

Pismeni ispit iz Numeričke matematike
Ak. god. 2008./2009.

Zadatak 1 [20 bodova]

- (a) S kojom točnošću moramo znati vrijednosti nezavisnih varijabli

$$w^* = 3.7321, \quad x^* = 1.1222, \quad y^* = 6.2277, \quad z^* = -2.8162,$$

da apsolutna pogreška funkcije $f(w, x, y, z) = (3w^2 + x + 2y)^2 - (3w^2 + x + 2y + 4z)^2$ ne premaši $\Delta f^* = 0.005$?

- (b) Za koliko znamenki u varijabli x možemo reći da je signifikantno?

[b) 4 sig.zn.]

Zadatak 2 [20 bodova]

- (a) Odredite interpolacijski polinom čiji graf prolazi točkama

$$T_0(-2, 39), \quad T_1(-1, 17/2), \quad T_2(0, 1), \quad T_3(1, -3/2), \quad T_4(2, -5).$$

- (b) Napišite formulu za ocjenu pogreške ovog interpolacijskog polinoma u točki $x \in [-2, 2]$. Kako bi trebalo birati točke tako da interpolacijski polinom ima što manju pogrešku?

- (c) Skicirajte $p_3(x)$ iz Lagrangeovog oblika interpolacijskog polinoma s obzirom na zadane točke.

$$[a) P_4(x) = x^4/2 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 1]$$

Zadatak 3 [20 bodova]

- (a) Koje direktne metode za rješavanje sustava linearnih jednadžbi poznajete?

- (b) Provedite 4 iteracije Gauss-Seidelove metode pri rješavanju sustava linearnih jednadžbi $Ax = b$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$[b) x^{(0)} = (0, 0)^T, \quad x^{(1)} = (\frac{5}{2}, \frac{5}{4})^T, \quad x^{(2)} = (\frac{15}{8}, \frac{15}{16})^T, \quad x^{(3)} = (\frac{65}{32}, \frac{65}{64})^T, \quad x^{(4)} = (\frac{255}{128}, \frac{255}{256})^T]$$

Zadatak 4 [20 bodova]

- (a) Pokažite da su funkcije $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = x - 2$ i $\varphi_3(x) = x^2 - 4x + \frac{8}{3}$ međusobno ortogonalne na intervalu $[0, 4]$.

- (b) Pronađite najbolju L_2 aproksimaciju funkcije $f(x) = |x - 1|$ na intervalu $[0, 4]$ na potprostoru određenom baznim funkcijama $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ i $\varphi_3(x)$.

$$[b) a_1 = 5/4, a_2 = 11/16, a_3 = 135/512, f^*(x) = (135x^2 - 188x + 296)/512]$$

Zadatak 5 [20 bodova]

- (a) Koje metode za numeričku integraciju poznajete? Napišite pripadne formule.

- (b) Na koliko dijelova treba podijeliti interval $[1, 4]$, tako da primjenom generaliziranog Simpsonovog pravila dobijemo približnu vrijednost integrala $\int_1^4 \frac{(x+5)^3}{125x} dx$ s točnošću $\epsilon = 0.05$?

- (c) Primjenom generaliziranog Simpsonovog pravila izračunajte približnu vrijednost integrala $\int_1^4 \frac{(x+5)^3}{125x} dx$ s točnošću $\epsilon = 0.05$.

$$[b) n = 6 \quad c) I^* = 4.2557]$$