METRIČKI PROSTORI

Vježbe uz sedmo poglavlje: Uniformna konvergencija

1. Obrazloži tvrdnju (str. 196):

   > Ako je X kompaktan, onda je uniformna konvergencija u skupu svih neprekidnih preslikavanja s X u metrički prostor (Y, d), isto što i konvergencija s obzirom na max-metriku u prostoru $C(X, Y)$ svih neprekidnih preslikavanja s X u Y.

2. Neka je $X = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$ i neka je $f_n \colon X \to \mathbb{R}$, niz funkcija koji uniformno konvergira na svakom A_j, tj. niz restrikcija $(f_n|_{A_j})_n$ uniformno konvergira za $j = 1, \ldots, k$. Dokaži da tada niz $(f_n)_n$ uniformno konvergira na cijelom X.

3. Dokaži da niz funkcija $f_n \colon [0,1\rangle \to \mathbb{R}$ definiranih s $f_n(x) = x^n$ (primjer 26.3) konvergira konstantnoj funkciji $0 \colon [0,1\rangle \to \mathbb{R}$, ali da ne konvergira uniformno.

4. Neka su funkcije $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, definirane s $f_n(x) = x\,\mathrm{e}^{-nx^2}$. Pokaži da niz $(f_n)_n$ uniformno konvergira konstantnoj funkciji 0.

5. Koji od sljedećih nizova $(f_n)_n$ realnih funkcija na $[0,1]$ konvergira uniformno?

   (a) $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + nx}$;

   (b) $f_n(x) = nx\,\mathrm{e}^{-nx^2}$;

   (c) $f_n(x) = \sqrt{n}\,x\,(1 - x^2)^n$;

   (d) $f_n(x) = nx\,(1 - x^2)^{n^2}$;

   (e) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^n}$;

   (f) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n^x} \cos nx$.

6. Dokaži da je, uz uobičajeno zbrajanje funkcija i množenje funkcija skalarom, skup uniformno konvergentnih nizova realnih funkcija na X, vektorski prostor.

7. Neka je $f_n \colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, niz omeđenih funkcija koji uniformno konvergira funkciji $f \colon X \to \mathbb{R}$, $(f_n)_n \rightrightarrows f$.

   (a) Dokaži da je funkcija f omeđena.

   (b) Dokaži da je niz funkcija $(f_n)_n$ *uniformno omeđen*, tj. postoji $K > 0$ takav da je $|f_n(x)| < K$ za sve $x \in X$ i sve $n \in \mathbb{N}$.

8. Neka su $(f_n)_n$ i $(g_n)_n$ uniformno konvergentni nizovi omeđenih realnih funkcija na X s limesima f odnosno g. Dokaži da niz produkata $(f_n g_n)_n$ uniformno konvergira produktu $f\,g$. [*Uputa:* Iskoristi zadatak **??**.]

9. Definirajmo funkcije $f_n, g_n, h_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ formulama

$$f_n(x) = (1 + \tfrac{1}{n})x$$
$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{za } x = 0 \text{ ili } x \notin \mathbb{Q} \\ q + \frac{1}{n} & \text{za } x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ p \text{ i } q \text{ relativno prosti} \end{cases}$$
$$h_n(x) = f_n(x)\, g_n(x)$$

Dokaži da nizovi $(f_n)_n$ i $(g_n)_n$ uniformno konvergiraju na svakom segmentu $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, ali niz $(h_n)_n$ ne konvergira uniformno niti na jednom segmentu (osim na „segmentima” oblika $[a, a]$ kada se zapravo niti ne može govoriti o uniformnoj konvergenciji).

10. Konstruiraj niz funkcija $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, tako da niti jedna nije neprekidna u 0, ali da niz $(f_n)_n$ uniformno konvergira neprekidnoj funkciji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

11. Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori a $f_n\colon X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, niz uniformno neprekidnih funkcija koji uniformno konvergira funkciji $f\colon X \to Y$, $(f_n)_n \rightrightarrows f$. Dokaži da je tada i f uniformno neprekidna funkcija.

12. Dokaži Dinijev teorem (teorem 26.11)

    Neka je X kompaktan topološki prostor a $f_n\colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, niz neprekidnih funkcija takvih da je $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ za sve $x \in X$ i sve $n \in \mathbb{N}$. Ako niz $(f_n)_n$ konvergira (obično, po točkama) neprekidnoj funkciji $f\colon X \to \mathbb{R}$, onda on konvergira uniformno.