

Odjel za matematiku

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku

Nediferencijabilna optimizacija

Poslijediplomski doktorski studij matematike

1 Konveksni skupovi i konveksne funkcije

Definicija 1. Kažemo da je skup $D \subseteq \mathbb{R}^n$ **konveksan** ako za bilo koje dvije točke $x_1, x_2 \in D$ sadrži i segment određen tim točkama, tj.

$$x_1, x_2 \in D \Rightarrow \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in D \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Definicija 2. Kažemo da je skup $D \subseteq \mathbb{R}^n$ **strogo konveksan** ako

$$x_1, x_2 \in D, \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in \text{Int } D \quad \forall \lambda \in (0, 1).$$

Neka svojstva konveksnih skupova:

- Konveksan skup $D \subseteq \mathbb{R}$ sadrži svaku konveksnu kombinaciju od konačno svojih točaka, tj.

$$(x_1, \dots, x_n \in D) \wedge \left(\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right) \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in D;$$

- Skup svih konveksnih kombinacija nekog skupa $D \subseteq \mathbb{R}^n$ je najmanji konveksni skup koji sadrži skup D i naziva se *konveksna ljuska* (*convex hull*).
- Presjek konveksnih skupova je konveksan skup;
- Ako su A, B konveksni skupovi, onda su i λA , $A + B$, $A - B$ konveksni skupovi.

1.1 Konveksne funkcije

Definicija 3. Kažemo da je funkcija $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ **konveksna** ako vrijedi

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad (1)$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ i $\forall \lambda \in [0, 1]$.

Definicija 4. Kažemo da je funkcija $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ **strogo (strictly) konveksna** ako $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad x \neq y$ vrijedi

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \quad \forall \lambda \in (0, 1). \quad (2)$$

Definicija 5. Kažemo da je funkcija $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ **jako (strongly) konveksna** ako postoji takav realni broj $\kappa > 0$ da vrijedi

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \kappa\lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda \in [0, 1]. \quad (3)$$

Primjedba 1. ako u (3) stavimo $\lambda = \frac{1}{2}$ i $\gamma = \frac{1}{4}\kappa$, onda možemo reći da je funkcija $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jako konveksna ako postoji $\gamma > 0$,

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(y)) - \gamma\|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \gamma > 0. \quad (4)$$

Iz Definicije 5 vidi se da je svaka jako konveksna funkcija ujedno i konveksna, ali obrat ne vrijedi (također vidi Primjer1 i Primjer2).

Primjer 1. Neka je $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ simetrični linearni operator. Tada je kvadratna forma $f(x) := \frac{1}{2}(\mathcal{A}x, x)$ konveksna funkcija onda i samo onda ako je $\mathcal{A} \geq 0$, tj. ako su sve svojstvene vrijednosti nenegativne – označimo ih s $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$. Kako je (Hiriart-Urruty and Lemaréchal, 2001; Jare and Stoer, 2004)

$$\lambda_n\|x\|^2 \leq (\mathcal{A}x, x) \leq \lambda_1\|x\|^2 \text{ za sve } x \in \mathbb{R}^n,$$

može se pokazati da vrijedi

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \frac{1}{2}\lambda_n\lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2$$

Dakle, ako je $\mathcal{A}$ pozitivno definitan ($\lambda_n > 0$), f je jako konveksna funkcija.

Primjer 2. Funkcija $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ je jako konveksna funkcija, a funkcija $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x_1, x_2) = x_1^2$ je konveksna, ali nije jako konveksna ($\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$). Kako izgledaju plohe ovih funkcija?

Definicija 6. $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$P(f) = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}, f(x) \leq \alpha\} \quad - \text{epigraf} \quad (5)$$

$$Q(g) = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}, g(x) \geq \alpha\} \quad - \text{hypograf} \quad (6)$$

- Funkcija f je konveksna $\Leftrightarrow P(f)$ konveksan skup;
- Funkcija g je konkavna $\Leftrightarrow Q(g)$ konveksan skup;
- Funkcija g je konkavna $\Leftrightarrow (-g)$ konveksna;

Primjedba 2. Ako je $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konveksna funkcija na $D \subseteq \mathbb{R}^n$, onda se uvijek može definirati konveksno proširenje $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D \\ +\infty, & x \notin D \end{cases}.$$

Tada je $P(\tilde{f}) = P(f)$. Skup $ED(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < +\infty\}$ zvat ćemo **efektivna domena** funkcije f . Nadalje, ako nije posebno navedeno, promatrat ćemo konveksne funkcije $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Svojstva:

- $f_1, \dots, f_n$ konveksne funkcije, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$ konveksna funkcija;
- f konveksna na $\mathbb{R}^n$, Ψ neopadajuća i konveksna na $\mathbb{R} \Rightarrow \Psi \circ f$ konveksna na $\mathbb{R}^n$;
- $f_1, \dots, f_n$ konveksne funkcije $\Rightarrow \sup_i f_i(x)$ konveksna funkcija;
- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konveksna na $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}^n$, funkcija $\phi(\lambda) = f(\lambda x + (1 - \lambda)y)$ konveksna na $[0, 1]$ (Avriel, 2003);
- Ako je $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveksna funkcija na konveksnom skupu D , onda je ona neprekidna na $\text{int } D$ (Avriel, 2003; Bazaraa et al., 2006).

Primjer 3. Funkcija $\phi : \mathbb{R} \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ je konveksna, ali nije neprekidna.

$$\phi(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ +\infty, & x > 1 \end{cases}$$

Definicija 7. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, konveksna funkcija

$$L(f) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^{n+1} : a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}, a^T x - b \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}^n\} \quad - \text{ nosač-support} \quad (7)$$

$$\text{cl } f(x) = \sup_{(a,b) \in L(f)} \{a^T x - b\} \quad - \text{ zatvarač konveksne funkcije} \quad (8)$$

$$S_\alpha(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \alpha\} \quad - \text{ nivo skup - level set} \quad (9)$$

Primjedba 3. Iz definicije funkcije $\text{cl } f$ slijedi: $\text{cl } f(x) \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$. Specijalno, zatvarač funkcije iz Primjera 3 je

$$\text{cl } \phi(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 1 \\ +\infty, & x > 1 \end{cases}$$

Primijetite da je specijalno $\text{cl } \phi(1) = 0$.

Vrijedi također $P(\text{cl } f) = \overline{P(f)}$.

Zadatak 1. Pokažite da ako je $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, konveksna funkcija, onda je $L(f)$ konveksan skup.

Definicija 8. Subgradijent konveksne funkcije $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ u točki $x_0 \in \mathbb{R}^n$ je svaki vektor $\xi \in \mathbb{R}^n$ koji zadovoljava¹

$$f(x) \geq f(x_0) + \xi^T(x - x_0), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Skup svih subgradijenata konveksne funkcije $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ u točki $x_0 \in \mathbb{R}^n$ zovemo **Subdiferencijal** i označavamo ga s $\partial f(x_0)$. Skup $\partial f(x_0)$ je neprazan ograničen, konveksan i zatvoren (Demjanov and Vasilev, 1981; Oben, 1988; Shor, 1998).

Primjedba 4. Za subgradijent $\xi \in \mathbb{R}^n$ uvijek se može pronaći $\hat{b} \in \mathbb{R}$, takav da bude $(\xi, \hat{b}) \in L(f)$. Naime, ako stavimo $\hat{b} \geq \xi^T x_0 - f(x_0)$, tada je

$$h(x) = \xi^T x - \hat{b} \leq \xi^T x - \xi^T x_0 + f(x_0) = \xi^T(x - x_0) + f(x_0) \leq f(x).$$

Definicija 9. Funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ je diferencijabilna u točki $x_0 \in \text{int } D$ u smjeru $\eta \in D$ ako postoji²

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial \eta} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{\epsilon} (f(x_0 + \epsilon \eta) - f(x_0))$$

Teorem 1. Konveksna funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ za proizvoljni $x_0 \in \text{int } D$ ima derivaciju $\frac{\partial f(x_0)}{\partial \eta}$ u bilo kojem smjeru $\eta \in D$ i vrijedi ((Demjanov and Vasilev, 1981; Oben, 1988; Shor, 1998))

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial \eta} = \max_{\xi \in \partial f(x_0)} \xi^T \eta \quad (10)$$

- Ako je $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konveksna funkcija na konveksnom skupu D , onda je svaki lokalni minimum ujedno i globalni minimum na D (Avriel, 2003);
- Ako je $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konveksna funkcija, onda je i $S_\alpha(f)$ konveksan skup, ali obrat ne vrijedi;
- Ako je $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konveksna funkcija, onda je $0 \in \partial f(x^*) \Leftrightarrow$ ako je x^* globalni minimum funkcije f ; Ako je $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konveksna i diferencijabilna funkcija, onda je $\nabla f(x^*) = 0 \Leftrightarrow$ ako je x^* globalni minimum funkcije f ;
- Ako u nekom smjeru η konveksna funkcija f opada, onda u suprotnom smjeru $(-\eta)$ raste.

¹Može se dogoditi da takav vektor $\xi \in \mathbb{R}^n$ ne postoji, da postoji jedan jedini i da postoji više njih.

²Derivaciju funkcije f u točki x_0 u smjeru η u literaturi se još označava s: $Df(x_0, \eta)$ ili s $f'_\eta(x_0)$.

Neka je $\frac{\partial f(x_0)}{\partial \eta} = -a < 0$ i neka je

$$\xi_0 \in \partial f(x_0), \quad \text{takav da je prema Teoremu 1} \quad \frac{\partial f(x_0)}{\partial \eta} = \max_{\xi \in \partial f(x_0)} \xi^T \eta =: \xi_0^T \eta.$$

Tada u smjeru $u = -\eta$ prema Teoremu 1 imamo

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial u} = \max_{\xi \in \partial f(x_0)} \xi^T u \geq \xi_0^T u = -\xi_0^T \eta = -\frac{\partial f(x_0)}{\partial \eta} = a > 0.$$

2 Konjugirane (dualne) funkcije

Neka je $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konveksna funkcija. Za dani vektor $\xi \in \mathbb{R}^n$ treba odrediti parametar $b \in \mathbb{R}$ affine funkcije $h(x) = \xi^T x - b$, tako da bude $h(x) \leq f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

$$b \geq \xi^T x - f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Dakle, $b \geq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\xi^T x - f(x)\}$.

Definicija 10. Neka je $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konveksna funkcija. Funkciju $f^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$,

$$f^*(\xi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\xi^T x - f(x)\}, \quad (11)$$

zovemo **konjugirana (dualna) funkcija** funkcije f u točki $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Primjedba 5. Primijetite da je za dani vektor $\xi \in \mathbb{R}^n$ i promatranu afinu funkciju $h(x) = \xi^T x - b$, vrijedi $b \geq f^*(\xi)$.

- **Geometrijsko značenje:**

Najviša moguća pozicija grafa affine funkcije $h(x) = \xi^T x - b$ ispod grafa funkcije $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ dobije se za $b = f^*(\xi)$.

Tada je $h(0) = -f^*(\xi)$, a h nikad ne prima vrijednost $-\infty$.

- **Ekonomsko značenje:**

Neka je $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ trošak proizvodnje x_i komada proizvoda P_i , $i = 1, \dots, n$, pri čemu su ξ_i odgovarajuće cijene proizvoda P_i .

Treba odrediti količine $x_1^*, \dots, x_n^*$ komada proizvoda $P_1, \dots, P_n$, za koje će profit biti maksimalan, tj.

$$\sum_{i=1}^n \xi_i x_i - f(x) \rightarrow \max \quad R : \quad \sum_{i=1}^n \xi_i x_i^* - f(x^*) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \sum_{i=1}^n \xi_i x_i - f(x) \right\} = f^*(\xi)$$

Teorem 2. (Fenchel, Moreau) Ako je $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konveksna funkcija, onda je njena konjugirana (dualna) funkcija f^* također konveksna i vrijedi

$$(i) \quad P(f^*) = L(f), \quad (ii) \quad f^{**} = \text{cl } f.$$

Dokaz. Vrijedi

$$\begin{aligned}
P(f^*) &= \{(\xi, \alpha) : \xi \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}, f^*(\xi) \leq \alpha\} \\
&= \{(\xi, \alpha) : \xi \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}, \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\xi^T x - f(x)\} \leq \alpha\} \\
&= \{(\xi, \alpha) : \xi \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}, \xi^T x - f(x) \leq \alpha, \forall x \in \mathbb{R}^n\} \\
&= \{(\xi, \alpha) : \xi \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}, \xi^T x - \alpha \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}^n\} = L(f)
\end{aligned}$$

Kako je $P(f^*)$ konveksan skup (Zadatak 1), onda je i f^* konveksna funkcija.

Kako je $f^{**} = (f^*)^*$, vrijedi

$$\begin{aligned}
f^{**}(x) &= (f^*)^*(x) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \{\xi^T x - f^*(\xi)\} \\
&= \sup_{\{(\xi, \alpha^*) : f^*(\xi) \leq \alpha^*\}} \{\xi^T x - \alpha^*\} \quad (\text{prema Primjedbi 5}) \\
&= \sup_{\{(\xi, \alpha^*) : \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{\xi^T y - f(y)\} \leq \alpha^*\}} \{\xi^T x - \alpha^*\} \\
&= \sup_{\{(\xi, \alpha^*) : \xi^T y - \alpha^* \leq f(y), \forall y \in \mathbb{R}^n\}} \{\xi^T x - \alpha^*\} \\
&= \sup_{(\xi, \alpha^*) \in L(f)} \{\xi^T x - \alpha^*\} \\
&= \text{cl } f(x)
\end{aligned}$$

□

Primjedba 6. Ako je f konveksna funkcije, tada prema je Fenchel-Moreau teoremu i f^* konveksna funkcija. Nadalje, to znači da je i f^{**} konveksna funkcija, a kako je $f^{**} = \text{cl } f$, onda je i $\text{cl } f$ konveksna funkcija. Također lako se vidi da vrijedi $L(f^*) = P(f^{**}) = P(\text{cl } f)$.

Teorem 3. *Ako je $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konveksna funkcija, onda je f^* zatvorena konveksna funkcija, tj. vrijedi $\text{cl } f^* = f^*$.*

Dokaz. Kako je (Primjedba 3) $\text{cl } f(x) \leq f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, slijedi

$$\begin{aligned}
\xi^T x - \text{cl } f(x) &\geq \xi^T x - f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \\
\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\xi^T x - \text{cl } f(x)\} &\geq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\xi^T x - f(x)\} \\
\text{cl } f^*(\xi) &\geq f^*(\xi).
\end{aligned}$$

S druge strane prema istoj primjedbi je $\text{cl } f^*(\xi) \leq f^*(\xi)$, pa dakle, $\text{cl } f^* = f^*$. □

Svojstva konjugirane (dualne) funkcije:

Neka je $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konveksna funkcija. Tada

- (i) ako je $\varphi(x) = f(x) + \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, onda $\varphi^*(\xi) = f^*(\xi) - \beta$;
- (ii) ako je $\varphi(x) = f(x + \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$, onda $\varphi^*(\xi) = f^*(\xi) - \xi^T \alpha$;
- (iii) ako je $\varphi(x) = f(\gamma x)$, $\gamma \neq 0$, onda $\varphi^*(\xi) = f^*\left(\frac{\xi}{\gamma}\right)$;
- (iv) ako je $\varphi(x) = kf(x)$, $k > 0$, onda $\varphi^*(\xi) = kf^*\left(\frac{\xi}{k}\right)$;

Dokaz. Neka je $f^*(\xi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\xi^T x - f(x)\}$

$$(i) \varphi^*(\xi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\xi^T x - (f(x) + \beta)\} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\xi^T x - f(x)\} - \beta = f^*(\xi) - \beta$$

...

□

Zadatak 2. Dokažite ostala svojstva.

Primjer 4. Treba odrediti konjugiranu funkciju za funkciju $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\phi(x) = a^T x - b$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$.

Potražimo najprije konjugiranu funkciju za jednostavniju funkciju $f(x) = a^T x$. Imamo

$$f^*(\xi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\xi^T x - a^T x\} = \begin{cases} 0, & \xi = a \\ +\infty, & \xi \neq a. \end{cases}$$

Dalje prema svojstvu (i) za funkciju $\phi(x) = a^T x - b$ vrijedi

$$\phi^*(\xi) = f^*(\xi) + b = \begin{cases} b, & \xi = a \\ +\infty, & \xi \neq a. \end{cases}$$

Primjer 5. Treba odrediti konjugiranu funkciju za funkciju $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\phi(x) = \frac{1}{2}x^T x$.

Potražimo najprije konjugiranu funkciju za jednostavniju funkciju $f(x) = x^T x$. Imamo

$$f^*(\xi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\xi^T x - x^T x\} = \frac{1}{4}\xi^T \xi.$$

Naime, maksimum funkcije $g(x) = \xi^T x - x^T x$ postiže se za $x_E = \frac{1}{2}\xi$, pri čemu je $g\left(\frac{1}{2}\xi\right) = \frac{1}{4}\xi^T \xi$. Zato je

$$\phi^*(\xi) = \frac{1}{2}f^*(2\xi) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}(2\xi)^T(2\xi)\right) = \frac{1}{2}\xi^T \xi.$$

Dakle, ovo je primjer funkcije koja se podudara sa svojom dualnom funkcijom.

Primjer 6. Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Treba odrediti konjugirane funkcije za sljedeće funkcije

$$\delta_D(x) = \begin{cases} 0, & x \in D \\ +\infty, & x \in \mathbb{R}^n \setminus D \end{cases} \quad (\text{indicator function})$$

$$\pi_D(x) = \sup_{\xi \in D} \xi^T x \quad (\text{support function})$$

Vrijedi

$$\begin{aligned}\delta_D^*(\xi) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\xi^T x - \delta_D(x)\} = \sup_{\xi \in D} \xi^T x = \pi_D(\xi), \\ \pi_D^*(\xi) &= \delta_D^{**}(\xi) = \delta_D(\xi).\end{aligned}$$

Zadatak 3. Odredite konjugirane funkcije za funkcije

$$\begin{aligned}(a) \phi : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad \phi(x) &= \begin{cases} -\ln x, & x > 0 \\ +\infty, & x \leq 0. \end{cases}, \quad (b) \phi : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad \phi(x) = e^x \\ (c) \phi : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad \phi(x) &= \frac{1}{p}|x|^p, \quad 1 < p < +\infty, \quad (d) \phi : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad \phi(x) = -\ln(\cos x)\end{aligned}$$

Teorem 4. Neka je $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konveksna funkcija. Tada je $\xi \in \partial f(x_0)$ onda i samo onda ako je $f^*(\xi) = \xi^T x_0 - f(x_0)$.

Dokaz. Prema Definiciji 8,

$$\begin{aligned}\xi \in \partial f(x_0) &\Leftrightarrow f(x) \geq f(x_0) + \xi^T(x - x_0), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow \xi^T x_0 - f(x_0) \geq \xi^T x - f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\ &\Leftrightarrow \xi^T x_0 - f(x_0) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\xi^T x - f(x)\} \\ &= f^*(\xi).\end{aligned}$$

□

Primjedba 7. Prema Teoremu 4 za konveksnu funkciju $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ vrijedi jednakost koju u literaturi (Demjanov and Vasilev, 1981) možemo naći pod nazivom *Youngov identitet*

$$f(x_0) + f^*(\xi) = \xi^T x_0. \quad (12)$$

Teorem 5. Neka je $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konveksna funkcija. Tada

(i) ako je $\xi \in \partial f(x_0)$, onda je $x_0 \in \partial f^*(\xi)$;

(ii) ako je $\text{cl } f = f$ i $x_0 \in \partial f^*(\xi)$, onda je $\xi \in \partial f(x_0)$.

Dokaz. Primijetimo najprije da prema prethodnom Teoremu 4 vrijedi

$$\xi \in \partial f(x_0) \Leftrightarrow f^*(\xi) = \xi^T x_0 - f(x_0), \quad (13)$$

$$x_0 \in \partial f^*(\xi) \Leftrightarrow f^{**}(x_0) = \xi^T x_0 - f^*(\xi) \quad (14)$$

(i) Neka je $\xi \in \partial f(x_0)$. Prema (13) vrijedi

$$f^*(\xi) = \xi^T x_0 - f(x_0).$$

Ako je $\partial f(x_0)$ neprazan, onda je (Avriel, 2003) $\text{cl } f(x_0) = f(x_0)$, a kako je prema Teoremu 2, $f^{**} = \text{cl } f$ koristeći (14) dobivamo

$$f^*(\xi) = \xi^T x_0 - f^{**}(x_0) \Rightarrow x_0 \in \partial f^*(\xi).$$

(ii) Neka je $\text{cl } f = f$ i $x_0 \in \partial f^*(\xi)$. Prema (14) i Teoremu 2 vrijedi

$$\begin{aligned} \xi^T x_0 - f^*(\xi) &= f^{**}(x_0) = \text{cl } f(x_0) = f(x_0) \\ \Rightarrow f^*(\xi) &= \xi^T x_0 - f(x_0) \Rightarrow \xi \in \partial f(x_0). \end{aligned}$$

□

Primjedba 8. Ako pretpostavimo da je $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ zatvorena konveksna funkcija, onda Teorem 4 i Teorem 5 sažeto možemo izraziti na sljedeći način (Demjanov and Vasilev, 1981):

Sljedeći uvjeti međusobno su ekvivalentni

$$\begin{aligned} (i) \quad & x_0 \in \partial f^*(\xi) \\ (ii) \quad & \xi \in \partial f(x_0) \\ (iii) \quad & f(x_0) + f^*(\xi) = \xi^T x_0 \end{aligned}$$

2.1 Nužni i dovoljni uvjeti minimuma

Korištenjem pojma konjugirane (dualne) funkcije jednostavno se mogu formulirati nužni i dovoljni uvjeti ekstrema konveksne zatvorene funkcije.

Najprije primijetimo da je po definiciji

$$f^*(0) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{-f(x)\} = - \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x),$$

odnosno

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = -f^*(0). \quad (15)$$

Dakle, funkcija f je ograničena odozdo onda i samo onda ako je 0 u domeni funkcije f^* . Skup svih minimuma funkcije f označimo s

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = -f^*(0)\} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} f(y)\}$$

Dakle, $x_0 \in \mathcal{D}$ onda i samo onda ako je

$$f(x_0) + f^*(0) = 0,$$

a to je prema Primjedbi 8 ispunjeno onda i samo onda ako $0 \in \partial f(x_0)$. Dakle zatvorena konveksna funkcija postiže globalni minimum u točki x_0 onda i samo onda ako $0 \in \partial f(x_0)$. Nadalje, prema Primjedbi 8 možemo pisati

$$\mathcal{D} = \partial f^*(0).$$

Možemo također reći da konveksna zatvorena funkcija f postiže globalni minimum onda i samo onda ako je subdiferencijal njene konjugirane funkcije f^* u nuli neprazan skup. (primjerice ako je $0 \in \text{int } ED(f^*)$ (Demjanov and Vasilev, 1981)).

Primjer 7. Neka je $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ i $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ konveksan zatvoren skup. Treba odrediti uvjetni subdiferencijal funkcije f na skupu Ω .

Najprije definiramo indicator function δ_Ω skupa Ω

$$\delta_\Omega(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega \\ +\infty, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

i definiramo novu funkciju $f_1 = f + \delta_\Omega$,

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega \\ +\infty, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases} ,$$

čija je efektivna domena skup Ω . Određivanje uvjetnog subdiferencijala funkcije f na skupu Ω na taj način svodi se na određivanje običnog subdiferencijala sume $f_1 = f + \delta_\Omega$, kod čega možemo iskoristiti tehniku konjugiranih funkcija.

2.2 Konjugirana (dualna) funkcija konkavne funkcije

Neka je $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konkavna funkcija. Tada definiramo

$$g^*(\xi) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{\xi^T x - g(x)\}. \quad (16)$$

Potražimo vezu s pripadnom konveksnom funkcijom $f = -g$. Vrijedi

$$\begin{aligned} f^*(\xi) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\xi^T x - f(x)\} \\ &= (f = -g) \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\xi^T x + g(x)\} \\ &= - \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{(-\xi)^T x - g(x)\} \\ &= -g^*(-\xi). \end{aligned}$$

2.3 Konjugirana (dualna) funkcija funkcije $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$

I u ovom slučaju f^* definiramo kao zatvorenu konveksnu funkciju

$$f^*(\xi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\xi^T x - f(x)\}.$$

Primijetimo da je to konjugirana funkcija najveće konveksne funkcije f_c , takve da je $f_c(x) \leq f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Tada je $f^{**} = f_c$.

Slično bi definirali i konjugiranu konkavnu funkciju prema (16).

Literatura

- M. Alić, G. Nogo, *Optimizacija: Uvod u teoriju nužnih i dovoljnih uvjeta ekstrema*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2004.
- M. Avriel, *Nonlinear Programming: Analysis and Methods 2ed.*, Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 2003.
- M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, C. M. Shetty, *Nonlinear Programming. Theory and Algorithms. 3rd Edition*, Wiley, New Jersey, 2006.
- J. F. Bonnans, J. C. Gilbert, C. Lemaréchal, C. A. Sagastizábal, *Numerical Optimization. Theoretical and Practical Aspects*, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- S. Boyd, L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, New York, 2004.
- В. Ф. Дем'янов, Ф. П. Василев, Недифференцируемая оптимизация, Наука, Москва, 1981.
- J. E. Dennis, Jr, R. B. Schnabel, *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, SIAM, Philadelphia, 1996.
- J. E. Dennis Jr., J. J. More, *Quasi-Newton methods, motivation and theory*, SIAM Review, **19**(1977), 46-89.
- W. Fenchel, *On conjugate convex function*, Canadian Journal of Mathematics **1**(1949) 73-77
- P. E. Gill, W. Murray and M. H. Wright, *Practical Optimization*, Academic Press, 1981.
- J. B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal, *Fundamentals of Convex Analysis*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg, 2001.
- F. Jare, J. Stoer, *Optimierung*, Springer-Verlag, Berlin, 2004

- Ж. П. Обен, Нелинейный анализ и его экономические приложения, Мир, Москва, 1988.
- J. M. ORTEGA, W. C. RHEINBOLDT, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, SIAM, Philadelphia, 2000. (postoji i ruski prijevod)
- A. Ruszczynski, *Nonlinear Optimization*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2006
- N.Z.Shor, *Nondifferentiable Optimization and Polynomial Problems*, Kluwer, London, 1998.
- Р. Г. Стронгин, Численные методы в многоэкстремальных задачах, Наука, Москва, 1978.
- Ф. П. Василев, Лекции по методам решения экстремальных задач, Издательство Московского университета, Москва, 1974.
- S. Zlobec, J. Petrić, *Nelinearno programiranje*, Naučna knjiga, Beograd, 1989.