

Odjel za matematiku

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku

Zajednički sveučilišni poslijediplomski doktorski studij matematike

Neki specijalni optimizacijski problemi

R.Scitovski, D.Matijević, K.Sabo

Domaće zadaće

Zadatak 1. *Napišite detaljan algoritam za globalnu optimizaciju Lipschitzove funkcije $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uz primjenu metode slomljenih pravaca (33) i odgovarajući kompjuterski program. Program testirajte na nekoliko primjera.*

Zadatak 2. *Napišite detaljan algoritam za globalnu optimizaciju Lipschitzove funkcije $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uz primjenu Shubertove metode (28) i odgovarajući kompjuterski program. Program testirajte na nekoliko primjera.*

Zadatak 3. *Napišite detaljan algoritam za globalnu optimizaciju Lipschitzove funkcije $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uz primjenu **DIRECT** metode (28) i odgovarajući kompjuterski program. Program testirajte na nekoliko primjera.*

Zadatak 4. *Zadani su realni brojevi $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}$, $m \geq 1$ i funkcija $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ (36),*

$$\Phi(t) = \max_i (y_i - t)^2.$$

Je li funkcija Φ Lipschitzova? Ako je, pokušajte odrediti Lipschitzovu konstantu L .

Za podatke 90, 93, 86, 92, 95, 83, 75, 40, 88, 80 definirajte funkciju Φ i pronadite njezin globalni minimum.

Zadatak 5. *Pokažite da je svaka metrika $d_p: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, $1 \leq p \leq \infty$ zadana s $d_p(x, y) = \|x - y\|_p$ kvazimetrička funkcija odnosno da zadovoljava svojstva:*

- 1) $d(x, y) \geq 0$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ i $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- 2) Za svaki $y \in \mathbb{R}^n$, funkcija $x \mapsto d(x, y)$ je konveksna na $\mathbb{R}^n$.
- 3) Za svaki $y \in \mathbb{R}^n$ vrijedi $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} d(x, y) = +\infty$.

Zadatak 6. *Neka je funkcija $\phi: S \rightarrow \mathbb{R}$ konveksna na konveksnom skupu $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Pokažite da je ϕ neprekidna na S .*

Zadatak 7. Pretpostavimo da je zadan klaster $\pi_j \subseteq \mathbb{R}^n$. Odredite formule za centar klastera u smislu kvazimetričke funkcije $d_{LS} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, $d_{LS}(x, y) = \|x - y\|_2^2$ te metrika $d_\infty, d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ redom zadanih s $d_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty$ i $d_1(x, y) = \|x - y\|_1$.

Zadatak 8. Neka je $d_\phi : \text{int}(S) \times S \rightarrow \mathbb{R}_+$, gdje je $S \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup, neka Bregmanova divergencija. Pokažite da je funkcija $x \mapsto d_\phi(x, y)$ konveksna, dok $y \mapsto d_\phi(x, y)$ ne mora nužno biti konveksna.

Zadatak 9. Ako su $c_1, c_2 > 0$, $c_1 < c_2$, pokažite da je

$$a) \frac{c_2 - c_1}{\ln c_2 - \ln c_1} \in (c_1, c_2);$$

$$b) \frac{c_2 - c_1}{\ln c_2 - \ln c_1} \leq \frac{c_1 + c_2}{2}.$$

Zadatak 10. Neka su a_i , $i = 1, \dots, m$ pozitivni realni brojevi. Dokažite da je

$$\min\{a_i : i = 1, \dots, m\} \leq H \leq G \leq A \leq K \leq \max\{a_i : i = 1, \dots, m\},$$

gdje su

$$H = \frac{m}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_m}}, \quad G = (a_1 \cdots a_m)^{1/m},$$

$$A = \frac{a_1 + \dots + a_m}{m}, \quad K = \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_m^2}{m}}.$$

Zadatak 11. Izvedite Bregmanovu divergenciju d_ϕ za funkciju $\phi : \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(x) = x \ln x$. Pretpostavimo da su zadani podaci $\mathcal{A} = \{a_i : i = 1, \dots, m\} \subseteq (0, \infty)$. Za ovu divergenciju riješite probleme separiranja i određivanje centara. Odnosno ako su zadani centri $c_1 < \dots < c_k$, u smislu kvazimetričke funkcije d_ϕ odredite separatore između odgovarajućih klastera $\pi_1, \dots, \pi_k$ i obratno za zadane klastere u smislu kvazimetričke funkcije d_ϕ odredite odgovarajuće centre $c_1, \dots, c_k$. Usporedite dobivene separatore i centre sa separatorima i centrima dobivenim u smislu kvazimetričke funkcije d_{LS} .

Zadatak 12. Izvedite Bregmanovu divergenciju d_ϕ za funkciju $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(x) = e^x$. Pretpostavimo da su zadani podaci $\mathcal{A} = \{a_i : i = 1, \dots, m\} \subseteq \mathbb{R}$. Za ovu divergenciju riješite probleme separiranja i određivanje centara. Odnosno ako su zadani centri $c_1 < \dots < c_k$, u smislu kvazimetričke funkcije d_ϕ odredite separatore između odgovarajućih klastera $\pi_1, \dots, \pi_k$ i obratno za zadane klastere u smislu kvazimetričke funkcije d_ϕ odredite odgovarajuće centre $c_1, \dots, c_k$. Usporedite dobivene separatore i centre sa separatorima i centrima dobivenim u smislu kvazimetričke funkcije d_{LS} .

Zadatak 13. Pretpostavimo da je zadan klaster $\pi_j \subset \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$. Izvedite formulu za centar $c_j = c(\pi_j)$ klastera π_j

$$c_j = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{a_i \in \pi_j} d_\phi(x, a_i),$$

gdje je d_ϕ generealizirana I-divergencija zadana s

$$d_\phi(x, y) = \sum_{i=1}^n x^{(i)} \ln \frac{x^{(i)}}{y^{(i)}} - \sum_{i=1}^n (x^{(i)} - y^{(i)}).$$

Literatura

- [1] M. Avriel, *Nonlinear Programming: Analysis and Methods 2ed.*, Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 2003.
- [2] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, C. M. Shetty, *Nonlinear Programming. Theory and Algorithms. 3rd Edition*, Wiley, New Jersey, 2006.
- [3] P. Bose, A. Maheshwari, P. Morin, *Fast approximations for sum of distances, clustering and the Fermat–Weber problem*, Computational Geometry **24**(2003), 135–146
- [4] Z. Bohte, *Numerično reševanje nelinearnih enačb*, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana, 1993.
- [5] L. Chiter, *New interpretation of the DIRECT algorithm*, Applied Mathematical Sciences **2**(2008), 529–543
- [6] R. Cupec, R. Grbić, K. Sabo, R. Scitovski, *Three points method for searching the best least absolute deviations plane*, Applied Mathematics and Computation, **215**(2009), 983–994
- [7] Ю. М. Данилин, Ц. А. Пиявский, Об одном алгоритме отыскания абсолютного минимума, Тп. семинара “Теория оптимальных решений”, Киев Изд-во АН УССР **2**(1967), 25-37.
- [8] В. Ф. Демянов, Ф. П. Василев, Недифференцируемая оптимизация, Наука, Москва, 1981.
- [9] J. E. Dennis, Jr, R. B. Schnabel, *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, SIAM, Philadelphia, 1996.
- [10] Inderjit S. Dhillon, Yuqiang Guan, J. Kogan, *Iterative Clustering of High Dimensional Text Data Augmented by Local Search*, 2005.
- [11] D. E. Finkel, *DIRECT optimization algorithm user guide*, 2003
- [12] D. E. Finkel, C. T. Kelley, *Convergence analysis of the DIRECT algorithm*, Optimization Online (2004)
- [13] D. E. Finkel, C. T. Kelley, *Additive scaling and the DIRECT algorithm*, Journal of Global Optimization **36**(2006), 597—608
- [14] C. A. Floudas, C. E. Gounaris, *A review of recent advances in global optimization*, Journal of Global Optimization **45**(2009), 3—38
- [15] R. Fletcher, *Practical Methods of Optimization*, Wiley, New York, 1987.

- [16] G. Gan, C Ma, J. Wu, *Data clustering: theory, algorithms, and applications*, SIAM, Philadelphia, 2007.
- [17] J. M. Gablonsky, C. T. Kelley, *A Locally-Biased form of the DIRECT Algorithm*, Journal of Global Optimization **21**(2001), 27—37
- [18] J. M. Gablonsky, *DIRECT version 2.0 user guide*, 2001
- [19] M. Gaviano, D. Lera, *A global minimization algorithm for Lipschitz functions*, Optimization Letters **2**(2008), 1—13
- [20] E. Gourdin, B. Jaumard, R. Ellaia, *Global Optimization of Holder Functions*, Journal of Global Optimization **8**(1996), 323–348
- [21] J. D. Griffin, T. G. Kolda, *Asynchronous parallel hybrid optimization combining DIRECT and GSS*, Optimization Methods and Software **25**(2010), 797–817
- [22] P. E. Gill, W. Murray and M. H. Wright, *Practical Optimization*, Academic Press, 1981.
- [23] E. Hansen, G. W. Walster, *Global optimization using interval analysis, Second Edition*, Marcel Dekker, 2004
- [24] P. Hansen, B. Jaumard, S.-H. Lu, *On Timonov’s algorithm for global optimization of univariate Lipschitz functions*, Journal of Global Optimization **1**(1991), 37–46
- [25] P. Hansen, B. Jaumard, S.-H. Lu, *On the number of iterations of Piyavskii’s global optimization algorithm*, Mathematics of Operations Research **16**(1991), 334–350
- [26] P. Hansen, B. Jaumard, S.-H. Lu, *Global optimization of univariate Lipschitz functions: I. Survey and properties*, Mathematical Programming **55**(1992), 251–272
- [27] P. Hansen, B. Jaumard, S.-H. Lu, *Global optimization of univariate Lipschitz functions: II. New algorithms and computational comparison*, Mathematical Programming **55**(1992), 273–292
- [28] D. R. Jones, C. D. Perttunen, B. E. Stuckman, *Lipschitzian optimization without the Lipschitz constant*, JOTA **79**(1993), 157–181
- [29] F. Jarre, J. Stoer *Optimierung*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2004.
- [30] J. Kogan, *Introduction to Clustering Large and High-Dimensional Data*, Cambridge University Press, 2007.
- [31] D. E. Kvasov, Y. D. Sergeyev, *A univariate global search working with a set of Lipschitz constants for the first derivative*, Optimization Letters **3**(2009), 303–318

- [32] J. M. Ortega, W. C. Rheinboldt, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic Press, New York, 1970.
- [33] С. А. Пиявский, Один алгоритм отыскания абсолютного экстремума функции, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* **12**(1972), 888–896.
- [34] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [35] J. Reese, *Solution methods for the p-median problem: an annotated bibliography*, Networks, Wiley, 2006, 125–142, Also (InterScience www.interscience.wiley.com)
- [36] P. J. Rousseeuw, A. M. Leroy, *Robust Regression and Outlier Detection*, Wiley, New York, 2003
- [37] K. Sabo, R. Scitovski, *The best least absolute deviations line – properties and two efficient methods*, ANZIAM Journal **50**(2008), 185–198
- [38] H. R. Schwarz, *Numerische Mathematik*, Teubner, Stuttgart, 1986.
- [39] Y. D. Sergeyev, D. Famularo, P. Pugliese, *Index branch-and-bound algorithm for Lipschitz univariate global optimization with multiextremal constraints*, Journal of Global Optimization **21**(2001), 317–341
- [40] B. Shubert, *A sequential method seeking the global maximum of a function*, SIAM Journal on Numerical Analysis, **9**(1972), 379–388
- [41] H. Späth, *Cluster-Formation und -Analyse*, R. Oldenburg Verlag, München, 1983.
- [42] J. Stoer, *Numerische Mathematik I*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [43] J. Stoer, R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [44] Р. Г. Стронгин, Численные методы в многоэкстремальных задачах, Наука, Москва, 1978.
- [45] Р. Г. Стронгин, Ф. П. Василев, —, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1984.
- [46] R. J. Vanderbei, *Extension of Piyavskii's algorithm to continuous global optimization*, Journal of Global Optimization **14**(1999), 205–216
- [47] Ф. П. Василев, Лекции по методам решения экстремальных задач, Издательство Московского университета, Москва, 1974.
- [48] G. R. Wood, B. P. Zhang, *Estimation of the Lipschitz constant of a function*, Journal of Global Optimization **8**(1996), 91–103

- [49] Hongyuan Zha, Xiaofeng He, Chris Ding, Horst Simon, Ming Gu, Spectral Relaxation for K-means Clustering, 2006.