

Odjel za matematiku

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku

Nediferencijabilna optimizacija

Zajednički poslijediplomski doktorski studij matematike

Domaće zadaće – dopuna

Zadatak 1. Zadano je m točaka $T_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, m$ u ravnini. Odredite podskupove $\pi_1, \dots, \pi_m \subset \mathbb{R}^2$ zadane s

$$\pi_j = \{X \in \mathbb{R}^2 : d(X, T_j) \leq d(X, T_i), \forall i = 1, \dots, m\}, \quad j = 1, \dots, m,$$

ako je za $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

- a) $d(X, Y) := d_2(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$
- b) $d(X, Y) := d_1(X, Y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|,$
- c) $d(X, Y) := d_\infty(X, Y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}.$

1. Kako izgledaju rubovi koji razdvajaju podskupove $\pi_1, \dots, \pi_m$?
2. Pokušajte najprije riješiti problem za $m = 2$ i $m = 3$ i izraditi odgovarajuće crteže.
3. Možete li se nešto reći za proizvoljni $m \in \mathbb{N}$?

Uputa: Za euklidsku razdaljinsku funkciju d_2 radi se o tzv. Voronoievim dijagramima. Konzultirajte takodjer raspoloživu literaturu i Zadatak 20 koji ste rješavali.

Zadatak 2. Označimo: $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\mathbb{R}_{++} = \langle 0, +\infty \rangle$. Neka je $d_{\varphi_1} : \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_{++}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$,

$$d_{\varphi_1}(x, y) = \sum_{j=1}^n \left(x_j \ln \frac{x_j}{y_j} + y_j - x_j \right), \quad (1)$$

gdje su $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ i $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_{++}^n$. Odredite centroid skupa $\mathcal{A} = \{a^i = (a_1^i, \dots, a_n^i) : i = 1, \dots, m\} \subset \mathbb{R}_{++}^n$ u smislu kvazimetričke funkcije d_{φ_1} , tako da bude

$$c(\mathcal{A}) = \operatorname{argmin}_x \sum_{a \in \mathcal{A}} d_{\varphi_1}(x, a).$$

Zadatak 3. Označimo: $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\mathbb{R}_{++} = \langle 0, +\infty \rangle$. Neka je $d_{\varphi_2} : \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_{++}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$,

$$d_{\varphi_2}(x, y) = \sum_{j=1}^n \left(y_j \ln \frac{y_j}{x_j} + x_j - y_j \right). \quad (2)$$

gdje su $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_{++}^n$ i $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_+^n$. Odredite centroid skupa $\mathcal{A} = \{a^i = (a_1^i, \dots, a_n^i) : i = 1, \dots, m\} \subset \mathbb{R}_{++}^n$ u smislu kvazimetričke funkcije d_{φ_2} , tako da bude

$$c(\mathcal{A}) = \operatorname{argmin}_x \sum_{a \in \mathcal{A}} d_{\varphi_2}(x, a).$$

Zadatak 4. Označimo: $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Neka je $d_{\varphi_3} : \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$,

$$d_{\varphi_3}(x, y) = 2 \sum_{j=1}^n \left(\sqrt{x_j} - \sqrt{y_j} \right)^2, \quad (3)$$

gdje su $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_+^n$. Odredite centroid skupa $\mathcal{A} = \{a^i = (a_1^i, \dots, a_n^i) : i = 1, \dots, m\} \subset \mathbb{R}_+^n$ u smislu kvazimetričke funkcije d_{φ_3} , tako da bude

$$c(\mathcal{A}) = \operatorname{argmin}_x \sum_{a \in \mathcal{A}} d_{\varphi_3}(x, a).$$