

Odjel za matematiku

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku

Nediferencijabilna optimizacija

Poslijediplomski doktorski studij matematike

Domaće zadaće

Zadatak 1. Pokažite da ako je $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, konveksna funkcija, onda je njen nosač

$$L(f) = \{(a, b) : a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}, a^T x - b \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}^n\},$$

konveksan skup.

Zadatak 2. Neka je $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konveksna funkcija. Dokažite da vrijedi:

(i) ako je $\varphi(x) = f(x) + \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, onda $\varphi^*(\xi) = f^*(\xi) - \beta$;

(ii) ako je $\varphi(x) = f(x + \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$, onda $\varphi^*(\xi) = f^*(\xi) - \xi^T \alpha$;

(iii) ako je $\varphi(x) = f(\gamma x)$, $\gamma \neq 0$, onda $\varphi^*(\xi) = f^*\left(\frac{\xi}{\gamma}\right)$;

(iv) ako je $\varphi(x) = kf(x)$, $k > 0$, onda $\varphi^*(\xi) = kf^*\left(\frac{\xi}{k}\right)$.

(v) ako je $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $k, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0$, $k > 0$ i $\varphi(x) = kf(\gamma(x + \alpha)) + \beta$, čemu je jednako $\varphi^*(\xi)$?

Zadatak 3. Odredite konjugirane funkcije za funkcije

$$(a) \phi : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad \phi(x) = \begin{cases} -\ln x, & x > 0 \\ +\infty, & x \leq 0. \end{cases}, \quad (b) \phi : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad \phi(x) = e^x$$

$$(c) \phi : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad \phi(x) = \frac{1}{p}|x|^p, \quad 1 < p < +\infty, \quad (d) \phi : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad \phi(x) = -\ln(\cos x)$$

Zadatak 4. Za realne brojeve $a, b \geq 0$ vrijedi

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{1}$$

$$ab \leq e^a - b + b \ln b. \tag{2}$$

Ustanovite i dokažite kada u navedenim nejednakostima vrijedi jednakost.

Zadatak 5. Odredite Legendreovu transformaciju (dualnu funkciju) funkcije $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Koristeći dobiveni rezultat odredite također dualne funkcije sljedećih funkcija:

- (a) $\varphi(x) = f(x) + \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$ (b) $\varphi(x) = f(x + y)$, $y \in \mathbb{R}^2$
 (c) $\varphi(x) = f(\gamma x)$, $\gamma \neq 0$ (d) $\varphi(x) = kf(x)$, $k > 0$

Zadatak 6. Odredite Legendreovu transformaciju (dualnu funkciju) funkcije $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax$, gdje je A simetrična nesingularna matrica.

Zadatak 7. (Ortega and Rheinboldt (2000), str. 254) Pokažite da interpolacijski polinom drugog reda koji se s funkcijom $\varphi(\alpha) = f(x + \alpha p)$ podudara u tri različite točke u_1, u_2, u_3 ima oblik

$$\psi(\alpha) = \frac{(\alpha - u_2)(\alpha - u_3)}{(u_1 - u_2)(u_1 - u_3)} f_1 + \frac{(\alpha - u_1)(\alpha - u_3)}{(u_2 - u_1)(u_2 - u_3)} f_2 + \frac{(\alpha - u_1)(\alpha - u_2)}{(u_3 - u_1)(u_3 - u_2)} f_3,$$

gdje je $f_i = f(x + u_i p)$, $i = 1, 2, 3$. Pokažite također da ψ postiže lokalni minimum u točki

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{2} - \frac{(u_2^2 - u_3^2)f_1 + (u_3^2 - u_1^2)f_2 + (u_1^2 - u_2^2)f_3}{(u_2 - u_3)f_1 + (u_3 - u_1)f_2 + (u_1 - u_2)f_3}$$

ako je

$$\frac{2f_1}{(u_1 - u_2)(u_1 - u_3)} + \frac{2f_2}{(u_2 - u_1)(u_2 - u_3)} + \frac{2f_3}{(u_3 - u_1)(u_3 - u_2)} > 0.$$

Napišite izraze za ψ i $\bar{\alpha}$ za specijalne slučajeve: (a) $u_1 = 0, u_3 = 2u_2$, (b) $u_2 = 0, u_1 = -u_3$. Testirajte ovaj princip na nekoliko primjera uz primjenu gradijentne metode.

Zadatak 8. Neka je funkcional $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, G -diferencijabilan u nekoj točki $x^k \in \text{int}(D)$ i neka je $f'(x^k)p^k < 0$ za neki $p^k \in \mathbb{R}^n$.

Neka je nadalje $\varphi(\alpha) = f(x^k + \alpha p^k)$ i $t_1 > 0$. Poznavajući

$$q_0 = \varphi(0), \quad q'_0 = \varphi'(0), \quad q_1 = \varphi(t_1),$$

(uočite da je $q'_0 < 0$) odredite kvadratnu funkciju $q(t) = at^2 + bt + c$, tako da je

$$q(0) = q_0, \quad q'(0) = q'_0, \quad q(t_1) = q_1.$$

Uz koji uvjet se postiže minimum dobivene kvadratne funkcije q ? Odredite minimizator kvadratne funkcije q . Poznavajući ovu kvadratnu funkciju konstruirajte algoritam odabira duljine koraka α_k .

Zadatak 9. Dokažite da je svaka pozitivno definitna matrica $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regularna.

Zadatak 10. Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitivno definitna i simetrična matrica. Dokažite da je preslikavanje $s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zadano s $s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$ skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$.

Zadatak 11. Neka su $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_0 = [0, 0]^T$ i $r = 3$. Prikažite skup

$$K_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}_0, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_{\mathbf{A}} \leq r\}.$$

Zadatak 12. Neka je $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ te neka je $\{\mathbf{p}_j \in \mathbb{R}^n : j = 0, \dots, k-1\}$ skup $\mathbf{A}$ -konjugiranih vektora. Dokažite da su vektori $\mathbf{p}_j$, $j = 0, \dots, k-1$ linearno nezavisni.

Zadatak 13. Zadani su pozitivno definitna matrica $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, vektori $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ te $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Definiramo $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k$, $\alpha_k = -\frac{\mathbf{r}_k^T \mathbf{p}_k}{\mathbf{p}_k^T \mathbf{A} \mathbf{p}_k}$, $\mathbf{r}_k = \mathbf{A} \mathbf{x}_k - \mathbf{b}$, $k = 1, 2, \dots$. Pretpostavimo da su $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_k$ vektori dobiveni na sljedeći način

$$\mathbf{p}_0 = -\mathbf{r}_0, \quad \mathbf{p}_k = -\mathbf{r}_k + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\mathbf{p}_j^T \mathbf{A} \mathbf{r}_k}{\mathbf{p}_j^T \mathbf{A} \mathbf{p}_j} \mathbf{p}_j, \quad k = 1, 2, \dots$$

Dokažite da vrijedi

$$a) W_k := \text{span}\{\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_{k-1}\} = \text{span}\{\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{r}_{k-1}\}$$

$$b) \mathbf{r}_m^T \mathbf{r}_j = 0 \text{ za svaki } 0 \leq j < m \leq k$$

$$c) \mathbf{p}_k^T \mathbf{r}_j = -\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k \text{ za svaki } 0 \leq j \leq k$$

$$d) W_k = \text{span}\{\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{r}_0\}$$

Zadatak 14. Prilagodite metodu konjugiranih gradijenata za minimizaciju nelinearne funkcije, tako da koristite ideju modificirane Wolfove metode jednodimenzionalne minimizacije prema članku Yu et al (2009). Metodu ilustrirajte na primjerima različitih nelinearnih funkcija.

Zadatak 15. Općenito, broj elemenata partitivnog skupa, skupa S od m elemenata jednak je 2^m . Pokažite da je broj svih particija skupa S , koji zadovoljavaju uvjete

$$\bigcup_{i=1}^k \pi_i = S, \tag{3}$$

$$\pi_i \cap \pi_j = \emptyset, \quad i \neq j, \tag{4}$$

$$m_j := |\pi_j| \geq 1, \quad j = 1, \dots, k \quad (\text{broj elemenata podskupa } \pi_j), \tag{5}$$

jednak

$$|\Psi(S, k)| = \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^m. \tag{6}$$

Izračunajte broj svih particija skupa S zadanih s (3-5) specijalno za $m = 10, 50, 100, 1000$ i $k = 2, 3, 5, 8, 10$.

Zadatak 16. Ako je $\pi_j \in \Pi$ klaster, što je

$$(a) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{x_i \in \pi_j} \|x_i - x\|_1 ? \quad (b) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{x_i \in \pi_j} \|x_i - x\|_\infty ?$$

Zadatak 17. Pokažite da je za $x \neq 0$, $xx^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrična matrica ranga 1.

Zadatak 18. Neka je $\Psi(S, k)$ skup svih particija skupa $S = \{x_i \in \mathbb{R}^n : i = 1, \dots, m\}$ koje zadovoljavaju (3–5) i neka su c_j , $j = 1, \dots, k$ centriodi klastera π_j , $j = 1, \dots, k$.

Pokažite da tada vrijedi

$$F(\Pi^{(o)}) = \min_{\Pi \in \Psi(S, k)} \sum_{j=1}^k \sum_{x_i \in \pi_j} \|x_i - c_j\|^2 = \min_{\Pi \in \Psi(S, k)} \sum_{j=1}^k \frac{1}{m_j} \sum_{x_s \in \pi_j} \sum_{x_i \in \pi_j, i > s} \|x_i - x_s\|^2.$$

Zadatak 19. Neka je $S = \{x_i \in \mathbb{R}^n : i = 1, \dots, m\}$ osnovni skup, $k = 2$, $\Pi = \{\pi_1, \pi_2\}$, $m_1 = |\pi_1|$, $m_2 = |\pi_2|$, a $c_1, c_2, \bar{x}$ redom centriodi klastera π_1, π_2 i centroid skupa S . Pokažite da je u tom slučaju Varianzkriterium ekvivalentan sljedećem:

$$\max_{\Pi \in \mathcal{P}(S, 2)} \Phi(\pi_1, \pi_2), \quad \Phi(\pi_1, \pi_2) = \frac{m_1 m_2}{m} \|c_1 - c_2\|^2.$$

Ako je nadalje, (π_1^o, π_2^o) neka optimalna particija i $m_2 > 1$, onda članovi klastera π_2 leže u kugli zadanoj s

$$x_i \in \pi_2^o \Leftrightarrow \left\| x_i - \left(\bar{x} - \frac{m_1 m_2}{m} (c_1 - c_2) \right) \right\|^2 \leq \frac{m_1 m_2 (m_1 + 1) (m_2 - 1)}{m^2} \|c_1 - c_2\|^2.$$

Možete li na osnovi ovoga konstruirati neki specijalni algoritam za traženje optimalne dvočlane particije?

Zadatak 20. (Teorem o razdvajanju) Neka su π_p, π_q dva različita klastera optimalne k -means partition s pripadnim centroidima c_p, c_q . Pokažite da je hiperravnina koja razdvaja ova dva klastera zadana s

$$\left(x - \frac{1}{2}(c_q + c_p) \right)^T (c_q - c_p) = 0 \quad (7)$$

Uputa. Skup svih točaka $x \in \mathbb{R}^n$ jednako udaljenih od točaka c_p i c_q zadan je s

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - c_q\| = \|x - c_p\|\}.$$

Prije toga dokažite identitet

$$\|c_q\|^2 - \|c_p\|^2 = (c_q - c_p)^T (c_q + c_p).$$

Zadatak 21. k -means algorithm (Minimaldistanzverfahren) u nekim slučajevima ne daje optimalnu particiju, a može dovesti i do toga da neki od klastera C_j^μ bude prazan skup. Konstruirajte primjere koji će potvrditi ove tvrdnje. Kako u tom slučaju treba prilagoditi k -means algorithm?

Zadatak 22. *Odredite*

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} g(x), \quad \text{gdje je} \quad g(x) = p\|c(A) - x\|^2 + q\|c(B) - x\|^2.$$

Zadatak 23. *Dokažite sljedeći teorem metodom matematičke indukcije.*

Teorem 1. *Ako je $\Pi = \pi_1 \cup \dots \cup \pi_k$, uz $m_j = |\pi_j|$ i ako je $c_j = c(\pi_j)$, $j = 1, \dots, k$, onda*

$$c(\Pi) = \frac{m_1}{m}c_1 + \dots + \frac{m_k}{m}c_k, \quad m = m_1 + \dots + m_k.$$

Ako je $\pi_i \cap \pi_j = \emptyset$, za $i \neq j$, onda

$$F(\Pi) = \sum_{j=1}^k f(\pi_j) + \sum_{j=1}^k m_j \|c - c_j\|^2, \quad \text{odnosno,}$$

$$\sum_{i=1}^m \|c(\Pi) - x_i\|^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{x_i \in \pi_j} \|x_i - c_j\|^2 + \sum_{j=1}^k m_j \|c(\Pi) - c_j\|^2.$$

Zadatak 24. *Pokažite da ako klasteru π_j dodamo neki novi element $\hat{a} \notin \pi_j$, dobijemo novi klaster $\hat{\pi}_j = \pi_j \cup \{\hat{a}\}$ za koji vrijedi:*

$$(i) \quad c(\hat{\pi}_j) = \frac{1}{m_j+1}(m_j c(\pi_j) + \hat{a}),$$

$$(ii) \quad \text{tr } W(\hat{\pi}_j) = \text{tr } W(\pi_j) + \frac{m_j}{m_j+1} \|\hat{a} - c(\pi_j)\|^2.$$

Uputa: najprije izračunajte:

$$(a) \quad x_i - c(\hat{\pi}_j) = (x_i - c(\pi_j)) + (c(\pi_j) - c(\hat{\pi}_j))$$

$$= (x_i - c(\pi_j)) + \frac{1}{m_j+1}(c(\pi_j) - \hat{a}), \quad \forall x_i \in S,$$

$$(b) \quad (x_i - c(\hat{\pi}_j))(x_i - c(\hat{\pi}_j))^T = (x_i - c(\pi_j))(x_i - c(\pi_j))^T + \frac{2}{m_j+1}(x_i - c(\pi_j))(c(\pi_j) - \hat{a})$$

$$+ \frac{1}{(m_j+1)^2}(c(\pi_j) - \hat{a})(c(\pi_j) - \hat{a})^T.$$

Zadatak 25. *Pokažite da ako klasteru π_j , $m_j > 1$ oduzmemo neki njegov element $\hat{a} \in \pi_j$, dobivamo novi klaster $\hat{\pi}_j = \pi_j \setminus \{\hat{a}\}$, za koji vrijedi:*

$$(i) \quad c(\hat{\pi}_j) = \frac{1}{m_j-1}(m_j c(\pi_j) - \hat{a}),$$

$$(ii) \quad \text{tr } W(\hat{\pi}_j) = \text{tr } W(\pi_j) - \frac{m_j}{m_j-1} \|\hat{a} - c(\pi_j)\|^2.$$

Zadatak 26. *Kontraprimjerom pokažite da ni korigirani k-means clustering algorithm nužno ne dovodi do optimalne LS particije.*

Treći dio: Kombinatorijalni algoritmi za rješavanje covering/packing linearnih programa

Zadatak 27 (Teorem o slaboj dualnosti). *Neka su $x \in \mathbb{R}^n$ i $y \in \mathbb{R}^m$ dopustiva rješenja za primalni*

$$\max_{Ax \leq b, x \geq 0} c^t x$$

i njemu dualni

$$\min_{A^t y \geq c, y \geq 0} b^t y$$

LP problem. Pokažite da vrijedi

$$c^t x \leq b^t y.$$

Zadatak 28 (Teorem o jakoj dualnosti). *Neka su $x^* \in \mathbb{R}^n$ i $y^* \in \mathbb{R}^m$ optimalna rješenja za primalni i njemu dualni LP problem. Pokažite da vrijedi*

$$c^t x^* = b^t y^*.$$

Zadatak 29. *U analizi pohlepnog algoritma za računanje pokrivača skupova postavili smo vrijednosti dualne varijable*

$$y_e = \rho_S r_e, \tag{8}$$

za svaki još ne pokriveni $e \in S$ ($r_e = 1$), gdje smo ρ_S definirali kao

$$\rho_S = \frac{c_S}{\sum_{e \in S} r_e}.$$

Prisjetite se da je intuicija iza pridruživanja (8) pravilno rasporediti težinu izabranog skupa na sve nove pokrivenne točke koje izabrani skup pokriva.

Pokažite da po završetku pohlepnog (greedy) algoritma vrijedi

$$\sum_{S \in H} x_S c_S = \sum_{e \in U} y_e.$$

Zadatak 30. *Konstruirajte primjer tako da pohlepni algoritam prezentiran na predavanju za računanje pokrivača uistinu vrati pokrivač težine najmanje $H_n \cdot OPT$, gdje H_n označava n -ti harmonijski broj, a OPT težinu optimalnog rješenja.*

Literatura

M. Alić, G. Nogo, *Optimizacija: Uvod u teoriju nužnih i dovoljnih uvjeta ekstrema*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2004.

M. Avriel, *Nonlinear Programming: Analysis and Methods 2ed.*, Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 2003.

- M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, C. M. Shetty, *Nonlinear Programming. Theory and Algorithms. 3rd Edition*, Wiley, New Jersey, 2006.
- J. F. Bonnans, J. C. Gilbert, C. Lemaréchal, C. A. Sagastizábal, *Numerical Optimization. Theoretical and Practical Aspects*, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- S. Boyd, L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, New York, 2004.
- В. Ф. Демьянов, Ф. П. Василев, Недифференцируемая оптимизация, Наука, Москва, 1981.
- J. E. Dennis, Jr, R. B. Schnabel, *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, SIAM, Philadelphia, 1996.
- J. E. Dennis Jr., J. J. More, *Quasi-Newton methods, motivation and theory*, SIAM Review, **19**(1977), 46-89.
- W. Fenchel, *On conjugate convex function*, Canadian Journal of Mathematics **1**(1949) 73–77
- P. E. Gill, W. Murray and M. H. Wright, *Practical Optimization*, Academic Press, 1981.
- J. B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal, *Fundamentals of Convex Analysis*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg, 2001.
- F. Jare, J. Stoer, *Optimierung*, Springer-Verlag, Berlin, 2004
- Ж. П. Обен, Нелинейный анализ и его экономические приложения, Мир, Москва, 1988.
- J. M. ORTEGA, W. C. RHEINBOLDT, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, SIAM, Philadelphia, 2000. (postoji i ruski prijevod)
- A. Ruszczyński, *Nonlinear Optimization*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2006
- N. Z. Shor, *Nondifferentiable Optimization and Polynomial Problems*, Kluwer, London, 1998.
- Р. Г. Стронгин, Численные методы в многоэкстремальных задачах, Наука, Москва, 1978.
- Gaohang Yu, Lutai Guan, Zengxin Wei, *Globally convergent Polak–Ribière–Polyak conjugate gradient methods under a modified Wolfe line search*, Applied Mathematics and Computation, **215** (2009), 3082–3090

- Ф. П. Василев, Лекции по методам решения экстремальных задач, Издательство Московского университета, Москва, 1974.
- S. Zlobec, J. Petrić, *Nelinearno programiranje*, Naučna knjiga, Beograd, 1989.
- M. S. Aldenderfer, R. K. Blashfield, *Cluster analysis*, Sage, Newbury Park, 1984.
- P. Bose, A. Maheshwari, P. Morin, *Fast approximations for sum of distances, clustering and the Fermat–Weber problem*, Computational Geometry **24**(2003) 135–146
- B. S. Everitt, S. Landau, M. Leese, *Cluster analysis*, Wiley, London, 2001. (OM)
- G. Gan, C Ma, J. Wu, *Data clustering : theory, algorithms, and applications*, SIAM, Philadelphia, 2007. (OM)
- J. A. Hartigan, *Clustering Algorithms*, Wiley, 1975.
- L. Kaufman, P. J. Rousseeuw, *Finding groups in data : an introduction to cluster analysis*, John Wiley & Sons, Hoboken, 2005. (OM)
- J. Kogan, *Introduction to Clustering Large and High-Dimensional Data*, Cambridge University Press, 2007.
- K. Jajuga, A. Sokolowski, H. H. Bock, *Classification, clustering and data analysis*, Springer, Berlin, 2002. (OM)
- D. MacKay, *Information Theory, Inference and Learning Algorithms*, Chapter 20. An Example Inference Task: Clustering, Cambridge University Press, 2003, pp. 284–292
- P. Papić, *Uvod u teoriju skupova*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2000.
- J. Reese, *Solution methods for the p-median problem: an annotated bibliography*, Networks, Wiley, 2006, 125–142, Takodjer (InterScience www.interscience.wiley.com)
- H. C. Romesburg, *Cluster analysis for researchers*, Lulu Press, Nort Carolina, 2004. (OM)
- H. Späth, *Cluster–Formation und- Analyse*, R. Oldenburg Verlag, München, 1983.
- H. Späth, *Clusterwise linear least absolute deviations regression*, Computing **37**(1986) 371–378
- R. Swiniarski, K. Cios, W. Pedrycz, Witold, *Data mining methods for knowledge discovery*, Kluwer Academic, 1998.
- Stella X. Yu, Jianbo Shi, Multiclass Spectral Clustering (članak i slides)

Inderjit S. Dhillon, Yuqiang Guan and J. Kogan, Iterative Clustering of High Dimensional Text Data Augmented by Local Search

Hongyuan Zha, Xiaofeng He, Chris Ding, Horst Simon, Ming Gu, Spectral Relaxation for K-means Clustering

Bertsimas, D. , Tsitsiklis, J. N. *Introduction to linear optimization*, Athena Scietific, Belmont, 1997.

Eisenbrand, Funke, Garg, Koenemann *A Combinatorial Algorithm for Computing a Maximum Independent Set in a t -perfect Graph* , 14th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA) 2003, Baltimore

Vijay V. Vazirani, *Approximation Algorithms*, Springer, 2001.