

Pismeni ispit iz Numeričke matematike
Ak. god. 2008./2009.

Zadatak 1 [20 bodova]

- (a) Ako su poznate približne vrijednosti nezavisnih varijabli

$$x = 5.12 \pm 0.005, \quad y = 1.17 \pm 0.005,$$

odredite apsolutnu i relativnu pogrešku u % funkcije $f(x, y) = \frac{(x-2y)^2}{y}$.

- (b) Sukladno tome, odredite približnu vrijednost funkcije. Za koliko znamenki u izračunatoj vrijednosti funkcije možemo reći da je signifikantno?

$$[a) \Delta f \approx 0.0995106, \delta f \approx 1.5\% \quad b) n = 1, f^* \approx 6]$$

Zadatak 2 [20 bodova]

- (a) Odredite interpolacijski polinom čiji graf prolazi točkama

$$T_0(-3, 57), \quad T_1(0, -24), \quad T_2(1, -11), \quad T_3(2, 32).$$

- (b) Napišite formulu za ocjenu pogreške ovog interpolacijskog polinoma u točki $x \in [-3, 2]$.

- (c) Skicirajte $p_2(x)$ iz Lagrangeovog oblika interpolacijskog polinoma s obzirom na zadane točke.

$$[a) P_3(x) = x^3 + 12x^2 - 24]$$

Zadatak 3 [20 bodova]

Neka su y_0, y_1, y_2 poznate vrijednosti funkcije f u čvorovima $x_0 = -4, x_1 = 3, x_2 = 5$.

- (a) Njezin linearni interpolacijski spline može se zapisati u obliku

$$L(x) = y_0 C_0(x) + y_1 C_1(x) + y_2 C_2(x),$$

gdje su C_0, C_1, C_2 odgovarajuće hat funkcije. Napišite izraze za hat funkcije C_1 i C_2 i skicirajte ih.

- (b) S obzirom na zadane točke napišite sustav uvjeta na osnovi kojih je moguće odrediti prirodni kubični interpolacijski spline.

Zadatak 4 [20 bodova]

- (a) Koje iterativne metode za rješavanje sustava linearnih jednadžbi poznajete?

- (b) Primjenom LU-dekompozicije riješite sustav linearnih jednadžbi $Ax = b$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{7}{6} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$[(a) \quad (b) z = (-4, 4, \frac{2}{3})^T, \quad x = (-1, -1, -1)^T]$$

Zadatak 5 [20 bodova]

- (a) Pokažite da su funkcije $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = x - 1$ i $\varphi_3(x) = x^2 - 2x + \frac{2}{3}$ međusobno ortogonalne na intervalu $[0, 2]$.

- (b) Pronađite najbolju L_2 aproksimaciju funkcije $f(x) = 1 - |x - 1|$ na intervalu $[0, 2]$ na potprostoru određenom baznim funkcijama $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ i $\varphi_3(x)$.

$$[b) a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{15}{16}, \quad f^*(x) = -15x^2/16 + 15x/8 - 1/8]$$

Zadatak 6 [20 bodova]

- (a) Koje metode za numeričku integraciju poznajete? Napišite pripadne formule.
- (b) Na koliko dijelova treba podijeliti interval $[1, e]$, tako da primjenom generalizirane trapezne formule dobijemo približnu vrijednost integrala $\int_1^e \frac{(x-1)^2}{x} dx$ s točnošću $\epsilon = 0.05$.
- (c) Primjenom generalizirane trapezne formule izračunajte približnu vrijednost integrala $\int_1^e \frac{(x-1)^2}{x} dx$ s točnošću $\epsilon = 0.05$.

$$[b) \quad n = 5 \quad c) \quad I^* = 0.766366]$$