METRIČKI PROSTORI

Vježbe uz šesto poglavlje: Kompaktnost u metričkim prostorima

1. Navedi primjer metričkog prostora i u njemu Cauchyjeva niza koji ne konvergira.

2. Dokaži da je svaki Cauchyjev niz u metričkom prostoru (X, d) omeđen.

3. Neka je $f\colon X \to Y$ preslikavanje topoloških prostora. Dokaži da ako je f neprekidno onda *čuva* konvergenciju nizova, tj. za svaki konvergentan niz $(x_n)_n$ u X, niz $(f(x_n))_n$ konvergira i $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$.

4. Definicija: Neka je $f\colon X \to Y$ preslikavanje topoloških prostora, i neka je $A \subseteq X$. Kaže se da f *ima limes* u gomilištu x_0 skupa A, ako postoji točka $\ell \in Y$ takva da za svaku okolinu $V \ni \ell$ postoji okolina $U \ni x_0$ takva da je $f(U \cap (A \setminus \{x_0\})) \subseteq V$. Dokaži sljedeći teorem.

   > Preslikavanje $f\colon X \to Y$ metričkih prostora ima limes u gomilištu x_0 skupa $A \subseteq X$ ako i samo ako postoji točka $\ell \in Y$ takva da za svaki niz $(x_n)_n$ u $A \setminus \{x_0\}$ koji konvergira točki x_0, niz $(f(x_n))_n$ konvergira k ℓ.

   Vrijedi li ista tvrdnja ako umjesto „svaki niz u $A \setminus \{x_0\}$" stavimo „svaki niz u A"?

5. Dokaži direktno, bez korištenja teorema 25.10, sljedeće tvrdnje:
   (*a*) Svaki nizovno kompaktan metrički prostor je omeđen.
   (*b*) Zatvoren podskup nizovno kompaktnog metričkog prostora je nizovno kompaktan.
   (*c*) Produkt nizovno kompaktnih metričkih prostora je nizovno kompaktan.

6. (*a*) Nađi primjer potpuno omeđenog metričkog prostora koji nije kompaktan.
   (*b*) Zaključi kako potpuna omeđenost metričkog prostora nije topološko svojstvo.

7. Neka je (X, d) kompaktan metrički prostor i neka je $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots$ silazan niz zatvorenih podskupova. Dokaži da je $\operatorname{diam}\big(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n\big) = \inf\limits_n \operatorname{diam} F_n$.

8. Neka je X kompaktan metrički prostor a $f\colon X \to X$ neprekidno preslikavanje. Dokaži da postoji neprazan podskup $A \subseteq X$ takav da je $f(A) = A$.
   [*Uputa:* Promatraj skupove $X_1 := f(X)$, $X_2 := f(X_1)$, $X_3 := f(X_2) \ldots$, definiraj $A := \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ i iskoristi zadatak 8. (b) u vježbama uz 4. poglavlje.]

9. (*a*) Neka je (X, d) kompaktan metrički prostor i neka je $f\colon X \to X$ preslikavanje koje *čuva udaljenost*, tj. takvo da je $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ za sve $x, y \in X$. Dokaži da je tada f surjekcija, pa je stoga i izometrija s X na X (definicija 8.9).
   (*b*) Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) kompaktni metrički prostori, a $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to X$ preslikavanja koja čuvaju udaljenost, tj. za sve $x, x' \in X$ je $d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$ i za sve $y, y' \in Y$ je $d_X(g(y), g(y')) = d_Y(y, y')$. Dokaži da su f i g surjekcije, dakle i izometrije s X na Y, odnosno s Y na X.
   (*c*) Pokaži primjerom da je u tvrdnjama (a) i (b) kompaktnost nužna, tj. nađi primjer metričkog prostora (X, d) i preslikavanja $f\colon X \to X$ za koje je $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ za sve $x, y \in X$, iako f nije surjekcija, dakle niti izometrija s X na X.