

4. kontrolna zadaća iz
Matematičke analize III.

Zadatak 1 [15 bodova] Na intervalu $[0, 1]$ poznata je aproksimacija $f^*(x) = 3x$ funkcije $f(x) = -x^2 + 4x$. Izračunajte pogrešku aproksimacije kao d_2 -udaljenost funkcije f^* od f .

Rješenje: $d_2(f, f^*) = \|f - f^*\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (f(x) - f^*(x))^2 dx} = 1/\sqrt{30}$

Zadatak 2 [15 bodova] Pronađite najbolju L_2 aproksimaciju funkcije $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq .5 \\ 1, & x > .5 \end{cases}$, $x \in [0, 1]$ na potprostoru svih polinoma stupnja ≤ 1 (težinska funkcija neka bude $\omega \equiv 1$)

Uputa: aproksimaciju tražite u obliku $\varphi(x) = a_0 + a_1x$.

Rješenje: $Ga = y$, gdje je $G = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix}$ Hilbertova matrica, a $y = (\frac{1}{2}, \frac{3}{8})^T$. $a_0 = -0.25$, $a_1 = 1.5$.

Zadatak 3 [15 bodova] Odredite Fourierov polinom funkcije $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Rješenje: $F_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin x + \frac{2}{3\pi} \sin 3x + \frac{2}{5\pi} \sin 5x + \dots$

Zadatak 4 [15 bodova] Zadani su podaci $\frac{x}{y} \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$. Odredite parametre a_1, a_2 linearne funkcije $f(x) = a_1 + a_2x$ u smislu najmanjih kvadrata.

Rješenje: $f(x) = 2.75 + 0.7x$.

Zadatak 5 [15 bodova] Primjenom trapezne formule napišite formulu za aproksimaciju integrala $I = \int_0^1 f(x)dx$ i odgovarajuću pogrešku aproksimacije. Ako se zna da je $M_2 = \max_{x \in [0,1]} |f''(x)| = 12$, na koliko dijelova treba podijeliti interval $[0, 1]$ da bi se postigla točnost aproksimacije na 2 decimale?

Rješenje: $\epsilon_{ps} = .005$, $n = [14.1421] + 1 = 15$.

Zadatak 6 [15 bodova] Zadan je Cauchyjev problem početne vrijednosti: $y' = 2x^2 + 3y^3$, $y(0) = 1$. Primjenom Eulerove metode izračunajte približnu vrijednost tražene funkcije u točki $x = .1$.

Rješenje: $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h = 1 + 3 \cdot .1 = 1.3$

4. kontrolna zadaća iz
Matematičke analize III.

Zadatak 1 [15 bodova] Na intervalu $[0, 1]$ poznata je aproksimacija $f^*(x) = 3x$ funkcije $f(x) = -x^2 + 4x$. Izračunajte pogrešku aproksimacije kao d_1 -udaljenost funkcije f^* od f .

Rješenje: $d_1(f, f^*) = \|f - f^*\|_1 = \int_0^1 |f(x) - f^*(x)| dx = 1/6$

Zadatak 2 [15 bodova] Pronađite najbolju L_2 aproksimaciju funkcije $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq .5 \\ 0, & x > .5 \end{cases}$, $x \in [0, 1]$ na potprostoru svih polinoma stupnja ≤ 1 (težinska funkcija neka bude $\omega \equiv 1$)

Uputa: aproksimaciju tražite u obliku $\varphi(x) = a_0 + a_1x$.

Rješenje: $Ga = y$, gdje je $G = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix}$ Hilbertova matrica, a $y = (\frac{1}{2}, \frac{1}{8})^T$. $a_0 = 1.25$, $a_1 = -1.5$.

Zadatak 3 [15 bodova] Odredite Fourierov polinom funkcije $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Rješenje: $F_n(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sin x - \frac{2}{3\pi} \sin 3x - \frac{2}{5\pi} \sin 5x - \dots$

Zadatak 4 [15 bodova] Zadani su podaci $\frac{x}{y} \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 6 \end{vmatrix}$. Odredite parametre a_1, a_2 linearne funkcije $f(x) = a_1 + a_2x$ u smislu najmanjih kvadrata.

Rješenje: $f(x) = 4.5 + 0.6x$.

Zadatak 5 [15 bodova] Primjenom trapezne formule napišite formulu za aproksimaciju integrala $I = \int_0^1 f(x) dx$ i odgovarajuću pogrešku aproksimacije. Ako se zna da je $M_2 = \max_{x \in [0,1]} |f''(x)| = 24$, na koliko dijelova treba podijeliti interval $[0, 1]$ da bi se postigla točnost aproksimacije na 4 decimale?

Rješenje: $\epsilon = .00005$, $n = 200$.

Zadatak 6 [15 bodova] Zadan je Cauchyjev problem početne vrijednosti: $y' = 2x^2 + 3y^3$, $y(0) = 1$. Primjenom Eulerove metode izračunajte približnu vrijednost tražene funkcije u točki $x = -0.1$.

Rješenje: $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h = 1 + 3 \cdot (-.1) = .7$

4. kontrolna zadaća iz
Matematičke analize III.

Zadatak 1 [15 bodova] Na intervalu $[0, 1]$ poznata je aproksimacija $f^*(x) = 3x$ funkcije $f(x) = -x^2 + 4x$. Izračunajte pogrešku aproksimacije kao d_∞ -udaljenost funkcije f^* od f .

Rješenje: $d_\infty(f, f^*) = \|f - f^*\|_\infty = \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - f^*(x)| = 1/4$

Zadatak 2 [15 bodova] Pronađite najbolju L_2 aproksimaciju funkcije $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{1}{3} \\ 1, & x > \frac{1}{3} \end{cases}$, $x \in [0, 1]$ na potprostoru svih polinoma stupnja ≤ 1 (težinska funkcija neka bude $\omega \equiv 1$)

Uputa: aproksimaciju tražite u obliku $\varphi(x) = a_0 + a_1x$.

Rješenje: $Ga = y$, gdje je $G = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix}$ Hilbertova matrica, a $y = (\frac{2}{3}, \frac{4}{9})^T$. $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{4}{3}$.

Zadatak 3 [15 bodova] Poznat je Fourierov polinom $F_n(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos x - \frac{4}{3^2\pi} \cos 3x - \frac{4}{5^2\pi} \cos 5x - \dots$ funkcije $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$, $x \in [-\pi, \pi]$. Odredite Fourierov polinom

funkcije $\bar{f}(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$, $x \in [0, 1]$.

Rješenje: $\bar{F}_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi} \cos 2\pi x + \frac{4}{3^2\pi} \cos 6\pi x - \frac{4}{5^2\pi} \cos 10\pi x - \dots$.

Zadatak 4 [15 bodova] Zadani su podaci $\frac{x}{y} \begin{vmatrix} -3 & -1 & 0 & 4 \\ 10 & 4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$. Odredite parametre a_1, a_2 linearne funkcije $f(x) = a_1 + a_2x$ u smislu najmanjih kvadrata.

Rješenje: $f(x) = 5.5 - 1.x$.

Zadatak 5 [15 bodova] Primjenom Simpsonove formule napišite formulu za aproksimaciju integrala $I = \int_0^1 f(x)dx$ i odgovarajuću pogrešku aproksimacije. Ako se zna da je $M_4 = \max_{x \in [0, 1]} |f^{(4)}(x)| = 64$, na koliko dijelova treba podijeliti interval $[0, 1]$ da bi se postigla točnost aproksimacije na 2 decimale?

Rješenje: $\text{eps} = .005$, $n = [2.90392] + 2 = 4$.

Zadatak 6 [15 bodova] Primjenom metode konačnih diferencija napišite diskretizirani oblik rubnog problema: $y'' + y = x$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

Rješenje:

4. kontrolna zadaća iz
Matematičke analize III.

Zadatak 1 [15 bodova] Izračunajte d_∞ -udaljenost funkcije $g(x) = 4x$ od funkcije $f(x) = x^2$ na intervalu $[0, 4]$.

Rješenje: $d_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty = \max_{x \in [0, 4]} |f(x) - g(x)| = 4$

Zadatak 2 [15 bodova] Pronađite najbolju L_2 aproksimaciju funkcije $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq \frac{1}{3} \\ 0, & x > \frac{1}{3} \end{cases}$, $x \in [0, 1]$ na potprostoru svih polinoma stupnja ≤ 1 (težinska funkcija neka bude $\omega \equiv 1$)

Uputa: aproksimaciju tražite u obliku $\varphi(x) = a_0 + a_1x$.

Rješenje: $Ga = y$, gdje je $G = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix}$ Hilbertova matrica, a $y = (\frac{1}{3}, \frac{1}{18})^T$. $a_0 = 1$, $a_1 = -\frac{4}{3}$.

Zadatak 3 [15 bodova] Poznat je Fourierov polinom $F_n(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos x - \frac{4}{3^2\pi} \cos 3x - \frac{4}{5^2\pi} \cos 5x - \dots$ funkcije $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$, $x \in [-\pi, \pi]$. Odredite Fourierov polinom

funkcije $\bar{f}(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$, $x \in [-1, 1]$.

Rješenje: $\bar{F}_n(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi} \cos \pi x - \frac{4}{3^2\pi} \cos 3\pi x - \frac{4}{5^2\pi} \cos 5\pi x - \dots$.

Zadatak 4 [15 bodova] Zadani su podaci $\frac{x}{y} \begin{vmatrix} -3 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 8 & 10 \end{vmatrix}$. Odredite parametre a_1, a_2 linearne funkcije $f(x) = a_1 + a_2x$ u smislu najmanjih kvadrata.

Rješenje: $f(x) = 6 + 1.15385x$.

Zadatak 5 [15 bodova] Primjenom Simpsonove formule napišite formulu za aproksimaciju integrala $I = \int_0^1 f(x)dx$ i odgovarajuću pogrešku aproksimacije. Ako se zna da je $M_4 = \max_{x \in [0, 1]} |f^{(4)}(x)| = 64$, na koliko dijelova treba podijeliti interval $[0, 1]$ da bi se postigla točnost aproksimacije na 4 decimale?

Rješenje: $\text{eps} = .005$, $n = [9.183] + 1 = 10$.

Zadatak 6 [15 bodova] Primjenom metode konačnih diferencija napišite diskretizirani oblik rubnog problema: $y'' + y' = x$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

Rješenje: