

2. kontrolna zadaća iz Numeričke matematike

Ak. god. 2008./2009.

Zadatak 1 [20 bodova] *Zadan je sustav linearnih jednadžbi $Ax = b$, gdje je*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}.$$

- (a) *Kako se definira broj uvjetovanosti $\text{cond}(A)$ kvadratne matrice A ?*
 (b) *Odredite broj uvjetovanosti zadane matrice A .*
 (c) *Ocijenite kako će se promijeniti rješenje sustava ako umjesto vektora b u sustav uvedemo novi vektor slobodnih koeficijenata $\tilde{b} = (6, 8, 10.5)^T$?*

$$[(a) \text{ cond } A = \|A\| \|A^{-1}\|, \quad (b) 748, \quad (c) \frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = 37.4]$$

Zadatak 2 [20 bodova]

- (a) *Koje iterativne metode za rješavanje sustava linearnih jednadžbi poznajete?*
 (b) *Primjenom LU-dekompozicije riješite sustav linearnih jednadžbi $Ax = b$, gdje je*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$$[(a) \quad (b) z = (1., 1.5, 1.5)^T, \quad x = (3., -1., -3.)^T]$$

Zadatak 3 [20 bodova]

- (a) *Koje uvjete mora zadovoljavati funkcija φ ako želimo primijeniti metodu jednostavnih iteracija za rješavanje jednadžbe $\varphi(x) = x$ na intervalu $[a, b]$? Kakva je brzina konvergencije metode jednostavnih iteracija?*
 (b) *Pokažite da funkcija $\varphi(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{3}{x})$ ispunjava uvjete za konvergenciju metode jednostavnih iteracija na intervalu $[1.1, 3]$.*
 (c) *Uz početnu aproksimaciju $x_0 = 3$ provedite prve dvije iteracije. Napišite formulu za ocjenu pogreške.*

$$[(a) \text{ linearna} \quad (b) \quad (c) 2, 7/4]$$

Zadatak 4 [20 bodova]

- (a) *Što znači da je sustav funkcija $\{\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$ ortogonalan na intervalu $[-\pi, \pi]$?*
 (b) *Izračunajte Fourierov polinom drugog stupnja za funkciju $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-\pi, \frac{\pi}{2}) \\ 1, & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$*

$$[(a) \quad (b) F_2(x) = -1 - \frac{2}{\pi} \cos x + \frac{2}{\pi} \sin x - \frac{2}{\pi} \sin 2x]$$

Zadatak 5 [20 bodova] *Zadani su podaci*

$$\begin{array}{c|cccc} x_i & -2 & -1 & 0 & 3 \\ \hline y_i & 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}$$

Odredite linearnu funkciju $f(x) = kx + l$, tako da njezin graf u smislu najmanjih kvadrata prolazi što bliže zadanim podacima.

$$[f(x) = 0.642857x + 2]$$

Zadatak 6 [20 bodova]

- (a) Koje metode za numeričku integraciju poznajete? Napišite pripadne formule.
- (b) Na koliko dijelova treba podijeliti interval $[0, 1]$, tako da primjenom generalizirane trapezne formule dobijemo približnu vrijednost integrala $\int_0^1 (x - 4x^3) dx$ s točnošću $\epsilon = 0.5$.
- (c) Primjenom generalizirane trapezne formule izračunajte približnu vrijednost integrala $\int_0^1 (x - 4x^3) dx$ s točnošću $\epsilon = 0.5$.
- . [(a) (b) $M_2 = 24$, $n = 3$, $x = \{0, 1/3, 2/3, 1\}$, $f(x) = \{0, 5/27, -14/27, -3\}$ (c)
 $I = -.5$, $I^* = -.6111$]

2. kontrolna zadaća iz Numeričke matematike
Ak. god. 2008./2009.

Zadatak 1 [20 bodova] *Zadan je sustav linearnih jednadžbi $Ax = b$, gdje je*

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 72 & -240 & 180 \\ -240 & 900 & -720 \\ 180 & -720 & 600 \end{bmatrix}.$$

- (a) *Kako se definira broj uvjetovanosti $\text{cond}(A)$ kvadratne matrice A ?*
(b) *Odredite broj uvjetovanosti zadane matrice A .*
(c) *Ocijenite kako će se promijeniti rješenje sustava ako umjesto vektora b u sustav uvedemo novi vektor slobodnih koeficijenata $\tilde{b} = (6, 8.5, 10)^T$?*

$$[(a) \text{ cond } A = \|A\| \|A^{-1}\|, \quad (b) 2015, \quad (c) \frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = 100.75]$$

Zadatak 2 [20 bodova]

- (a) *Kakve su matrice L i U kod LU-dekompozicije?*
(b) *Primjenom LU-dekompozicije riješite sustav linearnih jednadžbi $Ax = b$, gdje je*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$$[(a) \quad (b) z = (1., 1.5, 1.5)^T, \quad x = (1., -2., -3.)^T]$$

Zadatak 3 [20 bodova]

- (a) *Koje uvjete mora ispunjavati funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ da bi za $x_0 \in [a, b]$ Newtonova metoda tangenti konvergirala prema rješenju jednadžbe $f(x) = 0$? Kakva je brzina konvergencije?*
(b) *Pokažite da funkcija $f(x) = x^2 - 2$ ispunjava uvjete za konvergenciju Newtonove metode tangenti na intervalu $[0, 2]$. Kako treba odabrati početnu aproksimaciju x_0 ?*
(c) *Provedite prve dvije iteracije Newtonove metode tangenti. Napišite formulu za ocjenu pogreške.*
(d) *Koje modifikacije Newtonove metode tangenti poznajete?*

$$[(a) \quad (b) \quad (c) 1.5, 1.41667 \quad (d)]$$

Zadatak 4 [20 bodova] *Pronađite najbolju L_2 aproksimaciju funkcije $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [0, 1) \\ 1, & x \in [1, 2] \end{cases}$ na potprostoru određenom baznim funkcijama: $\varphi_1(t) = t$, $\varphi_2(t) = t^2$.*

$$\left[\begin{array}{l} \frac{8}{3}a_1 + 4a_2 = 1 \\ 4a_1 + \frac{32}{5}a_2 = 2 \end{array} \right], \quad a_1 = -\frac{3}{2}, \quad a_2 = \frac{5}{4}$$

Zadatak 5 [20 bodova] *Zadani su podaci*

$$\begin{array}{c|cccc} x_i & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y_i & 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}$$

Odredite linearnu funkciju $f(x) = kx + l$, tako da njezin graf u smislu najmanjih kvadrata prolazi što bliže zadanim podacima.

$$[f(x) = x + 1.5]$$

Zadatak 6 [20 bodova]

(a) Koje metode za numeričku integraciju poznajete? Napišite pripadne formule.

(b) Na koliko dijelova treba podijeliti interval $[0, 1]$, tako da primjenom generalizirane trapezne formule dobijemo približnu vrijednost integrala $\int_0^1 (x - 2x^3) dx$ s točnošću $\epsilon = 0.05$?

(c) Primjenom generalizirane trapezne formule izračunajte približnu vrijednost integrala $\int_0^1 (x - 2x^3) dx$ s točnošću $\epsilon = 0.05$.

$M_2 = 12, \quad n = 5, \quad x = \{0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1\}, \quad f(x) = \{0, 23/125, 34/125, 21/125, -28/125, -1\}$ [(a) (b)
 $I = 0, \quad I^* = -0.02]$ (c)