

MATEMATIČKA ANALIZA III

1. Zadana je jednačba $x^3 - 4x + 1 = 0$.

- Koliko realnih rješenja ima zadana jednačba?
- Za svako rješenje separirajte interval u kojem se nalazi. Svoje tvrdnje dokažite algebarski.
- Koristeći Newtonovu metodu s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$ odredite najveće rješenje jednačbe tako da za kriterij zaustavljanja koristite:

$$|\xi - x_n| \leq \frac{f(x_n)}{m_1}, \quad m_1 = \min_{x \in I} |f'(x)|.$$

Provjerite uvjet koji mora zadovoljavati početna aproksimacija da bi Newtonova metoda konvergirala.

2. Riješite diferencijalnu jednačbu

$$y'' + y' + y = (x + 1)e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Sve integrale osim onih koji su navedeni u osnovnim tablicama treba riješiti ručno.

3. Neka su $x = 1 \pm 0.001$, $y = 2 \pm 0.002$ i $z = 3 \pm 0.003$. Procijenite pogrešku koja nastaje prilikom izračunavanja vrijednosti funkcije

$$\psi(x, y, z) = x^2 + (x^2 - y^2) \ln(x^2 y \sqrt{z})$$

u točki $(1, 1, 1)$.

4. Zadani su podaci

$$\frac{x_i}{y_i} \left\| \begin{array}{c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 1 & 4 & 2 \end{array} \right\|.$$

Odredite sjecište parabole $y = x^2 - 5x + 6$ s pravcem koji najbolje aproksimira zadane podatke u smislu najmanjih kvadrata.

5. Zadana je matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte $\text{cond}_1(\mathbf{A})$, $\text{cond}_2(\mathbf{A})$ i $\text{cond}_\infty(\mathbf{A})$

6. Odredite LU, QR i singularnu dekompoziciju za matricu iz prethodnog zadatka.