 [20 bodova] *Zadana je funkcije $f(x) = 12x - 4x^2 - x^3$ o aproksimacija $x^* = 3$ njene nultočke ξ . Ako se zna da minimum apsolutne vrijednosti prve derivacije funkcije f na intervalu $[1, 5]$ iznosi $m_1 = 1$, procijenite apsolutnu pogrešku $|x^* - \xi|$ aproksimacije x^* .*

Rješenje: $|x^* - \xi| \leq \frac{|f(x^*)|}{m_1} = 27$

Zadatak 5 [20 bodova] *Provjerite, hoće li konvergirati iterativni proces definiran s*

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

gdje je $\varphi : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = x - \frac{2}{x}$.

Rješenje: neće jer nisu ispunjeni uvjeti Teorema (skripta !!!)

Zadatak 6 [15 bodova] *Neka funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ima neprekidnu drugu derivaciju na intervalu $[a, b]$. Što se podrazumijeva pod brzinom (redom) konvergencije nekog iterativnog procesa? Kakva je brzina konvergencije Newtonovog iterativnog procesa?*

Rješenje: . . . (skripta !!!)

**3. kontrolna zadaća iz
Matematičke analize III.**

Zadatak 1 [15 bodova] *Provjerite čine li matrice L i U LU-dekompoziciju matrica A . Riješite sustav jednadžbi $Ux = b$.*

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 3 \\ -4 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rješenje: $A = LU$, $x = (0, 2, 0)^T$.

Zadatak 2 [20 bodova] *Izračunajte L_∞ normu matrice A i njene inverzne matrice A^{-1} , te broj uvjetovanosti.*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{11}{4} & 3 & \frac{7}{8} \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Ako se prilikom rješavanja sustava jednadžbi $Ax = b$ vektor slobodnih koeficijenata $\mathbf{b} = (1, 0, 1)^T$ promijeni za $\Delta \mathbf{b} = (-0.05, -0.02, 0.1)^T$, a matrica $\mathbf{A}$ ostane nepromijenjena, koliko će se promijeniti rješenje $\mathbf{x}$ sustava?

Rješenje: $\|A\|_\infty = 11$, $\|A^{-1}\|_\infty = \frac{53}{8}$ $\text{cond}_\infty(A) = \frac{583}{8}$,

$$\frac{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} = (583/8) \cdot 0.1 = 7.3,$$

Zadatak 3 [20 bodova] *Od vektora $a = (4, 0, -3)^T$ načinite Householderovu matricu H i izračunajte Hb , gdje je $b = (-5, -20, -15)^T$.*

Rješenje: $a) u = (\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5})^T$, $H = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} -7 & 0 & 24 \\ 0 & 25 & 0 \\ 24 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, $Hb = (-13, -20, -9)^T$

Zadatak 4 [20 bodova] *Provjerite nalazi li se nultočka ξ funkcije $f(x) = 12x - 4x^2 - x^3$ u intervalu $[1, 5]$. Ako se zna da u polovištu tog intervala funkcija f postiže negativnu vrijednost, u kojoj polovini intervala: $[1, 3]$ ili $[3, 5]$ će se i dalje nalaziti nultočka? Procijenite apsolutnu pogrešku $|3 - \xi|$*

Rješenje: $[1, 3]$, $|3 - \xi| \leq 2$

Zadatak 5 [20 bodova] *Nekom iterativnom metodom dobivena je aproksimacija $x_n = -0.4$ nultočke funkcije $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 1.1x - \frac{1}{3}$. Procijenite apsolutnu pogrešku $|x_n - \xi|$.*

Rješenje: $|x_n - \xi| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1} = \frac{.032}{.1} = .32$

Zadatak 6 [20 bodova] *Neka funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ima neprekidnu drugu derivaciju na intervalu $[a, b]$. Neka je nadalje $f(a) \cdot f(b) < 0$, a prva (f') i druga (f'') derivacija funkcije f na tom intervalu primaju stalan predznak. Koji uvjet još nedostaje da bi Newtonov iterativni proces uz $x_0 \in [a, b]$, konvergirao prema jedinstvenom rješenju ξ jednadžbe $f(x) = 0$.*

Rješenje: $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$

**3. kontrolna zadaća iz
Matematičke analize III.**

Zadatak 1 [15 bodova] *Provjerite je li matrica L Cholesky faktor matrice A . Riješite sustav jednadžbi $L^T x = b$.*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 4 & 10 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & \sqrt{6} & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{\sqrt{15}}{2} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rješenje: $A = LL^T$, $x = (1, 1, 0)^T$.

Zadatak 2 [20 bodova] *Izračunajte L_∞ normu matrice A i njene inverzne matrice A^{-1} , te broj uvjetovanosti.*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{11}{3} & -5 \\ 2 & -\frac{7}{3} & -3 \\ 3 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

Ako se prilikom rješavanja sustava jednadžbi $Ax = b$ vektor slobodnih koeficijenata $\mathbf{b} = (-1, 4, 1)^T$ promijeni za $\Delta \mathbf{b} = (-0.5, 0.02, 0.05)^T$, a matrica $\mathbf{A}$ ostane nepromijenjena, koliko će se promijeniti rješenje $\mathbf{x}$ sustava?

Rješenje: $\|A\|_\infty = 8$, $\|A^{-1}\|_\infty = 12$ $\text{cond}_\infty(A) = 96$,

$$\frac{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}\| \frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} = 96 \cdot 0.5/4 = 12$$

Zadatak 3 [20 bodova] *Izračunajte prve 2 iteracije kod Gauss-Seidelove metode za rješavanje sustava jednadžbi: $2x + y = 1$, $x + 2y = 2$ počevši od $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.*

Rješenje: $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, $(\frac{1}{8}, \frac{15}{16})$.

Zadatak 4 [20 bodova] *Zadana je funkcije $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 12x + 16$ i aproksimacija $x^* = 1.5$ njene nultočke ξ . Ako se zna da minimum apsolutne vrijednosti prve derivacije funkcije f na intervalu $[0, 2.5]$ iznosi $m_1 = 4.5$, procijenite apsolutnu pogrešku $|x^* - \xi|$ aproksimacije x^* .*

Rješenje: $|x^* - \xi| \leq \frac{|f(x^*)|}{m_1} = (35/4)/4.5 = 1.9$

Zadatak 5 [20 bodova] *Provjerite, hoće li konvergirati iterativni proces definiran s*

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

gdje je $\varphi : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$.

Rješenje: *hoće jer su ispunjeni uvjeti Teorema (skripta !!!)*

Zadatak 6 [15 bodova] *Neka funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ima neprekidnu drugu derivaciju na intervalu $[a, b]$. Što se podrazumijeva pod brzinom (redom) konvergencije nekog iterativnog procesa? Kakva je brzina konvergencije metode sekanti?*

Rješenje: . . . (skripta !!!)