

**Pismeni ispit iz
Matematičke analize 3**

1. Neka su $x = 1 \pm 0.001$, $y = 2 \pm 0.002$ i $z = 3 \pm 0.003$. Procijenite pogrešku koja nastaje prilikom izračunavanja vrijednosti funkcije $\psi(x, y, z) = x^x + z^z + y \ln(xyz)$ u točki $(1, 2, 3)$.
2. Zadana ja matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 6 & 13 & 17 & 22 \\ 10 & 43 & 42 & 47 \\ 8 & 24 & 41 & 57 \end{bmatrix}.$$

Odredite LU dekompoziciju matrice $\mathbf{A}$, izračunajte $\|\mathbf{A}\|_1$ te $\det \mathbf{U}$ i $\det \mathbf{L}$.

3. Zadana je funkcija $f(x) = x^3 - 5x - 6$. U skladu s teoremom o konvergenciji Newtonove metode tangente odredite interval I u kome se nalazi nultočka funkcije i u kome su ispunjeni svi uvjeti spomenutog teorema. U skladu sa spomenutim teoremom odredite početnu aproksimaciju $x_0 \in I$ i izračunajte prve četiri x_1, x_2, x_3, x_4 aproksimacije tražene nultočke ξ . Prema formuli

$$|\xi - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}, \quad m_1 = \min_{x \in I} |f'(x)|$$

ocijenite apsolutnu pogrešku četvrte x_4 aproksimacije. Na koliko decimala je točna četvrta x_4 aproksimacija?

4. Dijeleći interval $I = [0, 2]$ na 9 jednakih dijelova i primijenjujući generalizirano trapezno pravilo, izračunajte približnu vrijednost integrala

$$\int_0^2 (-x^3 + 5x + 3) dx.$$

Kolika je apsolutna pogreška aproksimacije? Koliki je minimalni broj jednakih podintervala na koji bi trebalo podijeliti interval I da bismo primjenom generaliziranog trapeznog pravila postigli točnost na 4 decimale?

5. Primijenom Laplaceovih transformacija riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'' - 5y' = 2x \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

**Pismeni ispit iz
Matematičke analize 3**

1. Neka je $f(x) = 2 \sin(\frac{\pi x}{6})$. Za točke $(0, f(0))$, $(1, f(1))$, $(3, f(3))$ i $(5, f(5))$ odredite interpolacijski polinom $P(x)$. Izračunajte $P(2)$.

2. Procijenite apsolutnu pogrešku koja nastaje pri izračunavanju vrijednosti funkcije

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2} - x^x + 200,$$

ako je $x = 100 \pm 1$.

3. S točnošću $\epsilon = 10^{-4}$ koristeći Newtonovu metodu odredite jedno realno rješenje jednadžbe $f(x) = 0$, gdje je $f(x) = x^3 - 5x - 1$. Koristite kriterij zaustavljanja koji je naveden u osnovnom teoremu.

4. Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'' - 2y' + y = xe^{2x},$$

uz početne uvjete $y(0) = 1, y'(0) = 1$. Sve integrale osim onih koji su navedeni u osnovnim tablicama treba riješiti ručno.

5. Odredite QR dekompoziciju matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

6. Izračunajte

$$\|\mathbf{A}\|_1 \|\mathbf{A}^2\|_\infty - \|A^{-1}\|_2,$$

ako je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$