

Pismeni ispit iz Numeričke matematike
Ak. god. 2008./2009.

Zadatak 1 [20 bodova]

- (a) Ako su poznate približne vrijednosti nezavisnih varijabli

$$x = 5.23 \pm 0.005, \quad y = 1.17 \pm 0.005,$$

odredite apsolutnu i relativnu pogrešku u % funkcije $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{y}$.

- (b) Sukladno tome, odredite približnu vrijednost funkcije. Za koliko znamenki u izračunatoj vrijednosti funkcije možemo reći da je signifikantno?

$$[a) \Delta f \approx 0.149609, \delta f \approx 0.67\% \quad b) n = 2, f^* \approx 22]$$

Zadatak 2 [20 bodova]

- (a) Odredite interpolacijski polinom čiji graf prolazi točkama

$$T_0(-2, 41), \quad T_1(1, 8), \quad T_2(2, 9), \quad T_3(4, -43).$$

- (b) Napišite formulu za ocjenu pogreške ovog interpolacijskog polinoma u točki $x \in [-2, 4]$.

- (c) Skicirajte $p_1(x)$ iz Lagrangeovog oblika interpolacijskog polinoma s obzirom na zadane točke.

$$[a) P_3(x) = -2x^3 + 5x^2 + 5]$$

Zadatak 3 [20 bodova]

Neka su y_0, y_1, y_2 poznate vrijednosti funkcije f u čvorovima $x_0 = -1, x_1 = 1, x_2 = 2$.

- (a) Njezin linearni interpolacijski spline može se zapisati u obliku

$$L(x) = y_0 C_0(x) + y_1 C_1(x) + y_2 C_2(x),$$

gdje su C_0, C_1, C_2 odgovarajuće hat funkcije. Napišite izraze za hat funkcije C_1 i C_2 i skicirajte ih.

- (b) S obzirom na zadane točke napišite sustav uvjeta na osnovi kojih je moguće odrediti prirodni kubični interpolacijski spline.

Zadatak 4 [20 bodova]

- (a) Koje direktne metode za rješavanje sustava linearnih jednadžbi poznajete?

- (b) Provedite 4 iteracije Gauss-Seidelove metode pri rješavanju sustava linearnih jednadžbi $Ax = b$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$[b) x^{(0)} = (0, 0)^T, \quad x^{(1)} = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right)^T, \quad x^{(2)} = \left(\frac{15}{8}, \frac{15}{16}\right)^T, \quad x^{(3)} = \left(\frac{65}{32}, \frac{65}{64}\right)^T, \quad x^{(4)} = \left(\frac{255}{128}, \frac{255}{256}\right)^T]$$

Zadatak 5 [20 bodova]

- (a) Što znači kada kažemo da je sustav funkcija ortogonalan na nekom intervalu?

- (b) Pronađite najbolju L_2 aproksimaciju funkcije $f(x) = |x - 1|$ na intervalu $[0, 2]$ na potprostoru određenom baznim funkcijama: $\varphi_1(t) = t$, $\varphi_2(t) = t^2$.

$$\begin{aligned} \frac{8}{3}a_1 + 4a_2 &= 1 \\ 4a_1 + \frac{32}{5}a_2 &= \frac{3}{2} \end{aligned} \quad , \quad a_1 = \frac{3}{8}, \quad a_2 = 0 \quad]$$

Zadatak 6 [20 bodova]

(a) Koje metode za numeričku integraciju poznajete? Napišite pripadne formule.

(b) Na koliko dijelova treba podijeliti interval $[1, e]$, tako da primjenom generalizirane trapezne formule dobijemo približnu vrijednost integrala $\int_1^e \frac{x-1}{x} dx$ s točnošću $\epsilon = 0.05$.

(c) Primjenom generalizirane trapezne formule izračunajte približnu vrijednost integrala $\int_1^e \frac{x-1}{x} dx$ s točnošću $\epsilon = 0.05$.

$$[b) \ n = 5 \quad c) \ I^* = 0.70988 \]$$