METRIČKI PROSTORI

Vježbe uz osmo poglavlje: Potpuni metrički prostori

1. Dokaži da je formulom $\rho(x,y) = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right|$ zaista definirana jedna metrika na $\mathbb{R}$ i da je ona topološki ekvivalentna standardnoj metrici d (primjer 27.4).

2. Neka je $\big((x_n, y_n)\big)_n$ Cauchyjev niz u $X \times Y$ s bilo kojom od metrika d_1, d_2 ili d_∞. Dokaži da su tada i nizovi $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ Cauchyjevi nizovi u X odnosno Y.

3. Neka je $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ bijekcija metričkih prostora takva da je f uniformno neprekidno a $f^{-1} : Y \to X$ neprekidno preslikavanje.
   (*a*) Dokaži da ako je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz u X onda je $\big(f(x_n)\big)_n$ Cauchyjev niz u Y, pa zaključi da ako je (Y, d_Y) potpun onda je i (X, d_X) potpun.
   (*b*) Za metričke prostore (X, d_X) i (Y, d_Y) kažemo da su *uniformno ekvivalentni* ako postoji bijekcija $f\colon X \to Y$ takva da su f i f^{-1} uniformno neprekidna preslikavanja.
   Dokaži da je potpunost invarijanta uniformne ekvivalencije.

4. (*a*) Konstruiraj primjer dviju topološki ekvivalentnih metrika na skupu X i niza $(x_n)_n$ u X koji je Cauchyjev s obzirom na jednu od tih metrika, a s obzirom na drugu nije.
   (*b*) Neka je $f\colon X \to Y$ uniformno neprekidna bijekcija potpunog metričkog prostora (X, d_X) na metrički prostor (Y, d_Y). Pokaži primjerom da, unatoč uniformnoj neprekidnosti preslikavanja f, i neprekidnosti inverza f^{-1}, (Y, d_Y) ne mora biti potpun.

5. Dokaži da ako je produkt $X \times Y$ metričkih prostora potpun, onda su X i Y potpuni.

6. Dokaži da uz L_2-metriku $d_2(f,g) = \sqrt{\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)^2\, \mathrm{d}x}$, prostor neprekidnih funkcija $[a,b] \to \mathbb{R}$ nije potpun.

7. Neka je X prostor omeđenih nizova realnih brojeva sa sup-metrikom d_∞, i neka je $A \subseteq X$ podskup svih konvergentnih omeđenih nizova. Dokaži da je A zatvoren.

8. Konstruiraj primjer skupa X, funkcije $f\colon X \to X$ i dviju topološki ekvivalentnih metrika na X, tako da je s obzirom na jednu od tih metrika, funkcija f kontrakcija, a s obzirom na drugu, nije.

9. (*a*) Pokaži da je funkcija $f\colon \langle 0, \frac{1}{4}\rangle \to \langle 0, \frac{1}{4}\rangle$ definirana s $f(x) = x^2$, kontrakcija, ali da nema fiksnu točku.
   (*b*) Neka je funkcija $f\colon [1,\infty\rangle \to [1,\infty\rangle$ definirana s $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Pokaži da iako je $[1,\infty\rangle$ potpun i za sve $x \neq y$ vrijedi $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, funkcija f nema fiksnu točku.

10. Neka je X potpun metrički prostor i neka je $f\colon X \to X$ preslikavanje za koje postoji k takav da je $f^{(k)} = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k}$ kontrakcija. Dokaži da f ima jedinstvenu fiksnu točku x^*, i da za svaki $x \in X$ niz $\big(f^{(n)}(x)\big)_n$ konvergira ka x^*.

11. Dokaži da funkcija $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nije kontrakcija, ali $\cos^{(2)} = \cos \circ \cos$ je kontrakcija.

12. Neka je X kompaktan metrički prostor i neka je $f : X \to X$ preslikavanje takvo da je $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ za sve $x \neq y$. Dokaži da f ima jedinstvenu fiksnu točku. [*Uputa:* Pokaži da postoji $\min \{d(x, f(x)) : x \in X\}$, i da je jednak nuli.]

13. (*a*) Konstruiraj primjer silaznog niza zatvorenih podskupova $A_n, \subseteq \langle 0, 1\rangle$ takvih da je $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam} A_n = 0$ ali $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$.
    (*b*) Konstruiraj primjer silaznog niza nepraznih podskupova $B_n \subseteq \mathbb{R}$ takvih da je $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam} B_n = 0$ ali je $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n = \emptyset$.
    (*c*) Konstruiraj primjer silaznog niza nepraznih zatvorenih podskupova $C_n \subseteq \mathbb{R}$ takvih da je $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n = \emptyset$.

14. Dokaži sljedeću tvrdnju (obrat Cantorova teorema o presjeku, teorem 28.9):

    Neka je (X, d) metrički prostor sa svojstvom da je za svaki silazan niz $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots$ nepraznih zatvorenih podskupova takvih da je $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = 0$, presjek $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ neprazan. Tada je prostor (X, d) potpun.

15. Neka je (X, d) metrički prostor i $A, B \subseteq X$ dva potpuna potprostora. Dokaži da je i unija $A \cup B$ potpun potprostor.