

**2. kontrolna zadaća iz
Matematičke analize 3**

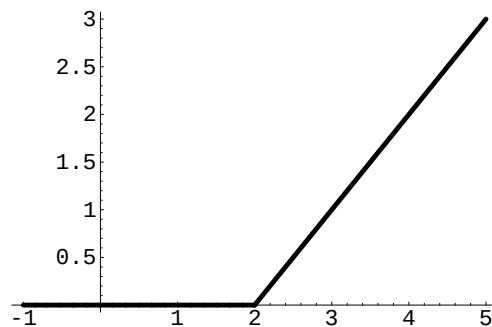
Zadatak 1 Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadana je formulom

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2, \\ |t - 2|, & t \geq 2. \end{cases}$$

- a) [5 bodova] Skicirajte graf funkcije f .
b) [15 bodova] Odredite Laplaceovu transformaciju funkcije f .

Rješenje.

- a) Graf funkcije f prikazan je na Slici 1.



Slika 1: Graf funkcije f

b) $F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_2^{+\infty} (t - 2)e^{-st}dt = \frac{e^{-2s}}{s^2}.$

Pri tome se posljednji integral rješava metodom parcijalne integracije.

Zadatak 2 [15 bodova] Odredite inverznu Laplaceovu transformaciju funkcije

$$F(s) = \frac{1}{s(1-s)}.$$

Rješenje. Nije teško pokazati da je

$$\frac{1}{s(1-s)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1},$$

te je stoga

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) = 1 - e^t.$$

Posljednju jednakost dobivamo direktno iz tablice Laplaceovih transformacija.

Zadatak 3 [15 bodova] *Primjenom Laplaceove transformacije svedite diferencijalnu jednadžbu $y'' - 9y' + 11y = \sin te^{2t} + te^{-3t}$, $y(0) = 1, y'(0) = 3$ na algebarsku jednadžbu.*

Rješenje. Iz

$$\mathcal{L}(y'' - 9y' + 11y) = \mathcal{L}(\sin te^{2t} + te^{-3t}),$$

dobivamo da je

$$(s^2 F(s) - sy'(0) - y(0)) - 9(sF(s) - y(0)) + 11F(s) = \frac{1}{1 + (s - 2)^2} + \frac{1}{(3 + s)^2}.$$

Uzevši u obzir početne uvjete imamo:

$$F(s)(s^2 - 9s + 11) = 3s - 8 + \frac{1}{1 + (s - 2)^2} + \frac{1}{(3 + s)^2}.$$

Zadatak 4 [25 bodova] *Koristeći Laplaceove transformacije riješite sustav diferencijalnih jednadžbi*

$$\begin{aligned} x'(t) + y'(t) &= -4 \sin t + \cos t \\ x'(t) - y'(t) &= 2 \sin t + 3 \cos t \\ x(0) = 1, y(0) &= 3 \end{aligned}$$

Rješenje. Označimo s $F(s) = \mathcal{L}(x(t))$ te $G(s) = \mathcal{L}(y(t))$. Djelujemo li s Laplace-ovom transformacijom na sustav jednadžbi (analogno kao u prethodnom zadatku) dobivamo sljedeći sustav algebarskih jednadžbi:

$$\begin{aligned} F(s) + G(s) &= \frac{4s^2 + s}{s^2 + 1} \\ F(s) - G(s) &= \frac{3s - 2s^2}{s^2 + 1}, \end{aligned}$$

odakle je $F(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{4s^2 + s}{s^2 + 1} + \frac{3s - 2s^2}{s^2 + 1} \right)$, te $G(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{4s^2 + s}{s^2 + 1} - \frac{3s - 2s^2}{s^2 + 1} \right)$. Primjenom inverznih Laplaceovih transformacija dobivamo $x(t) = \cos t + 2 \sin t$ te $y(t) = 3 \cos t - \sin t$.

Zadatak 5 [20 bodova] *Zadan je integral $I = \int_{3/2}^5 (x^2 - 3x + 2) dx$. Vrijednost navedenog integrala može se aproksimirati s $I^* = \frac{7}{4}(m + M)$, gdje su*

$$m = \min_{x \in [\frac{3}{2}, 5]} (x^2 - 3x + 2), \quad M = \max_{x \in [\frac{3}{2}, 5]} (x^2 - 3x + 2).$$

Procijenite odgovarajuću apsolutnu i relativnu pogrešku aproksimacije.

Rješenje. Budući da je funkcija $x \mapsto x^2 - 3x + 2$, padajuća na $[\frac{3}{2}, 5]$, jednostavno se vidi da je $m = \min_{x \in [\frac{3}{2}, 5]} (x^2 - 3x + 2) = \frac{-1}{4}$, te da je $M = \max_{x \in [\frac{3}{2}, 5]} (x^2 - 3x + 2) = 12$. Odavde je

$$I^* = \frac{7}{4}(12 - \frac{1}{4}) = 20.5625.$$

Kako egzaktna vrijednost integrala iznosi $I = 13.4167$, apsolutna pogreška iznosi $\Delta I^* = |20.5625 - 13.4167| = 7.1458$.

Zadatak 6 [15 bodova] *Zadana je funkcija $f(x) = x^2 - 3x$ te vrijednost $x = 2 \pm 0.005$ s odgovarajućom granicom pogreške. Procijenite pogrešku prilikom izračunavanja vrijednosti funkcije f u točki x^* .*

Rješenje. $\Delta f^* \leq |f'(2)|0.005 = 0.005$.

**2. kontrolna zadaća iz
Matematičke analize 3**

Zadatak 1 *Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadana je formulom*

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 3, \\ |t - 3|, & t \geq 3. \end{cases}$$

a) [5 bodova] *Skicirajte graf funkcije f .*

b) [15 bodova] *Odredite Laplaceovu transformaciju funkcije f .*

Zadatak 2 [15 bodova] *Odredite inverznu Laplaceovu transformaciju funkcije*

$$F(s) = \frac{1}{s(2-s)}.$$

Zadatak 3 [15 bodova] *Primjenom Laplaceove transformacije svedite diferencijalnu jednadžbu $y'' - 11y' + 10y = \sin te^{3t} + 5te^t$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$ na algebarsku jednadžbu.*

Zadatak 4 [25 bodova] *Koristeći Laplaceove transformacije riješite sustav diferencijalnih jednadžbi*

$$\begin{aligned} x'(t) + y'(t) &= -4 \sin t + \cos t \\ x'(t) - 2y'(t) &= 5 \sin t + 4 \cos t \\ x(0) = 1, y(0) &= 3 \end{aligned}$$

Zadatak 5 [20 bodova] *Zadan je integral $I = \int_0^{3/2} (x^2 - 3x + 2) dx$. Vrijednost navedenog integrala može se aproksimirati s $I^* = \frac{3}{4}(m + M)$, gdje su*

$$m = \min_{x \in [0, 3/2]} (x^2 - 3x + 2), \quad M = \max_{x \in [0, 3/2]} (x^2 - 3x + 2).$$

Procijenite odgovarajuću apsolutnu i relativnu pogrešku aproksimacije.

Zadatak 6 [15 bodova] *Zadana je funkcija $f(x) = x^3 - 2x$ te vrijednost $x = 1 \pm 0.005$ s odgovarajućom granicom pogreške. Procijenite pogrešku prilikom izračunavanja vrijednosti funkcije f u točki x^* .*

**2. kontrolna zadaća iz
Matematičke analize 3**

Zadatak 1 Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadana je formulom

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 4, \\ |t - 4|, & t \geq 4. \end{cases}$$

- a) [5 bodova] Skicirajte graf funkcije f .
b) [15 bodova] Odredite Laplaceovu transformaciju funkcije f .

Zadatak 2 [15 bodova] Odredite inverznu Laplaceovu transformaciju funkcije

$$F(s) = \frac{1}{s(3-s)}.$$

Zadatak 3 [15 bodova] Primjenom Laplaceove transformacije svedite diferencijalnu jednadžbu $2y'' - 5y' + 10y = \cos t e^{3t} + 5te^t$, $y(0) = 1, y'(0) = 2$ na algebarsku jednadžbu.

Zadatak 4 [25 bodova] Koristeći Laplaceove transformacije riješite sustav diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned} x'(t) + y'(t) &= -4 \sin t + \cos t \\ 2x'(t) - y'(t) &= \sin t + 5 \cos t \\ x(0) = 1, y(0) &= 3 \end{aligned}$$

Zadatak 5 [20 bodova] Zadan je integral $I = \int_0^{5/2} (x^2 - 3x + 2) dx$. Vrijednost navedenog integrala može se aproksimirati s $I^* = \frac{5}{4}(m + M)$, gdje su

$$m = \min_{x \in [0, 5/2]} (x^2 - 3x + 2), \quad M = \max_{x \in [0, 5/2]} (x^2 - 3x + 2).$$

Procijenite odgovarajuću apsolutnu i relativnu pogrešku aproksimacije.

Zadatak 6 [15 bodova] Zadana je funkcija $f(x) = -x^3 - x$ te vrijednost $x = 2 \pm 0.005$ s odgovarajućom granicom pogreške. Procijenite pogrešku prilikom izračunavanja vrijednosti funkcije f u točki x^* .

**2. kontrolna zadaća iz
Matematičke analize 3**

Zadatak 1 *Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadana je formulom*

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 5, \\ |t - 5|, & t \geq 5. \end{cases}$$

- a) [5 bodova] *Skicirajte graf funkcije f .*
b) [15 bodova] *Odredite Laplaceovu transformaciju funkcije f .*

Zadatak 2 [15 bodova] *Odredite inverznu Laplaceovu transformaciju funkcije*

$$F(s) = \frac{1}{s(4-s)}.$$

Zadatak 3 [15 bodova] *Primjenom Laplaceove transformacije svedite diferencijalnu jednadžbu $y'' - 15y' + y = \cos t e^t + t e^{3t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ na algebarsku jednadžbu.*

Zadatak 4 [25 bodova] *Koristeći Laplaceove transformacije riješite sustav diferencijalnih jednadžbi*

$$\begin{aligned} x'(t) + y'(t) &= -4 \sin t + \cos t \\ 3x'(t) - y'(t) &= 7 \cos t \\ x(0) = 1, y(0) &= 3 \end{aligned}$$

Zadatak 5 [20 bodova] *Zadan je integral $I = \int_0^{5/2} (x^2 - 3x + 2) dx$. Vrijednost navedenog integrala može se aproksimirati s $I^* = \frac{5}{4}(m + M)$, gdje su*

$$m = \min_{x \in [0, 5/2]} (x^2 - 3x + 2), \quad M = \max_{x \in [0, 5/2]} (x^2 - 3x + 2).$$

Procijenite odgovarajuću apsolutnu i relativnu pogrešku aproksimacije.

Zadatak 6 [15 bodova] *Zadana je funkcija $f(x) = -2x^3 + x$ te vrijednost $x = 1 \pm 0.005$ s odgovarajućom granicom pogreške. Procijenite pogrešku prilikom izračunavanja vrijednosti funkcije f u točki x^* .*