METRIČKI PROSTORI

Šime Ungar
http://www.mathos.unios.hr/~sime/

Literatura:

S. Mardešić. *Matematička analiza*, 1. dio, Školska knjiga, Zagreb, 1974.

Š. Ungar. *Matematička analiza* 3, PMF-Matematički odjel, Zagreb, 2002.
http://web.math.pmf.unizg.hr/~ungar/NASTAVA/MA/Analiza3.pdf

W. A. Sutherland. *Introduction to metric and topological spaces,* Claredon Press, Oxford, 1975.

25. svibnja 2016.

Što želimo ovim kolegijem?

Naprimjer: Znamo da ako je f neprekidna realna funkcija na segmentu $[a, b]$ onda je ona omeđena, tj. postoji broj $M > 0$ takav da je $|f(x)| < M$ za sve $x \in [a, b]$. Ali to isto vrijedi i ako je f funkcija dviju varijabli definirana na $[a, b] \times [c, d]$.

A isto tako i za funkcije više varijabli.

Postavlja se pitanje: Dokle to možemo generalizirati? I zašto?

- Ušteda — ne treba vršiti ponavljanja u sličnim situacijama.
- Jedinstven misaoni proces — pogled na *ideju*, bez suvišne strukture.
- U dokazu se uočavaju točno ona svojstva koja su nužna, a ne slučajno prisutna.

Što želimo ovim kolegijem?

Naprimjer: Znamo da ako je f neprekidna realna funkcija na segmentu $[a, b]$ onda je ona omeđena, tj. postoji broj $M > 0$ takav da je $|f(x)| < M$ za sve $x \in [a, b]$. Ali to isto vrijedi i ako je f funkcija dviju varijabli definirana na $[a, b] \times [c, d]$.

A isto tako i za funkcije više varijabli.

Postavlja se pitanje: Dokle to možemo generalizirati? I zašto?

- Ušteda — ne treba vršiti ponavljanja u sličnim situacijama.
- Jedinstven misaoni proces — pogled na *ideju*, bez suvišne strukture.
- U dokazu se uočavaju točno ona svojstva koja su nužna, a ne slučajno prisutna.

Što želimo ovim kolegijem?

Naprimjer: Znamo da ako je f neprekidna realna funkcija na segmentu $[a, b]$ onda je ona omeđena, tj. postoji broj $M > 0$ takav da je $|f(x)| < M$ za sve $x \in [a, b]$. Ali to isto vrijedi i ako je f funkcija dviju varijabli definirana na $[a, b] \times [c, d]$.

A isto tako i za funkcije više varijabli.

Postavlja se pitanje: Dokle to možemo generalizirati? I zašto?

- Ušteda — ne treba vršiti ponavljanja u sličnim situacijama.
- Jedinstven misaoni proces — pogled na *ideju*, bez suvišne strukture.
- U dokazu se uočavaju točno ona svojstva koja su nužna, a ne slučajno prisutna.

Što želimo ovim kolegijem?

Naprimjer: Znamo da ako je f neprekidna realna funkcija na segmentu $[a, b]$ onda je ona omeđena, tj. postoji broj $M > 0$ takav da je $|f(x)| < M$ za sve $x \in [a, b]$. Ali to isto vrijedi i ako je f funkcija dviju varijabli definirana na $[a, b] \times [c, d]$.
A isto tako i za funkcije više varijabli.
Postavlja se pitanje: Dokle to možemo generalizirati? I zašto?

- Ušteda — ne treba vršiti ponavljanja u sličnim situacijama.
- Jedinstven misaoni proces — pogled na *ideju*, bez suvišne strukture.
- U dokazu se uočavaju točno ona svojstva koja su nužna, a ne slučajno prisutna.

Što želimo ovim kolegijem?

Naprimjer: Znamo da ako je f neprekidna realna funkcija na segmentu $[a, b]$ onda je ona omeđena, tj. postoji broj $M > 0$ takav da je $|f(x)| < M$ za sve $x \in [a, b]$. Ali to isto vrijedi i ako je f funkcija dviju varijabli definirana na $[a, b] \times [c, d]$.
A isto tako i za funkcije više varijabli.
Postavlja se pitanje: Dokle to možemo generalizirati? I zašto?

- Ušteda — ne treba vršiti ponavljanja u sličnim situacijama.
- Jedinstven misaoni proces — pogled na *ideju*, bez suvišne strukture.
- U dokazu se uočavaju točno ona svojstva koja su nužna, a ne slučajno prisutna.

Što želimo ovim kolegijem?

Naprimjer: Znamo da ako je f neprekidna realna funkcija na segmentu $[a, b]$ onda je ona omeđena, tj. postoji broj $M > 0$ takav da je $|f(x)| < M$ za sve $x \in [a, b]$. Ali to isto vrijedi i ako je f funkcija dviju varijabli definirana na $[a, b] \times [c, d]$.

A isto tako i za funkcije više varijabli.

Postavlja se pitanje: Dokle to možemo generalizirati? I zašto?

- Ušteda — ne treba vršiti ponavljanja u sličnim situacijama.
- Jedinstven misaoni proces — pogled na *ideju*, bez suvišne strukture.
- U dokazu se uočavaju točno ona svojstva koja su nužna, a ne slučajno prisutna.

Što želimo ovim kolegijem?

Naprimjer: Znamo da ako je f neprekidna realna funkcija na segmentu $[a, b]$ onda je ona omeđena, tj. postoji broj $M > 0$ takav da je $|f(x)| < M$ za sve $x \in [a, b]$. Ali to isto vrijedi i ako je f funkcija dviju varijabli definirana na $[a, b] \times [c, d]$.
A isto tako i za funkcije više varijabli.
Postavlja se pitanje: Dokle to možemo generalizirati? I zašto?

- Ušteda — ne treba vršiti ponavljanja u sličnim situacijama.
- Jedinstven misaoni proces — pogled na *ideju*, bez suvišne strukture.
- U dokazu se uočavaju točno ona svojstva koja su nužna, a ne slučajno prisutna.

Što želimo ovim kolegijem?

Naprimjer: Znamo da ako je f neprekidna realna funkcija na segmentu $[a, b]$ onda je ona omeđena, tj. postoji broj $M > 0$ takav da je $|f(x)| < M$ za sve $x \in [a, b]$. Ali to isto vrijedi i ako je f funkcija dviju varijabli definirana na $[a, b] \times [c, d]$.

A isto tako i za funkcije više varijabli.

Postavlja se pitanje: Dokle to možemo generalizirati? I zašto?

- Ušteda — ne treba vršiti ponavljanja u sličnim situacijama.
- Jedinstven misaoni proces — pogled na *ideju*, bez suvišne strukture.
- U dokazu se uočavaju točno ona svojstva koja su nužna, a ne slučajno prisutna.

Što želimo ovim kolegijem?

Naprimjer: Znamo da ako je f neprekidna realna funkcija na segmentu $[a, b]$ onda je ona omeđena, tj. postoji broj $M > 0$ takav da je $|f(x)| < M$ za sve $x \in [a, b]$. Ali to isto vrijedi i ako je f funkcija dviju varijabli definirana na $[a, b] \times [c, d]$.

A isto tako i za funkcije više varijabli.

Postavlja se pitanje: Dokle to možemo generalizirati? I zašto?

- Ušteda — ne treba vršiti ponavljanja u sličnim situacijama.
- Jedinstven misaoni proces — pogled na *ideju*, bez suvišne strukture.
- U dokazu se uočavaju točno ona svojstva koja su nužna, a ne slučajno prisutna.

1 MALO REALNE ANALIZE — PONAVLJANJE

- Oznake i terminologija
- Realni brojevi
- Nizovi realnih brojeva
- Limes funkcije
- Neprekidnost

Oznake i terminologija

Podsjetimo se nekih oznaka i terminologije koju ćemo rabiti:

$f : X \to Y$ domena / kodomena Čitaj: „f <u>sa</u> X <u>u</u> Y"

$f(x)$ je *vrijednost* funkcije f u točki x, $f(x) \in Y$

$\sin x$ **nije funkcija!** To je vrijednost funkcije $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ u točki $x \in \mathbb{R}$

$f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ gdje je A podskup od X,
dakle $f(A) \subseteq Y$ i naziva se *slika* skupa A

Slika funkcije f je skup $f(X) \subseteq Y$

Graf funkcije f je skup $\Gamma_f := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$

injekcija / *surjekcija* / *bijekcija*

identiteta $id : X \to X$, ili $\mathbb{1} : X \to X$, ili $\mathbb{1}_X : X \to X$: $id(x) = x, \forall x \in X$

konstantna funkcija $c : X \to Y$ za koju je $c(x) = c(x')$ za sve $x, x' \in X$

Praslika skupa $B \subseteq Y$ je skup $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\} \subseteq X$
bez obzira postoji li funkcija f^{-1} ili ne!
[rabi se i oznaka $f^{\leftarrow}(B)$ posebno $f^{\leftarrow}(y)$ za $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$
kada f^{-1}, kao funkcija s Y u X, ne postoji.]

Oznake i terminologija

Podsjetimo se nekih oznaka i terminologije koju ćemo rabiti:

$f\colon X \to Y$ $\quad f\colon X \to Y$ domena / kodomena Čitaj: „f sa X u Y"

$f(x)$ je *vrijednost* funkcije f u točki x, $f(x) \in Y$

$\sin x$ **nije funkcija!** To je vrijednost funkcije $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ u točki $x \in \mathbb{R}$

$f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ gdje je A podskup od X,

dakle $f(A) \subseteq Y$ i naziva se *slika* skupa A

Slika funkcije f je skup $f(X) \subseteq Y$

Graf funkcije f je skup $\Gamma_f := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$

injekcija / *surjekcija* / *bijekcija*

identiteta $id\colon X \to X$, ili $\mathbb{1}\colon X \to X$, ili $\mathbb{1}_X\colon X \to X$: $id(x) = x, \forall x \in X$

konstantna funkcija $c\colon X \to Y$ za koju je $c(x) = c(x')$ za sve $x, x' \in X$

Praslika skupa $B \subseteq Y$ je skup $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\} \subseteq X$

bez obzira postoji li funkcija f^{-1} ili ne!

[rabi se i oznaka $f^{\leftarrow}(B)$ posebno $f^{\leftarrow}(y)$ za $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$

kada f^{-1}, kao funkcija s Y u X, ne postoji.]

Oznake i terminologija

Podsjetimo se nekih oznaka i terminologije koju ćemo rabiti:

$f\colon X \to Y$ domena

Oznake i terminologija

Podsjetimo se nekih oznaka i terminologije koju ćemo rabiti:

$f\colon X \to Y$ domena / kodomena Čitaj: „f sa X u Y"

$f(x)$ je *vrijednost* funkcije f u točki x, $f(x) \in Y$

$\sin x$ **nije funkcija**! To je vrijednost funkcije $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ u točki $x \in \mathbb{R}$

$f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ gdje je A podskup od X,

dakle $f(A) \subseteq Y$ i naziva se *slika* skupa A

Slika funkcije f je skup $f(X) \subseteq Y$

Graf funkcije f je skup $\Gamma_f := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$

injekcija / *surjekcija* / *bijekcija*

identiteta $id\colon X \to X$, ili $\mathbb{1}\colon X \to X$, ili $\mathbb{1}_X\colon X \to X$: $id(x) = x, \forall x \in X$

konstantna funkcija $c\colon X \to Y$ za koju je $c(x) = c(x')$ za sve $x, x' \in X$

Praslika skupa $B \subseteq Y$ je skup $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\} \subseteq X$

bez obzira postoji li funkcija f^{-1} ili ne!

[rabi se i oznaka $f^{\leftarrow}(B)$ posebno $f^{\leftarrow}(y)$ za $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$

kada f^{-1}, kao funkcija s Y u X, ne postoji.]

Oznake i terminologija

Podsjetimo se nekih oznaka i terminologije koju ćemo rabiti:

$f\colon X \to Y$ domena / kodomena Čitaj: „f sa X u Y"

$f(x)$ je *vrijednost* funkcije f u točki x, $f(x) \in Y$

$\sin x$ **nije funkcija!** To je vrijednost funkcije $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ u točki $x \in \mathbb{R}$

$f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ gdje je A podskup od X,

dakle $f(A) \subseteq Y$ i naziva se *slika* skupa A

Slika funkcije f je skup $f(X) \subseteq Y$

Graf funkcije f je skup $\Gamma_f := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$

injekcija / *surjekcija* / *bijekcija*

identiteta $id\colon X \to X$, ili $\mathbb{1}\colon X \to X$, ili $\mathbb{1}_X\colon X \to X$: $id(x) = x, \forall x \in X$

konstantna funkcija $c\colon X \to Y$ za koju je $c(x) = c(x')$ za sve $x, x' \in X$

Praslika skupa $B \subseteq Y$ je skup $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\} \subseteq X$

bez obzira postoji li funkcija f^{-1} ili ne!

[rabi se i oznaka $f^{\leftarrow}(B)$ posebno $f^{\leftarrow}(y)$ za $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$

kada f^{-1}, kao funkcija s Y u X, ne postoji.]

Oznake i terminologija

Podsjetimo se nekih oznaka i terminologije koju ćemo rabiti:

$f\colon X \to Y$ domena / kodomena Čitaj: „f sa X u Y"

$f(x)$ je *vrijednost* funkcije f u točki x, $f(x) \in Y$

$\sin x$ **nije funkcija**! To je vrijednost funkcije $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ u točki $x \in \mathbb{R}$

$f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ gdje je A podskup od X,
dakle $f(A) \subseteq Y$ i naziva se *slika* skupa A

Slika funkcije f je skup $f(X) \subseteq Y$

Graf funkcije f je skup $\Gamma_f := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$

injekcija / *surjekcija* / *bijekcija*

identiteta $id\colon X \to X$, ili $\mathbb{1}\colon X \to X$, ili $\mathbb{1}_X\colon X \to X$: $id(x) = x, \forall x \in X$

konstantna funkcija $c\colon X \to Y$ za koju je $c(x) = c(x')$ za sve $x, x' \in X$

Praslika skupa $B \subseteq Y$ je skup $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\} \subseteq X$
bez obzira postoji li funkcija f^{-1} ili ne!
[rabi se i oznaka $f^{\leftarrow}(B)$ posebno $f^{\leftarrow}(y)$ za $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$
kada f^{-1}, kao funkcija s Y u X, ne postoji.]

Oznake i terminologija

Podsjetimo se nekih oznaka i terminologije koju ćemo rabiti:

$f: X \to Y$ domena / kodomena Čitaj: „f sa X u Y"

$f(x)$ je *vrijednost* funkcije f u točki x, $f(x) \in Y$

$\sin x$ **nije** funkcija! To je vrijednost funkcije $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ u točki $x \in \mathbb{R}$

$f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ gdje je A podskup od X,

dakle $f(A) \subseteq Y$ i naziva se *slika* skupa A

Slika funkcije f je skup $f(X) \subseteq Y$

Graf funkcije f je skup $\Gamma_f := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$

injekcija / *surjekcija* / *bijekcija*

identiteta $id : X \to X$, ili $\mathbb{1} : X \to X$, ili $\mathbb{1}_X : X \to X$: $id(x) = x, \forall x \in X$

konstantna funkcija $c : X \to Y$ za koju je $c(x) = c(x')$ za sve $x, x' \in X$

Praslika skupa $B \subseteq Y$ je skup $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\} \subseteq X$

bez obzira postoji li funkcija f^{-1} ili ne!

[rabi se i oznaka $f^{\leftarrow}(B)$ posebno $f^{\leftarrow}(y)$ za $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$

kada f^{-1}, kao funkcija s Y u X, ne postoji.]

Oznake i terminologija

Podsjetimo se nekih oznaka i terminologije koju ćemo rabiti:

$f : X \to Y$ domena / kodomena Čitaj: „f sa X u Y"

$f(x)$ je *vrijednost* funkcije f u točki x, $f(x) \in Y$

$\sin x$ **nije** funkcija! To je vrijednost funkcije $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ u točki $x \in \mathbb{R}$

$f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ gdje je A podskup od X,

dakle $f(A) \subseteq Y$ i naziva se *slika* skupa A

Slika funkcije f je skup $f(X) \subseteq Y$

Graf funkcije f je skup $\Gamma_f := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$

injekcija / *surjekcija* / *bijekcija*

identiteta $id : X \to X$, ili $\mathbb{1} : X \to X$, ili $\mathbb{1}_X : X \to X$: $id(x) = x, \forall x \in X$

konstantna funkcija $c : X \to Y$ za koju je $c(x) = c(x')$ za sve $x, x' \in X$

Praslika skupa $B \subseteq Y$ je skup $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\} \subseteq X$

bez obzira postoji li funkcija f^{-1} ili ne!

[rabi se i oznaka $f^{\leftarrow}(B)$ posebno $f^{\leftarrow}(y)$ za $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$

kada f^{-1}, kao funkcija s Y u X, ne postoji.]

Oznake i terminologija

Podsjetimo se nekih oznaka i terminologije koju ćemo rabiti:

$f\colon X \to Y$ domena / kodomena Čitaj: „f sa X u Y"

$f(x)$ je *vrijednost* funkcije f u točki x, $f(x) \in Y$

$\sin x$ **nije** funkcija! To je vrijednost funkcije $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ u točki $x \in \mathbb{R}$

$f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ gdje je A podskup od X,

dakle $f(A) \subseteq Y$ i naziva se *slika* skupa A

Slika funkcije f je skup $f(X) \subseteq Y$

Graf funkcije f je skup $\Gamma_f := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$

injekcija / *surjekcija* / *bijekcija*

identiteta $id\colon X \to X$, ili $\mathbb{1}\colon X \to X$, ili $\mathbb{1}_X\colon X \to X$: $id(x) = x, \forall x \in X$

konstantna funkcija $c\colon X \to Y$ za koju je $c(x) = c(x')$ za sve $x, x' \in X$

Praslika skupa $B \subseteq Y$ je skup $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\} \subseteq X$

bez obzira postoji li funkcija f^{-1} ili ne!

[rabi se i oznaka $f^{\leftarrow}(B)$ posebno $f^{\leftarrow}(y)$ za $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$

kada f^{-1}, kao funkcija s Y u X, ne postoji.]

Oznake i terminologija

Podsjetimo se nekih oznaka i terminologije koju ćemo rabiti:

$f\colon X \to Y$ domena / kodomena Čitaj: „f sa X u Y"

$f(x)$ je *vrijednost* funkcije f u točki x, $f(x) \in Y$

sin x **nije** funkcija! To je vrijednost funkcije $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ u točki $x \in \mathbb{R}$

$f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ gdje je A podskup od X,

dakle $f(A) \subseteq Y$ i naziva se *slika* skupa A

Slika funkcije f je skup $f(X) \subseteq Y$

Graf funkcije f je skup $\Gamma_f := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$

injekcija / *surjekcija* / *bijekcija*

identiteta $id\colon X \to X$, ili $\mathbb{1}\colon X \to X$, ili $\mathbb{1}_X\colon X \to X$: $id(x) = x, \forall x \in X$

konstantna funkcija $c\colon X \to Y$ za koju je $c(x) = c(x')$ za sve $x, x' \in X$

Praslika skupa $B \subseteq Y$ je skup $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\} \subseteq X$

bez obzira postoji li funkcija f^{-1} ili ne!

[rabi se i oznaka $f^{\leftarrow}(B)$ posebno $f^{\leftarrow}(y)$ za $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$

kada f^{-1}, kao funkcija s Y u X, ne postoji.]

Oznake i terminologija

Podsjetimo se nekih oznaka i terminologije koju ćemo rabiti:

$f : X \to Y$ domena / kodomena Čitaj: „f sa X u Y"

$f(x)$ je *vrijednost* funkcije f u točki x, $f(x) \in Y$

$\sin x$ **nije** funkcija! To je vrijednost funkcije $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ u točki $x \in \mathbb{R}$

$f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ gdje je A podskup od X,

dakle $f(A) \subseteq Y$ i naziva se *slika* skupa A

Slika funkcije f je skup $f(X) \subseteq Y$

Graf funkcije f je skup $\Gamma_f := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$

injekcija / *surjekcija* / *bijekcija*

identiteta $id : X \to X$, ili $\mathbb{1} : X \to X$, ili $\mathbb{1}_X : X \to X$: $id(x) = x, \forall x \in X$

konstantna funkcija $c : X \to Y$ za koju je $c(x) = c(x')$ za sve $x, x' \in X$

Praslika skupa $B \subseteq Y$ je skup $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\} \subseteq X$

bez obzira postoji li funkcija f^{-1} ili ne!

[rabi se i oznaka $f^{\leftarrow}(B)$ posebno $f^{\leftarrow}(y)$ za $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$

kada f^{-1}, kao funkcija s Y u X, ne postoji.]

Oznake i terminologija

Podsjetimo se nekih oznaka i terminologije koju ćemo rabiti:

$f : X \to Y$ domena / kodomena Čitaj: „f sa X u Y"

$f(x)$ je *vrijednost* funkcije f u točki x, $f(x) \in Y$

$\sin x$ **nije** funkcija! To je vrijednost funkcije $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ u točki $x \in \mathbb{R}$

$f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ gdje je A podskup od X,

dakle $f(A) \subseteq Y$ i naziva se *slika* skupa A

Slika funkcije f je skup $f(X) \subseteq Y$

Graf funkcije f je skup $\Gamma_f := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$

injekcija / *surjekcija* / *bijekcija*

identiteta $id : X \to X$, ili $\mathbb{1} : X \to X$, ili $\mathbb{1}_X : X \to X$: $id(x) = x, \forall x \in X$

konstantna funkcija $c : X \to Y$ za koju je $c(x) = c(x')$ za sve $x, x' \in X$

Praslika skupa $B \subseteq Y$ je skup $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\} \subseteq X$

bez obzira postoji li funkcija f^{-1} ili ne!

[rabi se i oznaka $f^{\leftarrow}(B)$ posebno $f^{\leftarrow}(y)$ za $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$

kada f^{-1}, kao funkcija s Y u X, ne postoji.]

Oznake i terminologija

Podsjetimo se nekih oznaka i terminologije koju ćemo rabiti:

$f \colon X \to Y$ domena / kodomena Čitaj: „f sa X u Y"

$f(x)$ je *vrijednost* funkcije f u točki x, $f(x) \in Y$

$\sin x$ **nije** funkcija! To je vrijednost funkcije $\sin \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ u točki $x \in \mathbb{R}$

$f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ gdje je A podskup od X,

dakle $f(A) \subseteq Y$ i naziva se *slika* skupa A

Slika funkcije f je skup $f(X) \subseteq Y$

Graf funkcije f je skup $\Gamma_f := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$

injekcija / *surjekcija* / *bijekcija*

identiteta $id \colon X \to X$, ili $\mathbb{1} \colon X \to X$, ili $\mathbb{1}_X \colon X \to X$: $id(x) = x, \forall x \in X$

konstantna funkcija $c \colon X \to Y$ za koju je $c(x) = c(x')$ za sve $x, x' \in X$

Praslika skupa $B \subseteq Y$ je skup $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\} \subseteq X$

bez obzira postoji li funkcija f^{-1} ili ne!

[rabi se i oznaka $f^{\leftarrow}(B)$ posebno $f^{\leftarrow}(y)$ za $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$

kada f^{-1}, kao funkcija s Y u X, ne postoji.]

Oznake i terminologija

Podsjetimo se nekih oznaka i terminologije koju ćemo rabiti:

$f\colon X \to Y$ domena / kodomena Čitaj: „f sa X u Y"

$f(x)$ je *vrijednost* funkcije f u točki x, $f(x) \in Y$

$\sin x$ **nije** funkcija! To je vrijednost funkcije $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ u točki $x \in \mathbb{R}$

$f(A) := \{f(x) : x \in A\}$ gdje je A podskup od X,

dakle $f(A) \subseteq Y$ i naziva se *slika* skupa A

Slika funkcije f je skup $f(X) \subseteq Y$

Graf funkcije f je skup $\Gamma_f := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$

injekcija / *surjekcija* / *bijekcija*

identiteta $id\colon X \to X$, ili $\mathbb{1}\colon X \to X$, ili $\mathbb{1}_X\colon X \to X$: $id(x) = x, \forall x \in X$

konstantna funkcija $c\colon X \to Y$ za koju je $c(x) = c(x')$ za sve $x, x' \in X$

Praslika skupa $B \subseteq Y$ je skup $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\} \subseteq X$

bez obzira postoji li funkcija f^{-1} ili ne!

[rabi se i oznaka $f^{\leftarrow}(B)$ posebno $f^{\leftarrow}(y)$ za $f^{-1}(y) \equiv f^{-1}(\{y\})$

kada f^{-1}, kao funkcija s Y u X, ne postoji.]

Oznake i terminologija 2

Kompozicija funkcija $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$ je $g \circ f\colon X \to Z$
definirana s $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ i piše se $g\,f(x)$ ili $(g\,f)(x)$

Za $A \subseteq X$ *inkluzija* $\iota\colon A \to X$ je dana s $\iota(x) = x$, $x \in A$

Za $f\colon X \to Y$ i $A \subseteq X$ *restrikcija* $f|_A\colon A \to Y$ je definirana s
$(f|_A)(x) := f(x)$, $x \in A$

Standardne oznake za neke skupove:

prazan skup $\emptyset$

skupovi brojeva: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

intervali: $\langle a, b\rangle$, $[a, b]$, $\langle a, b]$, $[a, b\rangle$, $\langle -\infty, b]$, itd. $\subseteq \mathbb{R}$
(uvijek pretpostavljamo da je $a \leqslant b$)

Operacije sa skupovima: $A \cup B$, $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, $A \cap B$, $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$, $A \setminus B$

DOGOVOR: Kada je $A \cap B \neq \emptyset$ govorit ćemo da skupovi A i B se sijeku ili da A siječe B. Kada je $A \cap B = \emptyset$ kažemo da su A i B disjunktni.

Oznake i terminologija 2

Kompozicija funkcija $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$ je $g \circ f\colon X \to Z$
definirana s $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ i piše se $g\,f(x)$ ili $(g\,f)(x)$

Za $A \subseteq X$ *inkluzija* $\iota\colon A \to X$ je dana s $\iota(x) = x$, $x \in A$

Za $f\colon X \to Y$ i $A \subseteq X$ *restrikcija* $f|_A\colon A \to Y$ je definirana s
$(f|_A)(x) := f(x)$, $x \in A$

Standardne oznake za neke skupove:

prazan skup $\emptyset$

skupovi brojeva: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

intervali: $\langle a, b\rangle$, $[a, b]$, $\langle a, b]$, $[a, b\rangle$, $\langle -\infty, b]$, itd. $\subseteq \mathbb{R}$
(uvijek pretpostavljamo da je $a \leqslant b$)

Operacije sa skupovima: $A \cup B$, $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, $A \cap B$, $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$, $A \setminus B$

DOGOVOR: Kada je $A \cap B \neq \emptyset$ govorit ćemo da skupovi A i B se sijeku ili da A siječe B. Kada je $A \cap B = \emptyset$ kažemo da su A i B disjunktni.

Oznake i terminologija 2

Kompozicija funkcija $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$ je $g \circ f\colon X \to Z$
definirana s $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ i piše se $g\, f(x)$ ili $(g\, f)(x)$

Za $A \subseteq X$ *inkluzija* $\iota\colon A \to X$ je dana s $\iota(x) = x$, $x \in A$

Za $f\colon X \to Y$ i $A \subseteq X$ *restrikcija* $f|_A\colon A \to Y$ je definirana s
$(f|_A)(x) := f(x)$, $x \in A$

Standardne oznake za neke skupove:
prazan skup $\emptyset$
skupovi brojeva: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$
intervali: $\langle a, b\rangle$, $[a, b]$, $\langle a, b]$, $[a, b\rangle$, $\langle -\infty, b]$, itd. $\subseteq \mathbb{R}$
(uvijek pretpostavljamo da je $a \leqslant b$)

Operacije sa skupovima: $A \cup B$, $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$, $A \cap B$, $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$, $A \setminus B$

DOGOVOR: Kada je $A \cap B \neq \emptyset$ govorit ćemo da skupovi A i B se sijeku ili da A siječe B. Kada je $A \cap B = \emptyset$ kažemo da su A i B disjunktni.

Oznake i terminologija 2

Kompozicija funkcija $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$ je $g \circ f\colon X \to Z$
definirana s $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ i piše se $g\,f(x)$ ili $(g\,f)(x)$

Za $A \subseteq X$ *inkluzija* $\iota\colon A \to X$ je dana s $\iota(x) = x$, $x \in A$

Za $f\colon X \to Y$ i $A \subseteq X$ *restrikcija* $f|_A\colon A \to Y$ je definirana s
$$(f|_A)(x) := f(x),\ x \in A$$

Standardne oznake za neke skupove:

prazan skup $\emptyset$

skupovi brojeva: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

intervali: $\langle a, b\rangle$, $[a, b]$, $\langle a, b]$, $[a, b\rangle$, $\langle -\infty, b]$, itd. $\subseteq \mathbb{R}$
(uvijek pretpostavljamo da je $a \leqslant b$)

Operacije sa skupovima: $A \cup B$, $\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$, $A \cap B$, $\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$, $A \setminus B$

DOGOVOR: Kada je $A \cap B \neq \emptyset$ govorit ćemo da skupovi A i B se sijeku ili da A siječe B. Kada je $A \cap B = \emptyset$ kažemo da su A i B disjunktni.

Oznake i terminologija 2

Kompozicija funkcija $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$ je $g \circ f\colon X \to Z$
definirana s $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ i piše se $g\,f(x)$ ili $(g\,f)(x)$

Za $A \subseteq X$ *inkluzija* $\iota\colon A \to X$ je dana s $\iota(x) = x$, $x \in A$

Za $f\colon X \to Y$ i $A \subseteq X$ *restrikcija* $f|_A\colon A \to Y$ je definirana s
$(f|_A)(x) := f(x)$, $x \in A$

Standardne oznake za neke skupove:

prazan skup $\emptyset$

skupovi brojeva: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

intervali: $\langle a, b\rangle$, $[a, b]$, $\langle a, b]$, $[a, b\rangle$, $\langle -\infty, b]$, itd. $\subseteq \mathbb{R}$
(uvijek pretpostavljamo da je $a \leqslant b$)

Operacije sa skupovima: $A \cup B$, $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, $A \cap B$, $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$, $A \setminus B$

DOGOVOR: Kada je $A \cap B \neq \emptyset$ govorit ćemo da skupovi A i B se sijeku ili da A siječe B. Kada je $A \cap B = \emptyset$ kažemo da su A i B disjunktni.

Oznake i terminologija 2

Kompozicija funkcija $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$ je $g \circ f\colon X \to Z$
definirana s $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ i piše se $g\,f(x)$ ili $(g\,f)(x)$
Za $A \subseteq X$ *inkluzija* $\iota\colon A \to X$ je dana s $\iota(x) = x$, $x \in A$
Za $f\colon X \to Y$ i $A \subseteq X$ *restrikcija* $f|_A\colon A \to Y$ je definirana s
$(f|_A)(x) := f(x)$, $x \in A$

Standardne oznake za neke skupove:

prazan skup $\emptyset$
skupovi brojeva: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$
intervali: $\langle a, b\rangle$, $[a, b]$, $\langle a, b]$, $[a, b\rangle$, $\langle -\infty, b]$, itd. $\subseteq \mathbb{R}$
(uvijek pretpostavljamo da je $a \leqslant b$)

Operacije sa skupovima: $A \cup B$, $\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$, $A \cap B$, $\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$, $A \setminus B$

DOGOVOR: Kada je $A \cap B \neq \emptyset$ govorit ćemo da skupovi A i B se sijeku ili da A siječe B. Kada je $A \cap B = \emptyset$ kažemo da su A i B disjunktni.

Realni brojevi

(*a*) geometrijski: točke na pravcu

(*b*) decimalni brojevi (beskonačni decimalni zapis)

Ali niti jedno od toga nije dovoljno precizno za (matematičku) analizu.

Potreban je aksiomatski pristup:

Realni brojevi su potpuno uređeno polje,

tj. uređeno polje u kojem vrijedi i *Cantorov aksiom potpunosti*:

Aksiom potpunosti je ključno svojstvo zbog kojeg se
skup *racionalnih* brojeva $\mathbb{Q}$ (ALGEBRA) (intuitivno)

razlikuje od

skupa *realnih* brojeva $\mathbb{R}$ (ANALIZA) (ovdje nas intuicija napušta).

Realni brojevi

(*a*) geometrijski: točke na pravcu

(*b*) decimalni brojevi (beskonačni decimalni zapis)

Ali niti jedno od toga nije dovoljno precizno za (matematičku) analizu.

Potreban je aksiomatski pristup:

Realni brojevi su potpuno uređeno polje,

tj. uređeno polje u kojem vrijedi i *Cantorov aksiom potpunosti*:

Aksiom potpunosti je ključno svojstvo zbog kojeg se
skup *racionalnih* brojeva $\mathbb{Q}$ (ALGEBRA) (intuitivno)

razlikuje od

skupa *realnih* brojeva $\mathbb{R}$ (ANALIZA) (ovdje nas intuicija napušta).

Realni brojevi

(a) geometrijski: točke na pravcu

(b) decimalni brojevi (beskonačni decimalni zapis)

Ali niti jedno od toga nije dovoljno precizno za (matematičku) analizu.

Potreban je aksiomatski pristup:

Realni brojevi su potpuno uređeno polje,

tj. uređeno polje u kojem vrijedi i *Cantorov aksiom potpunosti*:

Aksiom potpunosti je ključno svojstvo zbog kojeg se

skup *racionalnih* brojeva $\mathbb{Q}$ (ALGEBRA) (intuitivno)

razlikuje od

skupa *realnih* brojeva $\mathbb{R}$ (ANALIZA) (ovdje nas intuicija napušta).

Realni brojevi

(a) geometrijski: točke na pravcu

(b) decimalni brojevi (beskonačni decimalni zapis)

Ali niti jedno od toga nije dovoljno precizno za (matematičku) analizu.

Potreban je aksiomatski pristup:

Realni brojevi su potpuno uređeno polje,

tj. uređeno polje u kojem vrijedi i *Cantorov aksiom potpunosti*:

Aksiom potpunosti je ključno svojstvo zbog kojeg se

skup *racionalnih* brojeva $\mathbb{Q}$ (ALGEBRA!) (intuitivno)

razlikuje od

skupa *realnih* brojeva $\mathbb{R}$ (ANALIZA) (ovdje nas intuicija napušta).

Realni brojevi

(a) geometrijski: točke na pravcu

(b) decimalni brojevi (beskonačni decimalni zapis)

Ali niti jedno od toga nije dovoljno precizno za (matematičku) analizu.

Potreban je aksiomatski pristup:

Realni brojevi su potpuno uređeno polje,

tj. uređeno polje u kojem vrijedi i *Cantorov aksiom potpunosti*:

Aksiom potpunosti je ključno svojstvo zbog kojeg se
skup *racionalnih* brojeva $\mathbb{Q}$ (ALGEBRA) (intuitivno)
razlikuje od
skupa *realnih* brojeva $\mathbb{R}$ (ANALIZA) (ovdje nas intuicija napušta).

Realni brojevi

(a) geometrijski: točke na pravcu

(b) decimalni brojevi (beskonačni decimalni zapis)

Ali niti jedno od toga nije dovoljno precizno za (matematičku) analizu.

Potreban je aksiomatski pristup:

Realni brojevi su potpuno uređeno polje,

tj. uređeno polje u kojem vrijedi i *Cantorov aksiom potpunosti*:

Aksiom potpunosti je ključno svojstvo zbog kojeg se
skup *racionalnih* brojeva $\mathbb{Q}$ (ALGEBRA) (intuitivno)

razlikuje od

skupa *realnih* brojeva $\mathbb{R}$ (ANALIZA) (ovdje nas intuicija napušta)

Realni brojevi

(a) geometrijski: točke na pravcu
(b) decimalni brojevi (beskonačni decimalni zapis)
Ali niti jedno od toga nije dovoljno precizno za (matematičku) analizu.
Potreban je aksiomatski pristup:
Realni brojevi su potpuno uređeno polje,
tj. uređeno polje u kojem vrijedi i *Cantorov aksiom potpunosti*:

Svaki neprazan odozgo omeđen skup ima supremum.[1]

Aksiom potpunosti je ključno svojstvo zbog kojeg se
skup *racionalnih* brojeva $\mathbb{Q}$ (ALGEBRA) (intuitivno)
razlikuje od
skupa *realnih* brojeva $\mathbb{R}$ (ANALIZA) (ovdje nas intuicija napušta).

---

[1] *Supremum* = najmanja gornja međa.
Ekvivalentan iskaz aksioma potpunosti je da svaki neprazan odozgo omeđen skup ima infimum (= najveća donja međa).

Realni brojevi

(a) geometrijski: točke na pravcu
(b) decimalni brojevi (beskonačni decimalni zapis)
Ali niti jedno od toga nije dovoljno precizno za (matematičku) analizu.
Potreban je aksiomatski pristup:
Realni brojevi su potpuno uređeno polje,
tj. uređeno polje u kojem vrijedi i *Cantorov aksiom potpunosti*:[1]

Svaki neprazan odozgo omeđen skup ima supremum.[2]

Aksiom potpunosti je ključno svojstvo zbog kojeg se
skup *racionalnih* brojeva $\mathbb{Q}$ (ALGEBRA) (intuitivno)
razlikuje od
skupa *realnih* brojeva $\mathbb{R}$ (ANALIZA) (ovdje nas intuicija napušta).

---

[1] Arhimedov aksiom (za sve $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $n\,a > b$) može se dobiti kao posljedica aksioma uređenog polja i aksioma potpunosti.

[2] *Supremum* = najmanja gornja međa.
Ekvivalentan iskaz aksioma potpunosti je da svaki neprazan odozdo omeđen skup ima infimum (= najveća donja međa).

Realni brojevi

(a) geometrijski: točke na pravcu
(b) decimalni brojevi (beskonačni decimalni zapis)
Ali niti jedno od toga nije dovoljno precizno za (matematičku) analizu.
Potreban je aksiomatski pristup:
Realni brojevi su potpuno uređeno polje,
tj. uređeno polje u kojem vrijedi i *Cantorov aksiom potpunosti*:[1]

Svaki neprazan odozgo omeđen skup ima supremum.[2]

Aksiom potpunosti je ključno svojstvo zbog kojeg se
skup *racionalnih* brojeva $\mathbb{Q}$ (ALGEBRA) (intuitivno)
razlikuje od
skupa *realnih* brojeva $\mathbb{R}$ (ANALIZA) (ovdje nas intuicija napušta).

---

[1]Arhimedov aksiom (za sve $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $n\,a > b$) može se dobiti kao posljedica aksioma uređenog polja i aksioma potpunosti.

[2]*Supremum* = najmanja gornja međa.
Ekvivalentan iskaz aksioma potpunosti je da svaki neprazan odozdo omeđen skup ima infimum (= najveća donja međa).

Realni brojevi

(a) geometrijski: točke na pravcu
(b) decimalni brojevi (beskonačni decimalni zapis)
Ali niti jedno od toga nije dovoljno precizno za (matematičku) analizu.
Potreban je aksiomatski pristup:
Realni brojevi su potpuno uređeno polje,
tj. uređeno polje u kojem vrijedi i *Cantorov aksiom potpunosti*:[1]

Svaki neprazan odozgo omeđen skup ima supremum.[2]

Aksiom potpunosti je ključno svojstvo zbog kojeg se
skup *racionalnih* brojeva $\mathbb{Q}$ (ALGEBRA) (intuitivno)
razlikuje od
skupa *realnih* brojeva $\mathbb{R}$ (ANALIZA) (ovdje nas intuicija napušta).

---

[1] Arhimedov aksiom (za sve $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $n\,a > b$) može se dobiti kao posljedica aksioma uređenog polja i aksioma potpunosti.

[2] *Supremum* $=$ najmanja gornja međa.
Ekvivalentan iskaz aksioma potpunosti je da svaki neprazan odozdo omeđen skup ima infimum ($=$ najveća donja međa).

Realni brojevi

(a) geometrijski: točke na pravcu
(b) decimalni brojevi (beskonačni decimalni zapis)
Ali niti jedno od toga nije dovoljno precizno za (matematičku) analizu.
Potreban je aksiomatski pristup:
Realni brojevi su potpuno uređeno polje,
tj. uređeno polje u kojem vrijedi i *Cantorov aksiom potpunosti*:[1]

Svaki neprazan odozgo omeđen skup ima supremum.[2]

Aksiom potpunosti je ključno svojstvo zbog kojeg se
skup *racionalnih* brojeva $\mathbb{Q}$ (ALGEBRA) (intuitivno)
razlikuje od
skupa *realnih* brojeva $\mathbb{R}$ (ANALIZA) (ovdje nas intuicija napušta).

---

[1] Arhimedov aksiom (za sve $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $n\,a > b$) može se dobiti kao posljedica aksioma uređenog polja i aksioma potpunosti.

[2] *Supremum* = najmanja gornja međa.
Ekvivalentan iskaz aksioma potpunosti je da svaki neprazan odozdo omeđen skup ima infimum (= najveća donja međa).

Realni brojevi

(a) geometrijski: točke na pravcu
(b) decimalni brojevi (beskonačni decimalni zapis)
Ali niti jedno od toga nije dovoljno precizno za (matematičku) analizu.
Potreban je aksiomatski pristup:
Realni brojevi su potpuno uređeno polje,
tj. uređeno polje u kojem vrijedi i *Cantorov aksiom potpunosti*:[1]

Svaki neprazan odozgo omeđen skup ima supremum.[2]

Aksiom potpunosti je ključno svojstvo zbog kojeg se skup *racionalnih* brojeva $\mathbb{Q}$ (ALGEBRA) (intuitivno) razlikuje od skupa *realnih* brojeva $\mathbb{R}$ (ANALIZA) (ovdje nas intuicija napušta).

---

[1] Arhimedov aksiom (za sve $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $n\,a > b$) može se dobiti kao posljedica aksioma uređenog polja i aksioma potpunosti.

[2] *Supremum* = najmanja gornja međa.
Ekvivalentan iskaz aksioma potpunosti je da svaki neprazan odozdo omeđen skup ima infimum (= najveća donja međa).

Realni brojevi

(a) geometrijski: točke na pravcu
(b) decimalni brojevi (beskonačni decimalni zapis)
Ali niti jedno od toga nije dovoljno precizno za (matematičku) analizu.
Potreban je aksiomatski pristup:
Realni brojevi su potpuno uređeno polje,
tj. uređeno polje u kojem vrijedi i *Cantorov aksiom potpunosti*:[1]

Svaki neprazan odozgo omeđen skup ima supremum.[2]

Aksiom potpunosti je ključno svojstvo zbog kojeg se
skup *racionalnih* brojeva $\mathbb{Q}$ (ALGEBRA) (intuitivno)
razlikuje od
skupa *realnih* brojeva $\mathbb{R}$ (ANALIZA) (ovdje nas intuicija napušta).

---

[1] Arhimedov aksiom (za sve $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $n\,a > b$) može se dobiti kao posljedica aksioma uređenog polja i aksioma potpunosti.

[2] *Supremum* = najmanja gornja međa.
Ekvivalentan iskaz aksioma potpunosti je da svaki neprazan odozdo omeđen skup ima infimum (= najveća donja međa).

Arhimedov aksiom

Teorem 1.1 (Arhimedov aksiom)

Skup $\mathbb{N}$ prirodnih brojeva nije omeđen odozgo.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da $\mathbb{N}$ je omeđen odozgo.
Tada prema aksiomu potpunosti postoji $M = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$.
Za svaki $n \in \mathbb{N}$ je i $n+1 \in \mathbb{N}$, pa je i $n+1 \leqslant M$, tj. $n \leqslant M-1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
To znači da je i $M - 1$ gornja međa skupa $\mathbb{N}$ — kontradikcija. $\square$

Korolar 1.2 (Arhimedov aksiom kakav znamo)

Za sve realne brojeve a i b, $a > 0$, postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $n\,a > b$. $\square$

Korolar 1.3 (i ovo je jedna verzija Arhimedova aksioma)

Za svaki realan broj $x > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $\frac{1}{n} < x$. $\square$

Razmislite: Zašto se to zove *aksiom* kada smo ga dokazali, pa je to *teorem*?

Arhimedov aksiom

Teorem 1.1 (Arhimedov aksiom)

Skup $\mathbb{N}$ prirodnih brojeva nije omeđen odozgo.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da $\mathbb{N}$ je omeđen odozgo.
Tada prema aksiomu potpunosti postoji $M = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$.
Za svaki $n \in \mathbb{N}$ je i $n+1 \in \mathbb{N}$, pa je i $n+1 \leqslant M$, tj. $n \leqslant M-1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
To znači da je i $M-1$ gornja međa skupa $\mathbb{N}$ — kontradikcija. □

Korolar 1.2 (Arhimedov aksiom kakav znamo)

Za sve realne brojeve a i b, $a > 0$, postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $n\,a > b$. □

Korolar 1.3 (i ovo je jedna verzija Arhimedova aksioma)

Za svaki realan broj $x > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $\frac{1}{n} < x$. □

Razmislite: Zašto se to zove *aksiom* kada smo ga dokazali, pa je to *teorem*?

Arhimedov aksiom

Teorem 1.1 (Arhimedov aksiom)

Skup $\mathbb{N}$ prirodnih brojeva nije omeđen odozgo.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da $\mathbb{N}$ je omeđen odozgo.
Tada prema aksiomu potpunosti postoji $M = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$.
Za svaki $n \in \mathbb{N}$ je i $n+1 \in \mathbb{N}$, pa je i $n+1 \leqslant M$, tj. $n \leqslant M-1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
To znači da je i $M-1$ gornja međa skupa $\mathbb{N}$ — kontradikcija. $\square$

Korolar 1.2 (Arhimedov aksiom kakav znamo)

Za sve realne brojeve a i b, $a > 0$, postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $n\,a > b$. $\square$

Korolar 1.3 (i ovo je jedna verzija Arhimedova aksioma)

Za svaki realan broj $x > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $\frac{1}{n} < x$. $\square$

Razmislite: Zašto se to zove *aksiom* kada smo ga dokazali, pa je to *teorem*?

Arhimedov aksiom

Teorem 1.1 (Arhimedov aksiom)

Skup $\mathbb{N}$ prirodnih brojeva nije omeđen odozgo.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da $\mathbb{N}$ je omeđen odozgo.
Tada prema aksiomu potpunosti postoji $M = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$.
Za svaki $n \in \mathbb{N}$ je i $n+1 \in \mathbb{N}$, pa je i $n+1 \leqslant M$, tj. $n \leqslant M-1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
To znači da je i $M-1$ gornja međa skupa $\mathbb{N}$ — kontradikcija. $\square$

Korolar 1.2 (Arhimedov aksiom kakav znamo)

Za sve realne brojeve a i b, $a > 0$, postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $n\,a > b$. $\square$

Korolar 1.3 (i ovo je jedna verzija Arhimedova aksioma)

Za svaki realan broj $x > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $\frac{1}{n} < x$. $\square$

Razmislite: Zašto se to zove *aksiom* kada smo ga dokazali, pa je to *teorem*?

Arhimedov aksiom

Teorem 1.1 (Arhimedov aksiom)

Skup $\mathbb{N}$ prirodnih brojeva nije omeđen odozgo.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da $\mathbb{N}$ je omeđen odozgo.
Tada prema aksiomu potpunosti postoji $M = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$.
Za svaki $n \in \mathbb{N}$ je i $n+1 \in \mathbb{N}$, pa je i $n+1 \leqslant M$, tj. $n \leqslant M-1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
To znači da je i $M-1$ gornja međa skupa $\mathbb{N}$ — kontradikcija. □

Korolar 1.2 (Arhimedov aksiom kakav znamo)

Za sve realne brojeve a i b, $a > 0$, postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $n\,a > b$. □

Korolar 1.3 (i ovo je jedna verzija Arhimedova aksioma)

Za svaki realan broj $x > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $\frac{1}{n} < x$. □

Razmislite: Zašto se to zove *aksiom* kada smo ga dokazali, pa je to *teorem*?

Arhimedov aksiom

Teorem 1.1 (Arhimedov aksiom)

Skup $\mathbb{N}$ prirodnih brojeva nije omeđen odozgo.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da $\mathbb{N}$ je omeđen odozgo.
Tada prema aksiomu potpunosti postoji $M = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$.
Za svaki $n \in \mathbb{N}$ je i $n+1 \in \mathbb{N}$, pa je i $n+1 \leqslant M$, tj. $n \leqslant M-1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
To znači da je i $M - 1$ gornja međa skupa $\mathbb{N}$ — kontradikcija. $\square$

Korolar 1.2 (Arhimedov aksiom kakav znamo)

Za sve realne brojeve a i b, $a > 0$, postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $n\,a > b$. $\square$

Korolar 1.3 (i ovo je jedna verzija Arhimedova aksioma)

Za svaki realan broj $x > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $\frac{1}{n} < x$. $\square$

Razmislite: Zašto se to zove *aksiom* kada smo ga dokazali, pa je to *teorem*?

Arhimedov aksiom

Teorem 1.1 (Arhimedov aksiom)

Skup $\mathbb{N}$ prirodnih brojeva nije omeđen odozgo.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da $\mathbb{N}$ je omeđen odozgo.
Tada prema aksiomu potpunosti postoji $M = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$.
Za svaki $n \in \mathbb{N}$ je i $n+1 \in \mathbb{N}$, pa je i $n+1 \leqslant M$, tj. $n \leqslant M-1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
To znači da je i $M - 1$ gornja međa skupa $\mathbb{N}$ — kontradikcija. $\square$

Korolar 1.2 (Arhimedov aksiom kakav znamo)

Za sve realne brojeve a i b, $a > 0$, postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $n\,a > b$. $\square$

Korolar 1.3 (i ovo je jedna verzija Arhimedova aksioma)

Za svaki realan broj $x > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $\frac{1}{n} < x$. $\square$

Razmislite: Zašto se to zove *aksiom* kada smo ga dokazali, pa je to *teorem*?

Arhimedov aksiom

Teorem 1.1 (Arhimedov aksiom)

Skup $\mathbb{N}$ prirodnih brojeva nije omeđen odozgo.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da $\mathbb{N}$ je omeđen odozgo.
Tada prema aksiomu potpunosti postoji $M = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$.
Za svaki $n \in \mathbb{N}$ je i $n+1 \in \mathbb{N}$, pa je i $n+1 \leqslant M$, tj. $n \leqslant M-1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
To znači da je i $M-1$ gornja međa skupa $\mathbb{N}$ — kontradikcija. $\square$

Korolar 1.2 (Arhimedov aksiom kakav znamo)

Za sve realne brojeve a i b, $a > 0$, postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $n\,a > b$. $\square$

Korolar 1.3 (i ovo je jedna verzija Arhimedova aksioma)

Za svaki realan broj $x > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $\frac{1}{n} < x$. $\square$

Razmislite: Zašto se to zove *aksiom* kada smo ga dokazali, pa je to *teorem*?

Skup $\mathbb{Q}$ je gust u $\mathbb{R}$

Evo još jedne primjene aksioma potpunosti (i ostalih aksioma):

Teorem 1.4

Između svaka dva različita realna broja postoji racionalan broj.

Kažemo da je $\mathbb{Q}$ gust na $\mathbb{R}$.

Dokaz: Neka su $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Tada je $y - x > 0$ pa prema Arhimedovom aksiomu postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $\frac{1}{n} < y - x$.
Neka je $A = \{m \in \mathbb{N} : \frac{m}{n} > x\}$. Skup A je neprazan (opet Arhimed !), a kako je $A \subseteq \mathbb{N}$, postoji najmanji element skupa A. Nazovimo ga a, $a = \min A \in A$ (min A postoji jer je $\mathbb{N}$ *dobro uređen skup*).
To znači da je i $\frac{a}{n} > x$, ali $\frac{a-1}{n} \leqslant x$.
Stoga je $\frac{a}{n} \leqslant x + \frac{1}{n} < x + (y - x) = y$, pa je $\frac{a}{n}$ traženi racionalan broj za koji vrijedi $x < \frac{a}{n} < y$. $\square$

Skup $\mathbb{Q}$ je gust u $\mathbb{R}$

Evo još jedne primjene aksioma potpunosti (i ostalih aksioma):

Teorem 1.4

Između svaka dva različita realna broja postoji racionalan broj.

Kažemo da je $\mathbb{Q}$ gust na $\mathbb{R}$.

Dokaz: Neka su $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Tada je $y - x > 0$ pa prema Arhimedovom aksiomu postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $\frac{1}{n} < y - x$.

Neka je $A = \{m \in \mathbb{N} : \frac{m}{n} > x\}$. Skup A je neprazan (opet Arhimed !), a kako je $A \subseteq \mathbb{N}$, postoji najmanji element skupa A. Nazovimo ga a, $a = \min A \in A$ ($\min A$ postoji jer je $\mathbb{N}$ *dobro uređen skup*).

To znači da je i $\frac{a}{n} > x$, ali $\frac{a-1}{n} \leqslant x$.

Stoga je $\frac{a}{n} \leqslant x + \frac{1}{n} < x + (y - x) = y$, pa je $\frac{a}{n}$ traženi racionalan broj za koji vrijedi $x < \frac{a}{n} < y$. $\square$

Skup $\mathbb{Q}$ je gust u $\mathbb{R}$

Evo još jedne primjene aksioma potpunosti (i ostalih aksioma):

Teorem 1.4

Između svaka dva različita realna broja postoji racionalan broj.

Kažemo da je $\mathbb{Q}$ gust na $\mathbb{R}$.

Dokaz: Neka su $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Tada je $y - x > 0$ pa prema Arhimedovom aksiomu postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $\frac{1}{n} < y - x$.
Neka je $A = \{m \in \mathbb{N} : \frac{m}{n} > x\}$. Skup A je neprazan (opet Arhimed!), a kako je $A \subseteq \mathbb{N}$, postoji najmanji element skupa A. Nazovimo ga a, $a = \min A \in A$ ($\min A$ postoji jer je $\mathbb{N}$ *dobro uređen skup*).
To znači da je i $\frac{a}{n} > x$, ali $\frac{a-1}{n} \leqslant x$.
Stoga je $\frac{a}{n} \leqslant x + \frac{1}{n} < x + (y - x) = y$, pa je $\frac{a}{n}$ traženi racionalan broj za koji vrijedi $x < \frac{a}{n} < y$. □

Skup $\mathbb{Q}$ je gust u $\mathbb{R}$

Evo još jedne primjene aksioma potpunosti (i ostalih aksioma):

Teorem 1.4

Između svaka dva različita realna broja postoji racionalan broj.

Kažemo da je $\mathbb{Q}$ gust na $\mathbb{R}$.

Dokaz: Neka su $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Tada je $y - x > 0$ pa prema Arhimedovom aksiomu postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $\frac{1}{n} < y - x$.
Neka je $A = \{m \in \mathbb{N} : \frac{m}{n} > x\}$. Skup A je neprazan (opet Arhimed !), a kako je $A \subseteq \mathbb{N}$, postoji najmanji element skupa A. Nazovimo ga a, $a = \min A \in A$ ($\min A$ postoji jer je $\mathbb{N}$ *dobro uređen skup*).
To znači da je i $\frac{a}{n} > x$, ali $\frac{a-1}{n} \leqslant x$.
Stoga je $\frac{a}{n} \leqslant x + \frac{1}{n} < x + (y - x) = y$, pa je $\frac{a}{n}$ traženi racionalan broj za koji vrijedi $x < \frac{a}{n} < y$. $\square$

Skup $\mathbb{Q}$ je gust u $\mathbb{R}$

Evo još jedne primjene aksioma potpunosti (i ostalih aksioma):

Teorem 1.4

Između svaka dva različita realna broja postoji racionalan broj.

Kažemo da je $\mathbb{Q}$ gust na $\mathbb{R}$.

Dokaz: Neka su $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Tada je $y - x > 0$ pa prema Arhimedovom aksiomu postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $\frac{1}{n} < y - x$.
Neka je $A = \{m \in \mathbb{N} : \frac{m}{n} > x\}$. Skup A je neprazan (opet Arhimed !), a kako je $A \subseteq \mathbb{N}$, postoji najmanji element skupa A. Nazovimo ga a, $a = \min A \in A$ (min A postoji jer je $\mathbb{N}$ *dobro uređen skup*).
To znači da je i $\frac{a}{n} > x$, ali $\frac{a-1}{n} \leqslant x$.
Stoga je $\frac{a}{n} \leqslant x + \frac{1}{n} < x + (y - x) = y$, pa je $\frac{a}{n}$ traženi racionalan broj za koji vrijedi $x < \frac{a}{n} < y$. $\square$

Skup $\mathbb{Q}$ je gust u $\mathbb{R}$

Evo još jedne primjene aksioma potpunosti (i ostalih aksioma):

Teorem 1.4

Između svaka dva različita realna broja postoji racionalan broj.

Kažemo da je $\mathbb{Q}$ gust na $\mathbb{R}$.

Dokaz: Neka su $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Tada je $y - x > 0$ pa prema Arhimedovom aksiomu postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $\frac{1}{n} < y - x$.
Neka je $A = \{m \in \mathbb{N} : \frac{m}{n} > x\}$. Skup A je neprazan (opet Arhimed !), a kako je $A \subseteq \mathbb{N}$, postoji najmanji element skupa A. Nazovimo ga a, $a = \min A \in A$ (min A postoji jer je $\mathbb{N}$ *dobro uređen skup*).
To znači da je i $\frac{a}{n} > x$, ali $\frac{a-1}{n} \leqslant x$.
Stoga je $\frac{a}{n} \leqslant x + \frac{1}{n} < x + (y - x) = y$, pa je $\frac{a}{n}$ traženi racionalan broj za koji vrijedi $x < \frac{a}{n} < y$. $\square$

Primjena aksioma potpunosti: postoji broj $\sqrt{2}$

I još jedne:

Teorem 1.5

Postoji realan broj δ takav da je $\delta^2 = 2$.

Dokaz: Neka je $S = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$. Skup S je neprazan (npr. $1 \in S$), i omeđen je odozgo (jedna gornja međa je npr. 10, jer za svaki $y \geqslant 10$ vrijedi $y^2 \geqslant 100 > 2$, pa $y \notin S$).
Dakle, za svaki $x \in S$ je $x < 10$.
Prema aksiomu potpunosti postoji $\sup S$, označimo ga s δ.
Očito je $\delta \geqslant 1 > 0$ jer je $1 \in S$.

Pokazat ćemo da je $\delta^2 = 2$ tako da pokažemo da pretpostavka $\delta^2 \neq 2$ vodi do kontradikcije.

Primjena aksioma potpunosti: postoji broj $\sqrt{2}$

I još jedne:

Teorem 1.5

Postoji realan broj δ takav da je $\delta^2 = 2$.

Dokaz: Neka je $S = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$. Skup S je neprazan (npr. $1 \in S$), i omeđen je odozgo (jedna gornja međa je npr. 10, jer za svaki $y \geqslant 10$ vrijedi $y^2 \geqslant 100 > 2$, pa $y \notin S$).
Dakle, za svaki $x \in S$ je $x < 10$.
Prema aksiomu potpunosti postoji $\sup S$, označimo ga s δ.
Očito je $\delta \geqslant 1 > 0$ jer je $1 \in S$.

Pokazat ćemo da je $\delta^2 = 2$ tako da pokažemo da pretpostavka $\delta^2 \neq 2$ vodi do kontradikcije.

Primjena aksioma potpunosti: postoji broj $\sqrt{2}$

I još jedne:

Teorem 1.5

Postoji realan broj δ takav da je $\delta^2 = 2$.

Dokaz: Neka je $S = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$. Skup S je neprazan (npr. $1 \in S$), i omeđen je odozgo (jedna gornja međa je npr. 10, jer za svaki $y \geqslant 10$ vrijedi $y^2 \geqslant 100 > 2$, pa $y \notin S$).
Dakle, za svaki $x \in S$ je $x < 10$.
Prema aksiomu potpunosti postoji $\sup S$, označimo ga s δ.
Očito je $\delta \geqslant 1 > 0$ jer je $1 \in S$.

Pokazat ćemo da je $\delta^2 = 2$ tako da pokažemo da pretpostavka $\delta^2 \neq 2$ vodi do kontradikcije.

Primjena aksioma potpunosti: postoji broj $\sqrt{2}$

I još jedne:

Teorem 1.5

Postoji realan broj δ takav da je $\delta^2 = 2$.

Dokaz: Neka je $S = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$. Skup S je neprazan (npr. $1 \in S$), i omeđen je odozgo (jedna gornja međa je npr. 10, jer za svaki $y \geqslant 10$ vrijedi $y^2 \geqslant 100 > 2$, pa $y \notin S$).

Dakle, za svaki $x \in S$ je $x < 10$.

Prema aksiomu potpunosti postoji $\sup S$, označimo ga s δ.

Očito je $\delta \geqslant 1 > 0$ jer je $1 \in S$.

Pokazat ćemo da je $\delta^2 = 2$ tako da pokažemo da pretpostavka $\delta^2 \neq 2$ vodi do kontradikcije.

Primjena aksioma potpunosti: postoji broj $\sqrt{2}$

I još jedne:

Teorem 1.5

Postoji realan broj δ takav da je $\delta^2 = 2$.

Dokaz: Neka je $S = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$. Skup S je neprazan (npr. $1 \in S$), i omeđen je odozgo (jedna gornja međa je npr. 10, jer za svaki $y \geqslant 10$ vrijedi $y^2 \geqslant 100 > 2$, pa $y \notin S$).
Dakle, za svaki $x \in S$ je $x < 10$.
Prema aksiomu potpunosti postoji $\sup S$, označimo ga s δ.
Očito je $\delta \geqslant 1 > 0$ jer je $1 \in S$.

Pokazat ćemo da je $\delta^2 = 2$ tako da pokažemo da pretpostavka $\delta^2 \neq 2$ vodi do kontradikcije.

Primjena aksioma potpunosti: postoji broj $\sqrt{2}$

I još jedne:

Teorem 1.5

Postoji realan broj δ takav da je $\delta^2 = 2$.

Dokaz: Neka je $S = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$. Skup S je neprazan (npr. $1 \in S$), i omeđen je odozgo (jedna gornja međa je npr. 10, jer za svaki $y \geqslant 10$ vrijedi $y^2 \geqslant 100 > 2$, pa $y \notin S$).

Dakle, za svaki $x \in S$ je $x < 10$.

Prema aksiomu potpunosti postoji $\sup S$, označimo ga s δ.

Očito je $\delta \geqslant 1 > 0$ jer je $1 \in S$.

Pokazat ćemo da je $\delta^2 = 2$ tako da pokažemo da pretpostavka $\delta^2 \neq 2$ vodi do kontradikcije.

Primjena aksioma potpunosti: postoji broj $\sqrt{2}$

I još jedne:

Teorem 1.5

Postoji realan broj δ takav da je $\delta^2 = 2$.

Dokaz: Neka je $S = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$. Skup S je neprazan (npr. $1 \in S$), i omeđen je odozgo (jedna gornja međa je npr. 10, jer za svaki $y \geqslant 10$ vrijedi $y^2 \geqslant 100 > 2$, pa $y \notin S$).
Dakle, za svaki $x \in S$ je $x < 10$.
Prema aksiomu potpunosti postoji $\sup S$, označimo ga s δ.
Očito je $\delta \geqslant 1 > 0$ jer je $1 \in S$.

Pokazat ćemo da je $\delta^2 = 2$ tako da pokažemo da pretpostavka $\delta^2 \neq 2$ vodi do kontradikcije.

Primjena aksioma potpunosti: postoji broj $\sqrt{2}$

I još jedne:

Teorem 1.5

Postoji realan broj δ takav da je $\delta^2 = 2$.

Dokaz: Neka je $S = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$. Skup S je neprazan (npr. $1 \in S$), i omeđen je odozgo (jedna gornja međa je npr. 10, jer za svaki $y \geqslant 10$ vrijedi $y^2 \geqslant 100 > 2$, pa $y \notin S$).
Dakle, za svaki $x \in S$ je $x < 10$.
Prema aksiomu potpunosti postoji $\sup S$, označimo ga s δ.
Očito je $\delta \geqslant 1 > 0$ jer je $1 \in S$.

Pokazat ćemo da je $\delta^2 = 2$ tako da pokažemo da pretpostavka $\delta^2 \neq 2$ vodi do kontradikcije.

$\sqrt{2}$ postoji ! (završetak dokaza)

Pretpostavimo $\delta^2 > 2$

Tada je $\frac{\delta^2-2}{2\delta} > 0$ pa postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $0 < \frac{1}{n} < \frac{\delta^2-2}{2\delta}$ (Arhimed). Stoga je

$$(\delta - \tfrac{1}{n})^2 = \delta^2 - 2\tfrac{\delta}{n} + \tfrac{1}{n^2} > \delta^2 - 2\tfrac{\delta}{n} > \delta^2 - (\delta^2 - 2) = 2\,,$$

pa za svaki $x \in S$ vrijedi $x^2 < 2 < (\delta - \frac{1}{n})^2$, tj. $x < \delta - \frac{1}{n}$, u suprotnosti s minimalnošću od δ (δ je *najmanja gornja međa skupa S*).

Pretpostavimo $\delta^2 < 2$

Neka je $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $0 < \frac{1}{n} < \frac{2-\delta^2}{4\delta}$ i $\frac{1}{n} < 2\delta$. Tada je

$$\begin{aligned}(\delta + \tfrac{1}{n})^2 = \delta^2 + 2\tfrac{\delta}{n} + \tfrac{1}{n^2} &< \delta^2 + 2\tfrac{\delta}{n} + 2\tfrac{\delta}{n} && (\text{jer je } \tfrac{1}{n} < 2\delta)\\ &< \delta^2 + 2 - \delta^2 && (\text{jer je } 4\tfrac{\delta}{n} < 2 - \delta^2)\\ &= 2\,.\end{aligned}$$

Stoga je $\delta + \frac{1}{n} \in S$, protivno činjenici da je δ gornja međa skupa S. $\square$

$\sqrt{2}$ postoji ! (završetak dokaza)

Pretpostavimo $\delta^2 > 2$

Tada je $\frac{\delta^2-2}{2\delta} > 0$ pa postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $0 < \boxed{\frac{1}{n} < \frac{\delta^2-2}{2\delta}}$ (Arhimed).

Stoga je

$$\left(\delta - \frac{1}{n}\right)^2 = \delta^2 - 2\frac{\delta}{n} + \frac{1}{n^2} > \delta^2 - 2\frac{\delta}{n} > \delta^2 - (\delta^2 - 2) = 2\,,$$

pa za svaki $x \in S$ vrijedi $x^2 < 2 < (\delta - \frac{1}{n})^2$, tj. $x < \delta - \frac{1}{n}$,
u suprotnosti s minimalnošću od δ (δ je *najmanja gornja međa skupa* S).

Pretpostavimo $\delta^2 < 2$

Neka je $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $0 < \frac{1}{n} < \frac{2-\delta^2}{4\delta}$ i $\frac{1}{n} < 2\delta$. Tada je

$$\begin{aligned}
(\delta + \tfrac{1}{n})^2 = \delta^2 + 2\tfrac{\delta}{n} + \tfrac{1}{n^2} &< \delta^2 + 2\tfrac{\delta}{n} + 2\tfrac{\delta}{n} && (\text{jer je } \tfrac{1}{n} < 2\delta) \\
&< \delta^2 + 2 - \delta^2 && (\text{jer je } 4\tfrac{\delta}{n} < 2 - \delta^2) \\
&= 2\,.
\end{aligned}$$

Stoga je $\delta + \frac{1}{n} \in S$, protivno činjenici da je δ gornja međa skupa S. $\square$

$\sqrt{2}$ postoji ! (završetak dokaza)

Pretpostavimo $\delta^2 > 2$

Tada je $\frac{\delta^2-2}{2\delta} > 0$ pa postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $0 < \boxed{\frac{1}{n} < \frac{\delta^2-2}{2\delta}}$ (Arhimed).
Stoga je

$$\left(\delta - \frac{1}{n}\right)^2 = \delta^2 - 2\frac{\delta}{n} + \frac{1}{n^2} > \delta^2 - 2\frac{\delta}{n} > \delta^2 - (\delta^2 - 2) = 2\,,$$

pa za svaki $x \in S$ vrijedi $x^2 < 2 < (\delta - \frac{1}{n})^2$, tj. $x < \delta - \frac{1}{n}$,
u suprotnosti s minimalnošću od δ (δ je *najmanja gornja međa skupa S*).

Pretpostavimo $\delta^2 < 2$

Neka je $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $0 < \frac{1}{n} < \frac{2-\delta^2}{4\delta}$ i $\frac{1}{n} < 2\delta$. Tada je

$$\begin{aligned}
\left(\delta + \tfrac{1}{n}\right)^2 = \delta^2 + 2\tfrac{\delta}{n} + \tfrac{1}{n^2} &< \delta^2 + 2\tfrac{\delta}{n} + 2\tfrac{\delta}{n} && (\text{jer je } \tfrac{1}{n} < 2\delta)\\
&< \delta^2 + 2 - \delta^2 && (\text{jer je } 4\tfrac{\delta}{n} < 2 - \delta^2)\\
&= 2\,.
\end{aligned}$$

Stoga je $\delta + \frac{1}{n} \in S$, protivno činjenici da je δ gornja međa skupa S. $\square$

$\sqrt{2}$ postoji ! (završetak dokaza)

Pretpostavimo $\delta^2 > 2$

Tada je $\frac{\delta^2-2}{2\delta} > 0$ pa postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $0 < \boxed{\frac{1}{n} < \frac{\delta^2-2}{2\delta}}$ (Arhimed).
Stoga je

$$\left(\delta - \frac{1}{n}\right)^2 = \delta^2 - 2\frac{\delta}{n} + \frac{1}{n^2} > \delta^2 - 2\frac{\delta}{n} > \delta^2 - (\delta^2 - 2) = 2\,,$$

pa za svaki $x \in S$ vrijedi $x^2 < 2 < (\delta - \frac{1}{n})^2$, tj. $x < \delta - \frac{1}{n}$,
u suprotnosti s minimalnošću od δ (δ je *najmanja gornja međa skupa* S).

Pretpostavimo $\delta^2 < 2$

Neka je $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $0 < \frac{1}{n} < \frac{2-\delta^2}{4\delta}$ i $\frac{1}{n} < 2\delta$. Tada je

$$\begin{aligned}
(\delta + \tfrac{1}{n})^2 = \delta^2 + 2\tfrac{\delta}{n} + \tfrac{1}{n^2} &< \delta^2 + 2\tfrac{\delta}{n} + 2\tfrac{\delta}{n} && (\text{jer je } \tfrac{1}{n} < 2\delta) \\
&< \delta^2 + 2 - \delta^2 && (\text{jer je } 4\tfrac{\delta}{n} < 2 - \delta^2) \\
&= 2\,.
\end{aligned}$$

Stoga je $\delta + \frac{1}{n} \in S$, protivno činjenici da je δ gornja međa skupa S. $\square$

$\sqrt{2}$ postoji ! (završetak dokaza)

Pretpostavimo $\delta^2 > 2$

Tada je $\frac{\delta^2-2}{2\delta} > 0$ pa postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $0 < \boxed{\frac{1}{n} < \frac{\delta^2-2}{2\delta}}$ (Arhimed).
Stoga je

$$\left(\delta - \frac{1}{n}\right)^2 = \delta^2 - 2\frac{\delta}{n} + \frac{1}{n^2} > \delta^2 - 2\frac{\delta}{n} > \delta^2 - (\delta^2 - 2) = 2\,,$$

pa za svaki $x \in S$ vrijedi $x^2 < 2 < (\delta - \frac{1}{n})^2$, tj. $x < \delta - \frac{1}{n}$,
u suprotnosti s minimalnošću od δ (δ je *najmanja gornja međa skupa S*).

Pretpostavimo $\delta^2 < 2$

Neka je $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $0 < \frac{1}{n} < \frac{2-\delta^2}{4\delta}$ i $\frac{1}{n} < 2\delta$. Tada je

$$\begin{aligned}\left(\delta + \frac{1}{n}\right)^2 = \delta^2 + 2\frac{\delta}{n} + \frac{1}{n^2} &< \delta^2 + 2\frac{\delta}{n} + 2\frac{\delta}{n} && \text{(jer je } \tfrac{1}{n} < 2\delta\text{)}\\ &< \delta^2 + 2 - \delta^2 && \text{(jer je } 4\tfrac{\delta}{n} < 2 - \delta^2\text{)}\\ &= 2\,.\end{aligned}$$

Stoga je $\delta + \frac{1}{n} \in S$, protivno činjenici da je δ gornja međa skupa S. $\square$

$\sqrt{2}$ postoji ! (završetak dokaza)

Pretpostavimo $\delta^2 > 2$

Tada je $\frac{\delta^2-2}{2\delta} > 0$ pa postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $0 < \boxed{\frac{1}{n} < \frac{\delta^2-2}{2\delta}}$ (Arhimed).
Stoga je

$$\left(\delta - \tfrac{1}{n}\right)^2 = \delta^2 - 2\tfrac{\delta}{n} + \tfrac{1}{n^2} > \delta^2 - 2\tfrac{\delta}{n} > \delta^2 - (\delta^2 - 2) = 2\,,$$

pa za svaki $x \in S$ vrijedi $x^2 < 2 < (\delta - \frac{1}{n})^2$, tj. $x < \delta - \frac{1}{n}$,
u suprotnosti s minimalnošću od δ (δ je *najmanja gornja međa skupa* S).

Pretpostavimo $\delta^2 < 2$

Neka je $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $0 < \frac{1}{n} < \frac{2-\delta^2}{4\delta}$ i $\frac{1}{n} < 2\delta$. Tada je

$$\begin{aligned}
(\delta + \tfrac{1}{n})^2 = \delta^2 + 2\tfrac{\delta}{n} + \tfrac{1}{n^2} &< \delta^2 + 2\tfrac{\delta}{n} + 2\tfrac{\delta}{n} && (\text{jer je } \tfrac{1}{n} < 2\delta) \\
&< \delta^2 + 2 - \delta^2 && (\text{jer je } 4\tfrac{\delta}{n} < 2 - \delta^2) \\
&= 2\,.
\end{aligned}$$

Stoga je $\delta + \frac{1}{n} \in S$, protivno činjenici da je δ gornja međa skupa S. $\square$

$\sqrt{2}$ postoji ! (završetak dokaza)

Pretpostavimo $\delta^2 > 2$

Tada je $\frac{\delta^2-2}{2\delta} > 0$ pa postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $0 < \boxed{\frac{1}{n} < \frac{\delta^2-2}{2\delta}}$ (Arhimed).
Stoga je

$$\left(\delta - \tfrac{1}{n}\right)^2 = \delta^2 - 2\tfrac{\delta}{n} + \tfrac{1}{n^2} > \delta^2 - 2\tfrac{\delta}{n} > \delta^2 - (\delta^2 - 2) = 2\,,$$

pa za svaki $x \in S$ vrijedi $x^2 < 2 < (\delta - \frac{1}{n})^2$, tj. $x < \delta - \frac{1}{n}$,
u suprotnosti s minimalnošću od δ (δ je *najmanja gornja međa skupa* S).

Pretpostavimo $\delta^2 < 2$

Neka je $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $0 < \frac{1}{n} < \frac{2-\delta^2}{4\delta}$ i $\frac{1}{n} < 2\delta$. Tada je

$$\begin{aligned}
(\delta + \tfrac{1}{n})^2 = \delta^2 + 2\tfrac{\delta}{n} + \tfrac{1}{n^2} &< \delta^2 + 2\tfrac{\delta}{n} + 2\tfrac{\delta}{n} && (\text{jer je } \tfrac{1}{n} < 2\delta) \\
&< \delta^2 + 2 - \delta^2 && (\text{jer je } 4\tfrac{\delta}{n} < 2 - \delta^2) \\
&= 2\,.
\end{aligned}$$

Stoga je $\delta + \frac{1}{n} \in S$, protivno činjenici da je δ gornja međa skupa S. $\square$

Niz — prvi ključni pojam u analizi

Niz realnih brojeva je svaka funkcija $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Kako je takva funkcija jednoznačno određena svojim vrijednostima $x(n)$, koje je uobičajeno označivati x_n, na funkciju x možemo gledati i kao na beskonačan uređen slijed, ne nužno različitih, realnih brojeva $x_1, x_2, x_3, \ldots,$ koji ćemo kratko označivati (x_n) ili $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

VAŽNO je razlikovati niz (x_n) od skupa vrijednosti $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Niz (x_n) je *funkcija* s $\mathbb{N}$ u $\mathbb{R}$, dakle $x \equiv (x_n)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$,
dok je $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} = x(\mathbb{N})$ *podskup* skupa $\mathbb{R}$.
Naprimjer, ako je (x_n) niz $2, 0, 2, 0, \ldots,$ dakle $x_n = 1-(-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$,
onda je $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{2, 0\}$ — dvočlan skup.

Niz — prvi ključni pojam u analizi

Niz realnih brojeva je svaka funkcija $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Kako je takva funkcija jednoznačno određena svojim vrijednostima $x(n)$, koje je uobičajeno označivati x_n, na funkciju x možemo gledati i kao na beskonačan uređen slijed, ne nužno različitih, realnih brojeva $x_1, x_2, x_3, \ldots,$ koji ćemo kratko označivati (x_n) ili $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

VAŽNO je razlikovati niz (x_n) od skupa vrijednosti $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Niz (x_n) je *funkcija* s $\mathbb{N}$ u $\mathbb{R}$, dakle $x \equiv (x_n)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$,
dok je $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} = x(\mathbb{N})$ *podskup* skupa $\mathbb{R}$.
Naprimjer, ako je (x_n) niz $2, 0, 2, 0, \ldots,$ dakle $x_n = 1-(-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$,
onda je $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{2, 0\}$ — dvočlan skup.

Niz — prvi ključni pojam u analizi

Niz realnih brojeva je svaka funkcija $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Kako je takva funkcija jednoznačno određena svojim vrijednostima $x(n)$, koje je uobičajeno označivati x_n, na funkciju x možemo gledati i kao na beskonačan uređen slijed, ne nužno različitih, realnih brojeva $x_1, x_2, x_3, \ldots,$ koji ćemo kratko označivati (x_n) ili $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

VAŽNO je razlikovati niz (x_n) od skupa vrijednosti $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Niz (x_n) je *funkcija* s $\mathbb{N}$ u $\mathbb{R}$, dakle $x \equiv (x_n)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$,
dok je $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} = x(\mathbb{N})$ *podskup* skupa $\mathbb{R}$.
Naprimjer, ako je (x_n) niz $2, 0, 2, 0, \ldots$, dakle $x_n = 1-(-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$,
onda je $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{2, 0\}$ — dvočlan skup.

Niz — prvi ključni pojam u analizi

Niz realnih brojeva je svaka funkcija $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Kako je takva funkcija jednoznačno određena svojim vrijednostima $x(n)$, koje je uobičajeno označivati x_n, na funkciju x možemo gledati i kao na beskonačan uređen slijed, ne nužno različitih, realnih brojeva $x_1, x_2, x_3, \ldots$, koji ćemo kratko označivati (x_n) ili $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

VAŽNO je razlikovati niz (x_n) od skupa vrijednosti $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Niz (x_n) je *funkcija* s $\mathbb{N}$ u $\mathbb{R}$, dakle $x \equiv (x_n)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$,
dok je $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} = x(\mathbb{N})$ *podskup* skupa $\mathbb{R}$.
Naprimjer, ako je (x_n) niz $2, 0, 2, 0, \ldots$, dakle $x_n = 1-(-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$,
onda je $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{2, 0\}$ — dvočlan skup.

Konvergencija

Definicija 2.1

Za niz (x_n) kažemo da *konvergira* ako postoji $\ell \in \mathbb{R}$ t.d. za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_* \in \mathbb{N}$ t.d. je $|x_n - \ell| < \varepsilon$ za sve $n \geqslant n_*$.
Drugim riječima, niz (x_n) realnih brojeva konvergira ako
$\exists \ell \in \mathbb{R}$ t.d. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_* \in \mathbb{N}$ t.d. $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant n_* \Rightarrow |x_n - \ell| < \varepsilon)$.

- Pokazuje se da ako takav broj ℓ postoji, onda je on jedinstven, pa se naziva *limesom* niza, oznaka $\ell = \lim x_n$ ili $\ell = \lim\limits_n x_n$ ili $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, i kaže se da je niz (x_n) *konvergentan*.

  Piše se i $x_n \to \ell$, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} \ell$

  i govori da (x_n) *teži* k ℓ (kada n teži u beskonačnost) (iako nitko nikamo ne teži).
  Dakle, niz (x_n) konvergira broju ℓ ako se za *svaku*, unaprijed zadanu grešku, *svi* članovi niza, osim možda njih najviše konačno mnogo, od ℓ razlikuju za manje od zadane greške.

Konvergencija

Definicija 2.1

Za niz (x_n) kažemo da *konvergira* ako postoji $\ell \in \mathbb{R}$ t.d. za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_* \in \mathbb{N}$ t.d. je $|x_n - \ell| < \varepsilon$ za sve $n \geqslant n_*$.
Drugim riječima, niz (x_n) realnih brojeva konvergira ako
$\exists \ell \in \mathbb{R}$ t.d. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_* \in \mathbb{N}$ t.d. $\forall n \in \mathbb{N} \ (n \geqslant n_* \Rightarrow |x_n - \ell| < \varepsilon)$.

- Pokazuje se da ako takav broj ℓ postoji, onda je on jedinstven, pa se naziva *limesom* niza, oznaka $\ell = \lim x_n$ ili $\ell = \lim\limits_n x_n$ ili $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, i kaže se da je niz (x_n) *konvergentan*.

Piše se i $x_n \to \ell$, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} \ell$

i govori da (x_n) *teži* k ℓ (kada n teži u beskonačnost) (iako nitko nikamo ne teži).
Dakle, niz (x_n) konvergira broju ℓ ako se za *svaku*, unaprijed zadanu grešku, *svi* članovi niza, osim možda njih najviše konačno mnogo, od ℓ razlikuju za manje od zadane greške.

Konvergencija

Definicija 2.1

Za niz (x_n) kažemo da *konvergira* ako postoji $\ell \in \mathbb{R}$ t.d. za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_* \in \mathbb{N}$ t.d. je $|x_n - \ell| < \varepsilon$ za sve $n \geqslant n_*$.
Drugim riječima, niz (x_n) realnih brojeva konvergira ako
$\exists \ell \in \mathbb{R}$ t.d. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_* \in \mathbb{N}$ t.d. $\forall n \in \mathbb{N}\ (n \geqslant n_* \Rightarrow |x_n - \ell| < \varepsilon)$.

- Pokazuje se da ako takav broj ℓ postoji, onda je on jedinstven, pa se naziva *limesom* niza, oznaka $\ell = \lim x_n$ ili $\ell = \lim\limits_n x_n$ ili $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, i kaže se da je niz (x_n) *konvergentan*.

  Piše se i $x_n \to \ell$, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} \ell$

  i govori da (x_n) *teži* k ℓ (kada n teži u beskonačnost) (iako nitko nikamo ne teži).

  Dakle, niz (x_n) konvergira broju ℓ ako se za *svaku*, unaprijed zadanu grešku, *svi* članovi niza, osim možda njih najviše konačno mnogo, od ℓ razlikuju za manje od zadane greške.

Konvergencija

Definicija 2.1

Za niz (x_n) kažemo da *konvergira* ako postoji $\ell \in \mathbb{R}$ t.d. za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_* \in \mathbb{N}$ t.d. je $|x_n - \ell| < \varepsilon$ za sve $n \geqslant n_*$.
Drugim riječima, niz (x_n) realnih brojeva konvergira ako
$\exists \ell \in \mathbb{R}$ t.d. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_* \in \mathbb{N}$ t.d. $\forall n \in \mathbb{N} \ (n \geqslant n_* \Rightarrow |x_n - \ell| < \varepsilon)$.

- Pokazuje se da ako takav broj ℓ postoji, onda je on jedinstven, pa se naziva *limesom* niza, oznaka $\ell = \lim x_n$ ili $\ell = \lim\limits_n x_n$ ili $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, i kaže se da je niz (x_n) *konvergentan*.

  Piše se i $x_n \to \ell$, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} \ell$

  i govori da (x_n) *teži* k ℓ (kada n teži u beskonačnost) (iako nitko nikamo ne teži).
  Dakle, niz (x_n) konvergira broju ℓ ako se za *svaku*, unaprijed zadanu grešku, *svi* članovi niza, osim možda njih najviše konačno mnogo, od ℓ razlikuju za manje od zadane greške.

Ustanoviti konvergenciju nije lako !

A kako ustanoviti konvergira li neki konkretno zadani niz — ili ne?

U jednostavnim situacijama, kada možemo nekako pogoditi broj ℓ (ili nam ga netko šapne), onda je to obično lako.

Ali što je naprimjer s nizovima

$$x_n = (1 + \tfrac{1}{n})^n, \quad n \in \mathbb{N}$$
$$s_n = 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \cdots + \tfrac{1}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}\ ?$$

Kako za te nizove pogoditi limes?

e ? Tko je e ? Otkud nama e ?

Broj e se upravo definira kao limes tih nizova, pa konvergenciju tih nizova ne možemo ustanoviti direktno iz definicije konvergencije.

Treba nam dakle neko *unutarnje* svojstvo niza koje će osigurati konvergenciju — svojstvo u kojem se ne pojavljuje limes.

Ustanoviti konvergenciju nije lako !

A kako ustanoviti konvergira li neki konkretno zadani niz — ili ne? U jednostavnim situacijama, kada možemo nekako pogoditi broj ℓ (ili nam ga netko šapne), onda je to obično lako.

Ali što je naprimjer s nizovima

$$x_n = (1 + \tfrac{1}{n})^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}\,?$$

Kako za te nizove pogoditi limes?

e ? Tko je e ? Otkud nama e ?

Broj e se upravo definira kao limes tih nizova, pa konvergenciju tih nizova ne možemo ustanoviti direktno iz definicije konvergencije.

Treba nam dakle neko *unutarnje* svojstvo niza koje će osigurati konvergenciju — svojstvo u kojem se ne pojavljuje limes.

Ustanoviti konvergenciju nije lako !

A kako ustanoviti konvergira li neki konkretno zadani niz — ili ne?
U jednostavnim situacijama, kada možemo nekako pogoditi broj ℓ (ili nam ga netko šapne), onda je to obično lako.
Ali što je naprimjer s nizovima

$$x_n = (1 + \tfrac{1}{n})^n, \quad n \in \mathbb{N}$$
$$s_n = 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \cdots + \tfrac{1}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}\,?$$

Kako za te nizove pogoditi limes?

e ? Tko je e ? Otkud nama e ?

Broj e se upravo definira kao limes tih nizova, pa konvergenciju tih nizova ne možemo ustanoviti direktno iz definicije konvergencije.

Treba nam dakle neko *unutarnje* svojstvo niza koje će osigurati konvergenciju — svojstvo u kojem se ne pojavljuje limes.

Ustanoviti konvergenciju nije lako !

A kako ustanoviti konvergira li neki konkretno zadani niz — ili ne?
U jednostavnim situacijama, kada možemo nekako pogoditi broj ℓ (ili nam ga netko šapne), onda je to obično lako.
Ali što je naprimjer s nizovima

$$x_n = (1 + \tfrac{1}{n})^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}\ ?$$

Kako za te nizove pogoditi limes?

e ? Tko je e ? Otkud nama e ?

Broj e se upravo definira kao limes tih nizova, pa konvergenciju tih nizova ne možemo ustanoviti direktno iz definicije konvergencije.

Treba nam dakle neko *unutarnje* svojstvo niza koje će osigurati konvergenciju — svojstvo u kojem se ne pojavljuje limes.

Ustanoviti konvergenciju nije lako!

A kako ustanoviti konvergira li neki konkretno zadani niz — ili ne?
U jednostavnim situacijama, kada možemo nekako pogoditi broj ℓ (ili nam ga netko šapne), onda je to obično lako.
Ali što je naprimjer s nizovima

$$x_n = (1 + \tfrac{1}{n})^n, \qquad n \in \mathbb{N}$$
$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \qquad n \in \mathbb{N}\,?$$

Kako za te nizove pogoditi limes?

e? Tko je e? Otkud nama e?

Broj e se upravo definira kao limes tih nizova, pa konvergenciju tih nizova ne možemo ustanoviti direktno iz definicije konvergencije.

Treba nam dakle neko *unutarnje* svojstvo niza koje će osigurati konvergenciju — svojstvo u kojem se ne pojavljuje limes.

Ustanoviti konvergenciju nije lako !

A kako ustanoviti konvergira li neki konkretno zadani niz — ili ne?
U jednostavnim situacijama, kada možemo nekako pogoditi broj ℓ (ili nam ga netko šapne), onda je to obično lako.
Ali što je naprimjer s nizovima

$$x_n = (1 + \tfrac{1}{n})^n, \qquad n \in \mathbb{N}$$
$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \qquad n \in \mathbb{N}\ ?$$

Kako za te nizove pogoditi limes?

e ? Tko je e ? Otkud nama e ?

Broj e se upravo definira kao limes tih nizova, pa konvergenciju tih nizova ne možemo ustanoviti direktno iz definicije konvergencije.

Treba nam dakle neko *unutarnje* svojstvo niza koje će osigurati konvergenciju — svojstvo u kojem se ne pojavljuje limes.

Ustanoviti konvergenciju nije lako !

A kako ustanoviti konvergira li neki konkretno zadani niz — ili ne?
U jednostavnim situacijama, kada možemo nekako pogoditi broj ℓ (ili nam ga netko šapne), onda je to obično lako.
Ali što je naprimjer s nizovima

$$x_n = (1 + \tfrac{1}{n})^n, \quad n \in \mathbb{N}$$
$$s_n = 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \cdots + \tfrac{1}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}\,?$$

Kako za te nizove pogoditi limes?

e ? Tko je e ? Otkud nama e ?

Broj e se upravo definira kao limes tih nizova, pa konvergenciju tih nizova ne možemo ustanoviti direktno iz definicije konvergencije.

Treba nam dakle neko *unutarnje* svojstvo niza koje će osigurati konvergenciju — svojstvo u kojem se ne pojavljuje limes.

Ustanoviti konvergenciju nije lako !

A kako ustanoviti konvergira li neki konkretno zadani niz — ili ne?
U jednostavnim situacijama, kada možemo nekako pogoditi broj ℓ (ili nam ga netko šapne), onda je to obično lako.
Ali što je naprimjer s nizovima

$$x_n = (1 + \tfrac{1}{n})^n, \quad n \in \mathbb{N}$$
$$s_n = 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \cdots + \tfrac{1}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}\ ?$$

Kako za te nizove pogoditi limes?

e ? Tko je e ? Otkud nama e ?

Broj e se upravo definira kao limes tih nizova, pa konvergenciju tih nizova ne možemo ustanoviti direktno iz definicije konvergencije.

Treba nam dakle neko *unutarnje* svojstvo niza koje će osigurati konvergenciju — svojstvo u kojem se ne pojavljuje limes.

Dva korisna *unutarnja* svojstva nizova realnih brojeva

Sljedeća dva teorema nećemo dokazivati. Oba su, barem jednom, dokazana u nekom od kolegija Matematičke analize.

Teorem 2.2

Svaki monoton ograđen niz realnih brojeva konvergira.

Za drugi nam najprije treba definicija:

Definicija 2.3

Za (x_n) kažemo da je *Cauchyjev niz* ili da *ima Cauchyjevo svojstvo* ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_* \in \mathbb{N}$ t.d. je $|x_n - x_m| < \varepsilon$ za sve $m, n \geqslant n_*$.

Teorem 2.4 (Cauchyjev kriterij konvergencije niza realnih brojeva)

Niz (x_n) realnih brojeva konvergira ako i samo ako je Cauchyjev.

Iako iskazi oba ova teorema imaju smisla u svakom uređenom polju, teoremi općenito ne vrijede, čak niti uz Arhimedov aksiom. Ali svaki od tih teorema je u uređenom Arhimedovom polju ekvivalentan aksiomu potpunosti.

Dva korisna *unutarnja* svojstva nizova realnih brojeva

Sljedeća dva teorema nećemo dokazivati. Oba su, barem jednom, dokazana u nekom od kolegija Matematičke analize.

Teorem 2.2

Svaki monoton ograđen niz realnih brojeva konvergira.

Za drugi nam najprije treba definicija:

Definicija 2.3

Za (x_n) kažemo da je *Cauchyjev niz* ili da *ima Cauchyjevo svojstvo* ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_* \in \mathbb{N}$ t.d. je $|x_n - x_m| < \varepsilon$ za sve $m, n \geqslant n_*$.

Teorem 2.4 (Cauchyjev kriterij konvergencije niza realnih brojeva)

Niz (x_n) realnih brojeva konvergira ako i samo ako je Cauchyjev.

Iako iskazi oba ova teorema imaju smisla u svakom uređenom polju, teoremi općenito ne vrijede, čak niti uz Arhimedov aksiom. Ali svaki od tih teorema je u uređenom Arhimedovom polju ekvivalentan aksiomu potpunosti.

Dva korisna *unutarnja* svojstva nizova realnih brojeva

Sljedeća dva teorema nećemo dokazivati. Oba su, barem jednom, dokazana u nekom od kolegija Matematičke analize.

Teorem 2.2

Svaki monoton ograđen niz realnih brojeva konvergira.

Za drugi nam najprije treba definicija:

Definicija 2.3

Za (x_n) kažemo da je *Cauchyjev niz* ili da *ima Cauchyjevo svojstvo* ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_* \in \mathbb{N}$ t.d. je $|x_n - x_m| < \varepsilon$ za sve $m, n \geqslant n_*$.

Teorem 2.4 (Cauchyjev kriterij konvergencije niza realnih brojeva)

Niz (x_n) realnih brojeva konvergira ako i samo ako je Cauchyjev.

Iako iskazi oba ova teorema imaju smisla u svakom uređenom polju, teoremi općenito ne vrijede, čak niti uz Arhimedov aksiom. Ali svaki od tih teorema je u uređenom Arhimedovom polju ekvivalentan aksiomu potpunosti.

Dva korisna *unutarnja* svojstva nizova realnih brojeva

Sljedeća dva teorema nećemo dokazivati. Oba su, barem jednom, dokazana u nekom od kolegija Matematičke analize.

Teorem 2.2

Svaki monoton ograđen niz realnih brojeva konvergira.

Za drugi nam najprije treba definicija:

Definicija 2.3

Za (x_n) kažemo da je *Cauchyjev niz* ili da *ima Cauchyjevo svojstvo* ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_* \in \mathbb{N}$ t.d. je $|x_n - x_m| < \varepsilon$ za sve $m, n \geqslant n_*$.

Teorem 2.4 (Cauchyjev kriterij konvergencije niza realnih brojeva)

Niz (x_n) realnih brojeva konvergira ako i samo ako je Cauchyjev.

Iako iskazi oba ova teorema imaju smisla u svakom uređenom polju, teoremi općenito ne vrijede, čak niti uz Arhimedov aksiom. Ali svaki od tih teorema je u uređenom Arhimedovom polju ekvivalentan aksiomu potpunosti.

Dva korisna *unutarnja* svojstva nizova realnih brojeva

Sljedeća dva teorema nećemo dokazivati. Oba su, barem jednom, dokazana u nekom od kolegija Matematičke analize.

Teorem 2.2

Svaki monoton ograđen niz realnih brojeva konvergira.

Za drugi nam najprije treba definicija:

Definicija 2.3

Za (x_n) kažemo da je *Cauchyjev niz* ili da *ima Cauchyjevo svojstvo* ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_* \in \mathbb{N}$ t.d. je $|x_n - x_m| < \varepsilon$ za sve $m, n \geqslant n_*$.

Teorem 2.4 (Cauchyjev kriterij konvergencije niza realnih brojeva)

Niz (x_n) realnih brojeva konvergira ako i samo ako je Cauchyjev.

Iako iskazi oba ova teorema imaju smisla u svakom uređenom polju, teoremi općenito ne vrijede, čak niti uz Arhimedov aksiom. Ali svaki od tih teorema je u uređenom Arhimedovom polju ekvivalentan aksiomu potpunosti.

Limes realne funkcije realne varijable

Što se događa s vrijednostima funkcije u blizini točke x^* koja nas zanima ? Nije važna sâma vrijednost $f(x^*)$, nego što je s vrijednostima od f u blizini točke x^* ?

Definicija 3.1

Za realnu funkciju realne varijable kažemo da *ima limes u točki x^** ako postoji $\ell \in \mathbb{R}$ t.d. za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ t.d. je $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ čim je $0 < |x - x^*| < \delta$. Dakle

$$\exists \ell \in \mathbb{R} \text{ t.d. } \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall x\ (0 < |x - x^*| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)$$

U tom slučaju kažemo da je ℓ *limes* ili *granična vrijednost* funkcije f u točki x^* i pišemo $\ell = \lim\limits_{x^*} f$ ili $\ell = \lim\limits_{x^*} f(x)$ ili $\ell = \lim\limits_{x \to x^*} f(x)$.

Govori se i da f *teži* ili *konvergira* k ℓ kada x teži k x^*, a piše se i „$f(x) \to \ell$ za $x \to x^*$" ili $f(x) \xrightarrow{x \to x^*} \ell$.

Limes realne funkcije realne varijable

Što se događa s vrijednostima funkcije u blizini točke x^* koja nas zanima ? Nije važna sâma vrijednost $f(x^*)$, nego što je s vrijednostima od f u blizini točke x^* ?

Definicija 3.1

Za realnu funkciju realne varijable kažemo da *ima limes u točki x^** ako postoji $\ell \in \mathbb{R}$ t.d. za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ t.d. je $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ čim je $0 < |x - x^*| < \delta$. Dakle

$$\exists \ell \in \mathbb{R} \text{ t.d. } \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall x\, (0 < |x - x^*| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon).$$

U tom slučaju kažemo da je ℓ *limes* ili *granična vrijednost* funkcije f u točki x^* i pišemo $\ell = \lim\limits_{x^*} f$ ili $\ell = \lim\limits_{x^*} f(x)$ ili $\ell = \lim\limits_{x \to x^*} f(x)$.

Govori se i da f *teži* ili *konvergira* k ℓ kada x teži k x^*, a piše se i „$f(x) \to \ell$ za $x \to x^*$" ili $f(x) \xrightarrow{x \to x^*} \ell$.

Limes realne funkcije realne varijable

Što se događa s vrijednostima funkcije u blizini točke x^* koja nas zanima ? Nije važna sâma vrijednost $f(x^*)$, nego što je s vrijednostima od f u blizini točke x^* ?

Definicija 3.1

Za realnu funkciju realne varijable kažemo da *ima limes u točki x^** ako postoji $\ell \in \mathbb{R}$ t.d. za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ t.d. je $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ čim je $0 < |x - x^*| < \delta$. Dakle

$$\exists \ell \in \mathbb{R} \text{ t.d. } \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall x\, (0 < |x - x^*| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon).$$

U tom slučaju kažemo da je ℓ *limes* ili *granična vrijednost* funkcije f u točki x^* i pišemo $\ell = \lim_{x^*} f$ ili $\ell = \lim_{x^*} f(x)$ ili $\ell = \lim_{x \to x^*} f(x)$.

Govori se i da f *teži* ili *konvergira* k ℓ kada x teži k x^*, a piše se i „$f(x) \to \ell$ za $x \to x^*$" ili $f(x) \xrightarrow{x \to x^*} \ell$.

Limes realne funkcije realne varijable

Što se događa s vrijednostima funkcije u blizini točke x^* koja nas zanima? Nije važna sâma vrijednost $f(x^*)$, nego što je s vrijednostima od f u blizini točke x^*?

Definicija 3.1

Za realnu funkciju realne varijable kažemo da *ima limes u točki* x^* ako postoji $\ell \in \mathbb{R}$ t.d. za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ t.d. je $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ čim je $0 < |x - x^*| < \delta$. Dakle

$$\exists \ell \in \mathbb{R} \text{ t.d. } \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall x\ (0 < |x - x^*| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon).$$

U tom slučaju kažemo da je ℓ *limes* ili *granična vrijednost* funkcije f u točki x^* i pišemo $\ell = \lim\limits_{x^*} f$ ili $\ell = \lim\limits_{x^*} f(x)$ ili $\ell = \lim\limits_{x \to x^*} f(x)$.

Govori se i da f *teži* ili *konvergira* k ℓ kada x teži k x^*, a piše se i „$f(x) \to \ell$ za $x \to x^*$" ili $f(x) \xrightarrow{x \to x^*} \ell$.

Limes realne funkcije realne varijable

Što se događa s vrijednostima funkcije u blizini točke x^* koja nas zanima ? Nije važna sâma vrijednost $f(x^*)$, nego što je s vrijednostima od f u blizini točke x^* ?

Definicija 3.1

Za realnu funkciju realne varijable kažemo da *ima limes u točki x^** ako postoji $\ell \in \mathbb{R}$ t.d. za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ t.d. je $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ čim je $0 < |x - x^*| < \delta$. Dakle

$$\exists \ell \in \mathbb{R} \text{ t.d. } \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall x\, (0 < |x - x^*| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon).$$

U tom slučaju kažemo da je ℓ *limes* ili *granična vrijednost* funkcije f u točki x^* i pišemo $\ell = \lim\limits_{x^*} f$ ili $\ell = \lim\limits_{x^*} f(x)$ ili $\ell = \lim\limits_{x \to x^*} f(x)$.

Govori se i da f *teži* ili *konvergira* k ℓ kada x teži k x^*, a piše se i „$f(x) \to \ell$ za $x \to x^*$" ili $f(x) \xrightarrow{x \to x^*} \ell$.

Vrijednost $f(x^*)$ je nevažna !

U definiciji limesa funkcije nigdje se ne pojavljuje vrijednost $f(x^*)$. I ne samo da sâma vrijednost $f(x^*)$ nije važna, nego nije niti važno je li funkcija f definirana u točki x^* ili ne, važno je jedino da je ona definirana u blizini točke x^*.

Primjer 3.2

$$f(x) = x \sin\frac{1}{x} \; ; \quad g(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \; ; \quad h(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Vrijednost $f(x^*)$ je nevažna !

U definiciji limesa funkcije nigdje se ne pojavljuje vrijednost $f(x^*)$. I ne samo da sâma vrijednost $f(x^*)$ nije važna, nego nije niti važno je li funkcija f definirana u točki x^* ili ne, važno je jedino da je ona definirana u blizini točke x^*.

Primjer 3.2

$$f(x) = x \sin\frac{1}{x}\ ; \quad g(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}\ ; \quad h(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

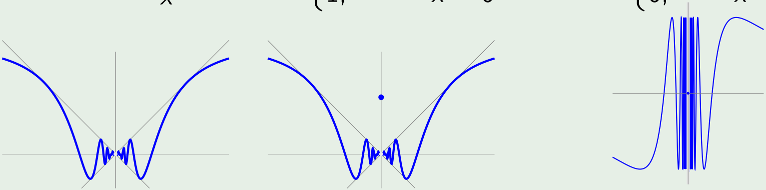
$\lim_{0} f(x) = 0$; $\lim_{0} g(x) = 0$; $\lim_{0} h(x)$ ne postoji.

Vrijednost $f(x^*)$ je nevažna !

U definiciji limesa funkcije nigdje se ne pojavljuje vrijednost $f(x^*)$. I ne samo da sâma vrijednost $f(x^*)$ nije važna, nego nije niti važno je li funkcija f definirana u točki x^* ili ne, važno je jedino da je ona definirana u blizini točke x^*.

Primjer 3.2

$$f(x) = x\sin\frac{1}{x}\ ; \quad g(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}\ ; \quad h(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



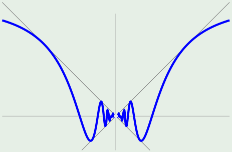
$\lim\limits_{0} f(x) = 0$; $\lim\limits_{0} g(x) = 0$; $\lim\limits_{0} h(x)$ ne postoji.

Vrijednost $f(x^*)$ je nevažna !

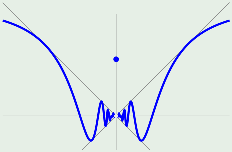
U definiciji limesa funkcije nigdje se ne pojavljuje vrijednost $f(x^*)$. I ne samo da sâma vrijednost $f(x^*)$ nije važna, nego nije niti važno je li funkcija f definirana u točki x^* ili ne, važno je jedino da je ona definirana u blizini točke x^*.

Primjer 3.2

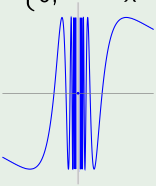
$$f(x) = x\sin\frac{1}{x}\ ; \quad g(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}\ ; \quad h(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



$\lim\limits_{0} f(x) = 0$;



$\lim\limits_{0} g(x) = 0$;



$\lim\limits_{0} h(x)$ ne postoji.

Limes funkcije pomoću nizova

U početnim kolegijima matematičke analize (ili *calculusa*), često se limes funkcije definira kao u tvrdnji (*ii*) sljedećeg teorema:

Teorem 3.3 (Heineova karakterizacija limesa funkcije)

Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:

(*i*) *Funkcija* f *ima u točki* x^* *limes* ℓ, *tj.* $\lim_{x^*} f(x) = \ell$.

(*ii*) *Za svaki niz* (x_n) *koji konvergira točki* x^* *i* $x_n \neq x^*$ *za sve* n, *niz* $(f(x_n))$ *konvergira k* ℓ.

Dokaz $(i) \Rightarrow (ii)$ je lagan, a za dokaz $(ii) \Rightarrow (i)$ treba malo vještine.

Limes funkcije pomoću nizova

U početnim kolegijima matematičke analize (ili *calculusa*), često se limes funkcije definira kao u tvrdnji (ii) sljedećeg teorema:

Teorem 3.3 (Heineova karakterizacija limesa funkcije)

Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:

(i) *Funkcija f ima u točki x^* limes ℓ, tj.* $\lim\limits_{x^*} f(x) = \ell$.

(ii) *Za svaki niz (x_n) koji konvergira točki x^* i $x_n \neq x^*$ za sve n, niz $\big(f(x_n)\big)$ konvergira k ℓ.*

Dokaz $(i) \Rightarrow (ii)$ je lagan, a za dokaz $(ii) \Rightarrow (i)$ treba malo vještine.

Limes funkcije pomoću nizova

U početnim kolegijima matematičke analize (ili *calculusa*), često se limes funkcije definira kao u tvrdnji (ii) sljedećeg teorema:

Teorem 3.3 (Heineova karakterizacija limesa funkcije)

Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:

(i) *Funkcija* f *ima u točki* x^* *limes* ℓ, *tj.* $\lim\limits_{x^*} f(x) = \ell$.

(ii) *Za svaki niz* (x_n) *koji konvergira točki* x^* *i* $x_n \neq x^*$ *za sve* n, *niz* $\big(f(x_n)\big)$ *konvergira k* ℓ.

Dokaz $(i) \Rightarrow (ii)$ je lagan, a za dokaz $(ii) \Rightarrow (i)$ treba malo vještine.

Neprekidnost

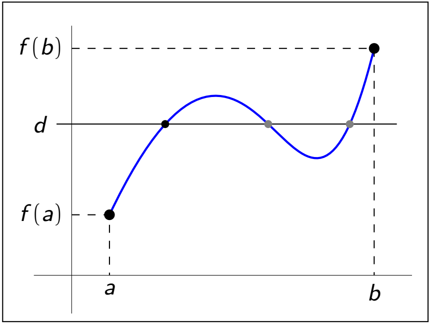
Intuitivna, geometrijska ideja neprekidne funkcije je da njezin graf možemo nacrtati *jednim potezom*, tj. *bez da dignemo olovku s papira*.

Malo preciznije, ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funkcija i broj d između $f(a)$ i $f(b)$, onda graf funkcije f mora sječi „horizontalni" pravac na visini d.

Međutim, kao što pokazuje primjer funkcije $x \mapsto \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ (h u primjeru 3.2), ovo svojstvo nije dovoljno da osigura neprekidnost.

Neprekidnost

Intuitivna, geometrijska ideja neprekidne funkcije je da njezin graf možemo nacrtati *jednim potezom*, tj. *bez da dignemo olovku s papira*.
Malo preciznije, ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funkcija i broj d između $f(a)$ i $f(b)$, onda graf funkcije f mora sječi „horizontalni" pravac na visini d.



Ovo svojstvo zavređuje definiciju:

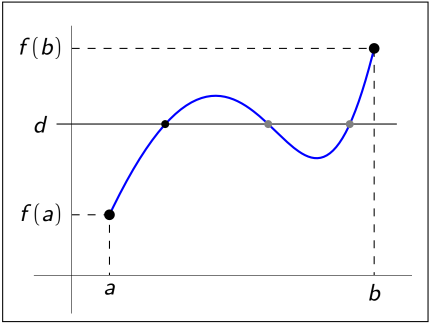
Definicija 4.1

Za funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kažemo da *poprima sve međuvrijednosti* ako za svaki broj $d \in [f(a), f(b)]$ postoji $c \in [a, b]$ t.d. je $f(c) = d$.

Međutim, kao što pokazuje primjer funkcije $x \mapsto \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ (h u primjeru 3.2), ovo svojstvo nije dovoljno da osigura neprekidnost.

Neprekidnost

Intuitivna, geometrijska ideja neprekidne funkcije je da njezin graf možemo nacrtati *jednim potezom*, tj. *bez da dignemo olovku s papira*.
Malo preciznije, ako je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funkcija i broj d između $f(a)$ i $f(b)$, onda graf funkcije f mora sijeći „horizontalni” pravac na visini d.



Ovo svojstvo zavređuje definiciju:

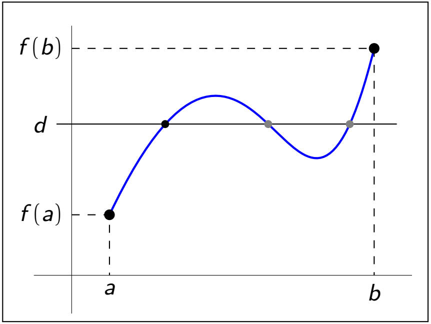
Definicija 4.1

Za funkciju $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ kažemo da *poprima sve međuvrijednosti* ako za svaki broj $d \in [f(a), f(b)]$ postoji $c \in [a,b]$ t.d. je $f(c) = d$.

Međutim, kao što pokazuje primjer funkcije $x \mapsto \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ (h u primjeru 3.2), ovo svojstvo nije dovoljno da osigura neprekidnost.

Neprekidnost

Intuitivna, geometrijska ideja neprekidne funkcije je da njezin graf možemo nacrtati *jednim potezom*, tj. *bez da dignemo olovku s papira*.
Malo preciznije, ako je $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ funkcija i broj d između $f(a)$ i $f(b)$, onda graf funkcije f mora siječi „horizontalni" pravac na visini d.



Ovo svojstvo zavređuje definiciju:

Definicija 4.1

Za funkciju $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ kažemo da *poprima sve međuvrijednosti* ako za svaki broj $d \in [f(a), f(b)]$ postoji $c \in [a, b]$ t.d. je $f(c) = d$.

Međutim, kao što pokazuje primjer funkcije $x \mapsto \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ (h u primjeru 3.2), ovo svojstvo nije dovoljno da osigura neprekidnost.

Definicija neprekidne funkcije

Neprekidnost znači da „malene” promjene varijable uzrokuju „malene” promjene vrijednosti funkcije. Pretočeno u definiciju, to izgleda ovako:

Definicija 4.2

Neka je $f : x \mapsto f(x)$ realna funkcija realne varijable definirana u točki x^* i u njezinoj „blizini”. Kažemo da je ona *neprekidna u točki* x^* ako postoji $\lim_{x^*} f(x)$ i jednak je $f(x^*)$, ili, prevedeno na ε-δ jezik, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ t.d. je $|f(x) - f(x^*)| < \varepsilon$ čim je $|x - x^*| < \delta$. Dakle,

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \text{ t.d. } \forall x\ (|x - x^*| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x^*)| < \varepsilon).$$

Konačno, *f je neprekidna* ako je neprekidna u svakoj točki svoje domene.

Usporedi ovu definiciju s definicijom 3.1 limesa funkcije, prema kojoj f ima u točki x^* limes ℓ ako

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \text{ t.d. } \forall x\ (0 < |x - x^*| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell|) < \varepsilon).$$

U čemu je bitna razlika ?

Definicija neprekidne funkcije

Neprekidnost znači da „malene” promjene varijable uzrokuju „malene” promjene vrijednosti funkcije. Pretočeno u definiciju, to izgleda ovako:

Definicija 4.2

Neka je $f\colon x \mapsto f(x)$ realna funkcija realne varijable definirana u točki x^* i u njezinoj „blizini”. Kažemo da je ona *neprekidna u točki* x^* ako postoji $\lim\limits_{x^*} f(x)$ i jednak je $f(x^*)$, ili, prevedeno na ε-δ jezik, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ t.d. je $|f(x) - f(x^*)| < \varepsilon$ čim je $|x - x^*| < \delta$. Dakle,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall x \ \left(|x - x^*| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x^*)| < \varepsilon\right).$$

Konačno, *f je neprekidna* ako je neprekidna u svakoj točki svoje domene.

Usporedi ovu definiciju s definicijom 3.1 limesa funkcije, prema kojoj f ima u točki x^* limes ℓ ako

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall x \ \left(0 < |x - x^*| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell|\right) < \varepsilon\,.$$

U čemu je bitna razlika ?

Definicija neprekidne funkcije

Neprekidnost znači da „malene” promjene varijable uzrokuju „malene” promjene vrijednosti funkcije. Pretočeno u definiciju, to izgleda ovako:

Definicija 4.2

Neka je $f\colon x \mapsto f(x)$ realna funkcija realne varijable definirana u točki x^* i u njezinoj „blizini”. Kažemo da je ona *neprekidna u točki* x^* ako postoji $\lim\limits_{x^*} f(x)$ i jednak je $f(x^*)$, ili, prevedeno na ε-δ jezik, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ t.d. je $|f(x) - f(x^*)| < \varepsilon$ čim je $|x - x^*| < \delta$. Dakle,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall x\ \left(|x - x^*| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x^*)| < \varepsilon\right).$$

Konačno, *f je neprekidna* ako je neprekidna u svakoj točki svoje domene.

Usporedi ovu definiciju s definicijom 3.1 limesa funkcije, prema kojoj f ima u točki x^* limes ℓ ako

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall x\ \left(0 < |x - x^*| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell|\right) < \varepsilon).$$

U čemu je bitna razlika ?

Definicija neprekidne funkcije

Neprekidnost znači da „malene” promjene varijable uzrokuju „malene” promjene vrijednosti funkcije. Pretočeno u definiciju, to izgleda ovako:

Definicija 4.2

Neka je $f\colon x \mapsto f(x)$ realna funkcija realne varijable definirana u točki x^* i u njezinoj „blizini”. Kažemo da je ona *neprekidna u točki* x^* ako postoji $\lim\limits_{x^*} f(x)$ i jednak je $f(x^*)$, ili, prevedeno na ε-δ jezik, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ t.d. je $|f(x) - f(x^*)| < \varepsilon$ čim je $|x - x^*| < \delta$. Dakle,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall x \ \big(|x - x^*| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x^*)| < \varepsilon\big) .$$

Konačno, *f je neprekidna* ako je neprekidna u svakoj točki svoje domene.

Usporedi ovu definiciju s definicijom 3.1 limesa funkcije, prema kojoj f ima u točki x^* limes ℓ ako

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall x \ (0 < |x - x^*| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell|) < \varepsilon) .$$

U čemu je bitna razlika ?

Definicija neprekidne funkcije

Neprekidnost znači da „malene” promjene varijable uzrokuju „malene” promjene vrijednosti funkcije. Pretočeno u definiciju, to izgleda ovako:

Definicija 4.2

Neka je $f\colon x \mapsto f(x)$ realna funkcija realne varijable definirana u točki x^* i u njezinoj „blizini”. Kažemo da je ona *neprekidna u točki* x^* ako postoji $\lim\limits_{x^*} f(x)$ i jednak je $f(x^*)$, ili, prevedeno na ε-δ jezik, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ t.d. je $|f(x) - f(x^*)| < \varepsilon$ čim je $|x - x^*| < \delta$. Dakle,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall x \ \big(|x - x^*| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x^*)| < \varepsilon \big) \, .$$

Konačno, *f je neprekidna* ako je neprekidna u svakoj točki svoje domene.

Usporedi ovu definiciju s definicijom 3.1 limesa funkcije, prema kojoj f ima u točki x^* limes ℓ ako

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall x \ \big(0 < |x - x^*| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \big) < \varepsilon \, .$$

U čemu je bitna razlika ?

Definicija neprekidne funkcije

Neprekidnost znači da „malene" promjene varijable uzrokuju „malene" promjene vrijednosti funkcije. Pretočeno u definiciju, to izgleda ovako:

Definicija 4.2

Neka je $f\colon x \mapsto f(x)$ realna funkcija realne varijable definirana u točki x^* i u njezinoj „blizini". Kažemo da je ona *neprekidna u točki* x^* ako postoji $\lim\limits_{x^*} f(x)$ i jednak je $f(x^*)$, ili, prevedeno na ε-δ jezik, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ t.d. je $|f(x) - f(x^*)| < \varepsilon$ čim je $|x - x^*| < \delta$. Dakle,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall x \ \big(|x - x^*| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x^*)| < \varepsilon\big) .$$

Konačno, *f je neprekidna* ako je neprekidna u svakoj točki svoje domene.

Usporedi ovu definiciju s definicijom 3.1 limesa funkcije, prema kojoj f ima u točki x^* limes ℓ ako

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall x \ (0 < |x - x^*| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell|) < \varepsilon) .$$

U čemu je bitna razlika ?

A što je s našim pokušajem s međuvrijednostima ?

Iako naš prvi pokušaj definicije neprekidnosti pomoću međuvrijednosti, definicija 4.1, nije bio sasvim uspješan, vrijedi

Teorem 4.3

Svaka neprekidna funkcija $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *poprima sve međuvrijednosti. Točnije, ako neprekidna funkcija* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *poprima vrijednosti* α *i* β, $\alpha < \beta$, *onda za svaki* $\gamma \in [\alpha, \beta]$ *postoji* $c \in [a, b]$ *takav da je* $f(c) = \gamma$.

Ovaj se teorem dokazuje u svakom početnom kolegiju matematičke analize, te ga ovdje nećemo dokazivati. Ipak, dobit ćemo ga kasnije, u 5. poglavlju, kao posljedicu povezanosti segmenta.

Napomenimo da dokaz bitno koristi svojstvo realnih brojeva koje proizlazi iz Cantorova aksioma potpunosti.

A što je s našim pokušajem s međuvrijednostima ?

Iako naš prvi pokušaj definicije neprekidnosti pomoću međuvrijednosti, definicija 4.1, nije bio sasvim uspješan, vrijedi

Teorem 4.3

Svaka neprekidna funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ poprima sve međuvrijednosti. Točnije, ako neprekidna funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ poprima vrijednosti α i β, $\alpha < \beta$, onda za svaki $\gamma \in [\alpha, \beta]$ postoji $c \in [a, b]$ takav da je $f(c) = \gamma$.

Ovaj se teorem dokazuje u svakom početnom kolegiju matematičke analize, te ga ovdje nećemo dokazivati. Ipak, dobit ćemo ga kasnije, u 5. poglavlju, kao posljedicu povezanosti segmenta.

Napomenimo da dokaz bitno koristi svojstvo realnih brojeva koje proizlazi iz Cantorova aksioma potpunosti.

A što je s našim pokušajem s međuvrijednostima ?

Iako naš prvi pokušaj definicije neprekidnosti pomoću međuvrijednosti, definicija 4.1, nije bio sasvim uspješan, vrijedi

Teorem 4.3

Svaka neprekidna funkcija $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ poprima sve međuvrijednosti. Točnije, ako neprekidna funkcija $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ poprima vrijednosti α i β, $\alpha < \beta$, onda za svaki $\gamma \in [\alpha, \beta]$ postoji $c \in [a, b]$ takav da je $f(c) = \gamma$.

Ovaj se teorem dokazuje u svakom početnom kolegiju matematičke analize, te ga ovdje nećemo dokazivati. Ipak, dobit ćemo ga kasnije, u 5. poglavlju, kao posljedicu povezanosti segmenta.

Napomenimo da dokaz bitno koristi svojstvo realnih brojeva koje proizlazi iz Cantorova aksioma potpunosti.

2 METRIČKI PROSTOR

- Udaljenost
- Primjeri
- Otvoreni skupovi u metričkom prostoru
- Ekvivalentne metrike

Što znači „dovoljno blizu"?

Definicija neprekidnosti, definicija 4.2, iskazana riječima, kaže da je funkcija f iz $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ neprekidna u točki x^* ako se udaljenost između $f(x)$ i $f(x^*)$ može učiniti proizvoljno malenom zahtijevajući da su x i x^* dovoljno blizu.

U ovom slučaju (radi se o realnim brojevima), *udaljenost* dvaju brojeva je apsolutna vrijednost njihove razlike.

No ista rečenica ima smisla i za funkciju iz $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}$, pri čemu *udaljenost* točaka $P = (x, y)$ i $P^* = (x^*, y^*)$ znači $\sqrt{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2}$.

Dakle, funkcija f dviju varijabli, tj. iz $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}$, je neprekidna u P^* ako

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall P \left(\sqrt{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2} < \delta \Rightarrow |f(P) - f(P^*)| < \varepsilon \right).$$

Na isti način definiramo i neprekidnost funkcija triju i više varijabli, tj. iz $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}$, pri čemu je udaljenost točaka $P = (x_1, \ldots, x_n)$ i $P^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ jednaka $\sqrt{\sum_{k=1}^{k=n} (x_k - x_k^*)^2}$.

Što znači „dovoljno blizu"?

Definicija neprekidnosti, definicija 4.2, iskazana riječima, kaže da je funkcija f iz $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ neprekidna u točki x^* ako se udaljenost između $f(x)$ i $f(x^*)$ može učiniti proizvoljno malenom zahtijevajući da su x i x^* dovoljno blizu.
U ovom slučaju (radi se o realnim brojevima), *udaljenost* dvaju brojeva je apsolutna vrijednost njihove razlike.
No ista rečenica ima smisla i za funkciju iz $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}$, pri čemu *udaljenost* točaka $P = (x, y)$ i $P^* = (x^*, y^*)$ znači $\sqrt{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2}$.
Dakle, funkcija f dviju varijabli, tj. iz $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}$, je neprekidna u P^* ako

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall P\ \left(\sqrt{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2} < \delta \Rightarrow |f(P) - f(P^*)| < \varepsilon\right).$$

Na isti način definiramo i neprekidnost funkcija triju i više varijabli, tj. iz $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}$, pri čemu je udaljenost točaka $P = (x_1, \ldots, x_n)$ i $P^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ jednaka $\sqrt{\sum_{k=1}^{k=n} (x_k - x_k^*)^2}$.

Što znači „dovoljno blizu"?

Definicija neprekidnosti, definicija 4.2, iskazana riječima, kaže da je funkcija f iz $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ neprekidna u točki x^* ako se udaljenost između $f(x)$ i $f(x^*)$ može učiniti proizvoljno malenom zahtijevajući da su x i x^* dovoljno blizu.

U ovom slučaju (radi se o realnim brojevima), *udaljenost* dvaju brojeva je apsolutna vrijednost njihove razlike.

No ista rečenica ima smisla i za funkciju iz $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}$, pri čemu *udaljenost* točaka $P = (x, y)$ i $P^* = (x^*, y^*)$ znači $\sqrt{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2}$.

Dakle, funkcija f dviju varijabli, tj. iz $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}$, je neprekidna u P^* ako

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \text{ t.d. } \forall P \left(\sqrt{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2} < \delta \Rightarrow |f(P) - f(P^*)| < \varepsilon\right).$$

Na isti način definiramo i neprekidnost funkcija triju i više varijabli, tj. iz $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}$, pri čemu je udaljenost točaka $P = (x_1, \ldots, x_n)$ i $P^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ jednaka $\sqrt{\sum_{k=1}^{k=n}(x_k - x_k^*)^2}$.

Što znači „dovoljno blizu”?

Definicija neprekidnosti, definicija 4.2, iskazana riječima, kaže da je funkcija f iz $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ neprekidna u točki x^* ako se udaljenost između $f(x)$ i $f(x^*)$ može učiniti proizvoljno malenom zahtijevajući da su x i x^* dovoljno blizu.
U ovom slučaju (radi se o realnim brojevima), *udaljenost* dvaju brojeva je apsolutna vrijednost njihove razlike.
No ista rečenica ima smisla i za funkciju iz $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}$, pri čemu *udaljenost* točaka $P = (x, y)$ i $P^* = (x^*, y^*)$ znači $\sqrt{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2}$.
Dakle, funkcija f dviju varijabli, tj. iz $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}$, je neprekidna u P^* ako

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall P \left(\sqrt{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2} < \delta \Rightarrow |f(P) - f(P^*)| < \varepsilon \right).$$

Na isti način definiramo i neprekidnost funkcija triju i više varijabli, tj. iz $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}$, pri čemu je udaljenost točaka $P = (x_1, \ldots, x_n)$ i $P^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ jednaka $\sqrt{\sum_{k=1}^{k=n} (x_k - x_k^*)^2}$.

Što znači „dovoljno blizu"?

Definicija neprekidnosti, definicija 4.2, iskazana riječima, kaže da je funkcija f iz $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ neprekidna u točki x^* ako se udaljenost između $f(x)$ i $f(x^*)$ može učiniti proizvoljno malenom zahtijevajući da su x i x^* dovoljno blizu.
U ovom slučaju (radi se o realnim brojevima), *udaljenost* dvaju brojeva je apsolutna vrijednost njihove razlike.
No ista rečenica ima smisla i za funkciju iz $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}$, pri čemu *udaljenost* točaka $P = (x, y)$ i $P^* = (x^*, y^*)$ znači $\sqrt{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2}$.
Dakle, funkcija f dviju varijabli, tj. iz $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}$, je neprekidna u P^* ako

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall P \left(\sqrt{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2} < \delta \Rightarrow |f(P) - f(P^*)| < \varepsilon \right).$$

Na isti način definiramo i neprekidnost funkcija triju i više varijabli, tj. iz $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}$, pri čemu je udaljenost točaka $P = (x_1, \ldots, x_n)$ i $P^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ jednaka $\sqrt{\sum_{k=1}^{k=n} (x_k - x_k^*)^2}$.

Udaljenost

Dakle, za neprekidnost realne funkcije jedne ili više varijabli, potrebna je jedino *udaljenost*, i nikoja druga struktura koju imamo u $\mathbb{R}^n$.

Označimo li udaljenost dviju točaka P i Q iz $\mathbb{R}^n$ s $d(P, Q)$, onda možemo govoriti o funkciji $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Naša, euklidska udaljenost, ima ova svojstva: za sve točke P, Q, R vrijedi

$$d(P, Q) \geqslant 0 \tag{M1}$$

$$d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q \tag{M2}$$

$$d(P, Q) = d(Q, P) \tag{M3}$$

$$d(P, R) \leqslant d(P, Q) + d(Q, R)\,. \tag{M4}$$

Ima funkcija udaljenosti, d, i druga svojstva, ali se u praksi pokazalo da, kada se radi o euklidskim prostorima, ova su četiri svojstva *jedino što je potrebno* za pitanja vezana uz neprekidnost, konvergenciju i slično. To sugerira sljedeću definiciju:

Udaljenost

Dakle, za neprekidnost realne funkcije jedne ili više varijabli, potrebna je jedino *udaljenost*, i nikoja druga struktura koju imamo u $\mathbb{R}^n$. Označimo li udaljenost dviju točaka P i Q iz $\mathbb{R}^n$ s $d(P, Q)$, onda možemo govoriti o funkciji $d \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Naša, euklidska udaljenost, ima ova svojstva: za sve točke P, Q, R vrijedi

$$d(P, Q) \geqslant 0 \tag{M1}$$

$$d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q \tag{M2}$$

$$d(P, Q) = d(Q, P) \tag{M3}$$

$$d(P, R) \leqslant d(P, Q) + d(Q, R)\,. \tag{M4}$$

Ima funkcija udaljenosti, d, i druga svojstva, ali se u praksi pokazalo da, kada se radi o euklidskim prostorima, ova su četiri svojstva jedino što je potrebno za pitanja vezana uz neprekidnost, konvergenciju i slično. To sugerira sljedeću definiciju:

Udaljenost

Dakle, za neprekidnost realne funkcije jedne ili više varijabli, potrebna je jedino *udaljenost*, i nikoja druga struktura koju imamo u $\mathbb{R}^n$.
Označimo li udaljenost dviju točaka P i Q iz $\mathbb{R}^n$ s $d(P, Q)$, onda možemo govoriti o funkciji $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Naša, euklidska udaljenost, ima ova svojstva: za sve točke P, Q, R vrijedi

$$d(P, Q) \geqslant 0 \tag{M1}$$

$$d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q \tag{M2}$$

$$d(P, Q) = d(Q, P) \tag{M3}$$

$$d(P, R) \leqslant d(P, Q) + d(Q, R)\,. \tag{M4}$$

Ima funkcija udaljenosti, d, i druga svojstva, ali se u praksi pokazalo da, kada se radi o euklidskim prostorima, ova su četiri svojstva jedino što je potrebno za pitanja vezana uz neprekidnost, konvergenciju i slično. To sugerira sljedeću definiciju:

Udaljenost

Dakle, za neprekidnost realne funkcije jedne ili više varijabli, potrebna je jedino *udaljenost*, i nikoja druga struktura koju imamo u $\mathbb{R}^n$.
Označimo li udaljenost dviju točaka P i Q iz $\mathbb{R}^n$ s $d(P, Q)$, onda možemo govoriti o funkciji $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Naša, euklidska udaljenost, ima ova svojstva: za sve točke P, Q, R vrijedi

$$d(P, Q) \geqslant 0 \tag{M1}$$

$$d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q \tag{M2}$$

$$d(P, Q) = d(Q, P) \tag{M3}$$

$$d(P, R) \leqslant d(P, Q) + d(Q, R)\,. \tag{M4}$$

Ima funkcija udaljenosti, d, i druga svojstva, ali se u praksi pokazalo da, kada se radi o euklidskim prostorima, ova su četiri svojstva jedino što je potrebno za pitanja vezana uz neprekidnost, konvergenciju i slično. To sugerira sljedeću definiciju:

Udaljenost

Dakle, za neprekidnost realne funkcije jedne ili više varijabli, potrebna je jedino *udaljenost*, i nikoja druga struktura koju imamo u $\mathbb{R}^n$.
Označimo li udaljenost dviju točaka P i Q iz $\mathbb{R}^n$ s $d(P, Q)$, onda možemo govoriti o funkciji $d\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Naša, euklidska udaljenost, ima ova svojstva: za sve točke P, Q, R vrijedi

$$d(P, Q) \geqslant 0 \tag{M1}$$

$$d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q \tag{M2}$$

$$d(P, Q) = d(Q, P) \tag{M3}$$

$$d(P, R) \leqslant d(P, Q) + d(Q, R)\,. \tag{M4}$$

Ima funkcija udaljenosti, d, i druga svojstva, ali se u praksi pokazalo da, kada se radi o euklidskim prostorima, ova su četiri svojstva jedino što je potrebno za pitanja vezana uz neprekidnost, konvergenciju i slično. To sugerira sljedeću definiciju:

Definicija metričkog prostora

Definicija 5.1

Metrički prostor je neprazan skup X zajedno s funkcijom $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava svojstva (M1), (M2), (M3) i (M4). Funkcija d naziva se *razdaljinska funkcija* ili *metrika* na X.

Govori se o metričkom prostoru (X, d), ili samo o metričkom prostoru X kada je iz konteksta jasno, ili je nevažno, o kojoj se metrici d radi.

Napomena (o *točkama* i *vektorima*)

Elemente skupa X, kao i metričkog prostora (X, d) nazivamo *točke*, i obično ćemo ih označivati x, y, x^*, x', i slično. Međutim, kada se radi o euklidskom prostoru, tj. o $\mathbb{R}^n$ za neki n, onda ćemo točke označivati $P, Q, \dots$, a njihove koordinate $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(y_1, y_2, \dots, y_n), \dots$, kao što je uobičajeno u elementarnoj geometriji. U slučaju kada nam je potrebna struktura *vektorskog prostora* u $\mathbb{R}^n$, onda ćemo te točke zvati i *vektorima*.

Definicija metričkog prostora

Definicija 5.1

Metrički prostor je neprazan skup X zajedno s funkcijom $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava svojstva (M1), (M2), (M3) i (M4). Funkcija d naziva se *razdaljinska funkcija* ili *metrika* na X.

Govori se o metričkom prostoru (X, d), ili samo o metričkom prostoru X kada je iz konteksta jasno, ili je nevažno, o kojoj se metrici d radi.

Napomena (o *točkama* i *vektorima*)

Elemente skupa X, kao i metričkog prostora (X, d) nazivamo *točke*, i obično ćemo ih označivati x, y, x^*, x', i slično. Međutim, kada se radi o euklidskom prostoru, tj. o $\mathbb{R}^n$ za neki n, onda ćemo točke označivati $P, Q, \ldots$, a njihove koordinate $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots$, kao što je uobičajeno u elementarnoj geometriji. U slučaju kada nam je potrebna struktura *vektorskog prostora* u $\mathbb{R}^n$, onda ćemo te točke zvati i *vektorima*.

Definicija metričkog prostora

Definicija 5.1

Metrički prostor je neprazan skup X zajedno s funkcijom $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava svojstva (M1), (M2), (M3) i (M4). Funkcija d naziva se *razdaljinska funkcija* ili *metrika* na X.

Govori se o metričkom prostoru (X, d), ili samo o metričkom prostoru X kada je iz konteksta jasno, ili je nevažno, o kojoj se metrici d radi.

Napomena (o *točkama* i *vektorima*)

Elemente skupa X, kao i metričkog prostora (X, d) nazivamo *točke*, i obično ćemo ih označivati x, y, x^*, x', i slično. Međutim, kada se radi o euklidskom prostoru, tj. o $\mathbb{R}^n$ za neki n, onda ćemo točke označivati $P, Q, \dots,$ a njihove koordinate $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(y_1, y_2, \dots, y_n), \dots,$ kao što je uobičajeno u elementarnoj geometriji. U slučaju kada nam je potrebna struktura *vektorskog prostora* u $\mathbb{R}^n$, onda ćemo te točke zvati i *vektorima*.

Neprekidnost u metričkim prostorima

Sada je prirodno neprekidnost definirati ovako:

Definicija 5.2

Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori. Kažemo da je preslikavanje $f\colon X \to Y$ *neprekidno u točki* $x^* \in X$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je udaljenost između $f(x)$ i $f(x^*)$ manja od ε čim je udaljenost između x i x^* manja od δ. Drugačije zapisano:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall x \in X \ \big(d_X(x, x^*) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x^*)) < \varepsilon\big).$$

Preslikavanje je *neprekidno* ako je neprekidno u svakoj točki $x \in X$.

Napomena 5.3

Najčešće je iz konteksta jasno o kojoj se metrici radi pa se „indeksi” (*subscripts*) X i Y ne pišu. Dakle, f je neprekidno u točki $x^* \in X$ ako

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall x \in X \ \big(d(x, x^*) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x^*)) < \varepsilon\big).$$

Neprekidnost u metričkim prostorima

Sada je prirodno neprekidnost definirati ovako:

Definicija 5.2

Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori. Kažemo da je preslikavanje $f\colon X \to Y$ *neprekidno u točki* $x^* \in X$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je udaljenost između $f(x)$ i $f(x^*)$ manja od ε čim je udaljenost između x i x^* manja od δ. Drugačije zapisano:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall x \in X \, \big(d_X(x, x^*) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x^*)) < \varepsilon\big).$$

Preslikavanje je *neprekidno* ako je neprekidno u svakoj točki $x \in X$.

Napomena 5.3

Najčešće je iz konteksta jasno o kojoj se metrici radi pa se „indeksi" (*subscripts*) X i Y ne pišu. Dakle, f je neprekidno u točki $x^* \in X$ ako

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall x \in X \, \big(d(x, x^*) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x^*)) < \varepsilon\big).$$

Neprekidnost u metričkim prostorima

Sada je prirodno neprekidnost definirati ovako:

Definicija 5.2

Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori. Kažemo da je preslikavanje $f\colon X \to Y$ *neprekidno u točki* $x^* \in X$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je udaljenost između $f(x)$ i $f(x^*)$ manja od ε čim je udaljenost između x i x^* manja od δ. Drugačije zapisano:

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0 \text{ t.d. } \forall x \in X\ \big(d_X(x, x^*) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x^*)) < \varepsilon\big).$$

Preslikavanje je *neprekidno* ako je neprekidno u svakoj točki $x \in X$.

Napomena 5.3

Najčešće je iz konteksta jasno o kojoj se metrici radi pa se „indeksi” (*subscripts*) X i Y ne pišu. Dakle, f je neprekidno u točki $x^* \in X$ ako

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0 \text{ t.d. } \forall x \in X\ \big(d(x, x^*) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x^*)) < \varepsilon\big).$$

Neprekidnost u metričkim prostorima

Sada je prirodno neprekidnost definirati ovako:

Definicija 5.2

Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori. Kažemo da je preslikavanje $f : X \to Y$ *neprekidno u točki* $x^* \in X$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je udaljenost između $f(x)$ i $f(x^*)$ manja od ε čim je udaljenost između x i x^* manja od δ. Drugačije zapisano:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall x \in X\ \big(d_X(x, x^*) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x^*)) < \varepsilon\big).$$

Preslikavanje je *neprekidno* ako je neprekidno u svakoj točki $x \in X$.

Napomena 5.3

Najčešće je iz konteksta jasno o kojoj se metrici radi pa se „indeksi" (*subscripts*) X i Y ne pišu. Dakle, f je neprekidno u točki $x^* \in X$ ako

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall x \in X\ \big(d(x, x^*) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x^*)) < \varepsilon\big).$$

Euklidski prostor $\mathbb{E}^n$

Najprije primjer koji nam je bio motivacija:

Primjer 6.1

Na skupu $\mathbb{R}^n$ uređenih n-torki realnih brojeva, definiramo metriku d formulom

$$d\big((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\big) := \sqrt{\sum_{k=1}^{k=n}(x_k-y_k)^2}\,.$$

Ovako definirana razdaljinska funkcija d naziva se *euklidska metrika*, a $\mathbb{R}^n$ s *tom* metrikom naziva se *n-dimenzionalan euklidski prostor* i označivat ćemo ga $\mathbb{E}^n$.

Da za d zaista vrijede svojstva (M1)–(M3) je očito iz definicije funkcije d, a *nejednakost trokuta*, tj. svojstvo (M4), slijedi iz Cauchyjeve nejednakosti: za sve $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n\in\mathbb{R}$ vrijedi

$$\Big(\sum_1^n a_kb_k\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_1^n a_k^2\Big)\Big(\sum_1^n b_k^2\Big)$$

što se obično dokazuje u linearnoj algebri.

Euklidski prostor $\mathbb{E}^n$

Najprije primjer koji nam je bio motivacija:

Primjer 6.1

Na skupu $\mathbb{R}^n$ uređenih n-torki realnih brojeva, definiramo metriku d formulom

$$d\big((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\big) := \sqrt{\sum_{k=1}^{k=n}(x_k-y_k)^2}\,.$$

Ovako definirana razdaljinska funkcija d naziva se *euklidska metrika*, a $\mathbb{R}^n$ s *tom* metrikom naziva se *n-dimenzionalan euklidski prostor* i označivat ćemo ga $\mathbb{E}^n$.

Da za d zaista vrijede svojstva (M1)–(M3) je očito iz definicije funkcije d, a *nejednakost trokuta*, tj. svojstvo (M4), slijedi iz Cauchyjeve nejednakosti: za sve $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n\in\mathbb{R}$ vrijedi

$$\Big(\sum_1^n a_k b_k\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_1^n a_k^2\Big)\Big(\sum_1^n b_k^2\Big)$$

što se obično dokazuje u linearnoj algebri.

Euklidski prostor $\mathbb{E}^n$

Najprije primjer koji nam je bio motivacija:

Primjer 6.1

Na skupu $\mathbb{R}^n$ uređenih n-torki realnih brojeva, definiramo metriku d formulom

$$d\big((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\big) := \sqrt{\sum_{k=1}^{k=n}(x_k-y_k)^2}\,.$$

Ovako definirana razdaljinska funkcija d naziva se *euklidska metrika*, a $\mathbb{R}^n$ s *tom* metrikom naziva se *n-dimenzionalan euklidski prostor* i označivat ćemo ga $\mathbb{E}^n$.

Da za d zaista vrijede svojstva (M1)–(M3) je očito iz definicije funkcije d, a *nejednakost trokuta*, tj. svojstvo (M4), slijedi iz Cauchyjeve nejednakosti: za sve $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n\in\mathbb{R}$ vrijedi

$$\Big(\sum_1^n a_k b_k\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_1^n a_k^2\Big)\Big(\sum_1^n b_k^2\Big)$$

što se obično dokazuje u linearnoj algebri.

Euklidski prostor $\mathbb{E}^n$

Najprije primjer koji nam je bio motivacija:

Primjer 6.1

Na skupu $\mathbb{R}^n$ uređenih n-torki realnih brojeva, definiramo metriku d formulom

$$d\big((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\big) := \sqrt{\sum_{k=1}^{k=n} (x_k - y_k)^2}\ .$$

Ovako definirana razdaljinska funkcija d naziva se *euklidska metrika*, a $\mathbb{R}^n$ s *tom* metrikom naziva se *n-dimenzionalan euklidski prostor* i označivat ćemo ga $\mathbb{E}^n$.

Da za d zaista vrijede svojstva (M1)–(M3) je očito iz definicije funkcije d, a *nejednakost trokuta*, tj. svojstvo (M4), slijedi iz Cauchyjeve nejednakosti: za sve $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\Big(\sum_1^n a_k b_k\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_1^n a_k^2\Big)\Big(\sum_1^n b_k^2\Big)$$

što se obično dokazuje u linearnoj algebri.

Diskretan metrički prostor

Evo jednog *ekstremnog* primjera:

Primjer 6.2

Neka je X proizvoljan skup a funkcija $\delta \colon X \times X \to \mathbb{R}$ neka je definirana s

$$\delta(x, y) := \begin{cases} 0\,, & x = y \\ 1\,, & x \neq y \end{cases}.$$

Ovako definirana funkcija δ naziva se *diskretna metrika* na X, a (X, δ) se naziva *diskretan metrički prostor*.

Ovakvi metrički prostori često služe kao kontraprimjeri za neku *geometrijski intuitivnu* ideju, ali se prostori dobiveni od njih pojavljuju, i korisni su, u mnogim kombinatornim problemima.

Primjer 6.3

Korisnim će se pokazati diskretan metrički prostor koji se sastoji od samo dvije točke — dva simbola, npr. 0 i 1. Taj ćemo prostor označivati $\mathbb{2}$ i zvati *diskretan dvotočkovni prostor*.

Diskretan metrički prostor

Evo jednog *ekstremnog* primjera:

Primjer 6.2

Neka je X proizvoljan skup a funkcija $\delta\colon X \times X \to \mathbb{R}$ neka je definirana s

$$\delta(x, y) := \begin{cases} 0\,, & x = y \\ 1\,, & x \neq y \end{cases}.$$

Ovako definirana funkcija δ naziva se *diskretna metrika* na X, a (X, δ) se naziva *diskretan metrički prostor*.

Ovakvi metrički prostori često služe kao kontraprimjeri za neku *geometrijski intuitivnu* ideju, ali se prostori dobiveni od njih pojavljuju, i korisni su, u mnogim kombinatornim problemima.

Primjer 6.3

Korisnim će se pokazati diskretan metrički prostor koji se sastoji od samo dvije točke — dva simbola, npr. 0 i 1. Taj ćemo prostor označivati $\mathbb{2}$ i zvati *diskretan dvotočkovni prostor*.

Diskretan metrički prostor

Evo jednog *ekstremnog* primjera:

Primjer 6.2

Neka je X proizvoljan skup a funkcija $\delta\colon X \times X \to \mathbb{R}$ neka je definirana s

$$\delta(x, y) := \begin{cases} 0\,, & x = y \\ 1\,, & x \neq y \end{cases}.$$

Ovako definirana funkcija δ naziva se *diskretna metrika* na X, a (X, δ) se naziva *diskretan metrički prostor*.

Ovakvi metrički prostori često služe kao kontraprimjeri za neku *geometrijski intuitivnu* ideju, ali se prostori dobiveni od njih pojavljuju, i korisni su, u mnogim kombinatornim problemima.

Primjer 6.3

Korisnim će se pokazati diskretan metrički prostor koji se sastoji od samo dvije točke — dva simbola, npr. 0 i 1. Taj ćemo prostor označivati 2 i zvati *diskretan dvotočkovni prostor*.

Različite metrike na $\mathbb{R}^n$

Na skupu $\mathbb{R}^n$ moguće je definirati mnogo različitih razdaljinskih funkcija. Promotrimo tri, a zbog jednostavnosti i *geometrijskog zôra*, za $n = 2$.

Primjer 6.4

Definirajmo sljedeće tri funkcije $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$d_1(P,Q) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

$$d_2(P,Q) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

$$d_\infty(P,Q) := \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

gdje su $P = (x_1, x_2)$ i $Q = (y_1, y_2)$ proizvoljne točke u $\mathbb{R}^2$.

Lako se provjeri da su d_1, d_2 i d_∞ zaista metrike na $\mathbb{R}^2$.
Očito je d_2 upravo euklidska metrika iz primjera 6.1, tj. $(\mathbb{R}^2, d_2) = \mathbb{E}^2$.
Prostori $(\mathbb{R}^2, d_1)$ i $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ *nisu* euklidski prostori.

Jasno je da odgovarajuće metrike d_1, d_2 i d_∞ postoje i na $\mathbb{R}^n$ za sve n.

NAPOMENA: Kako su u $\mathbb{R}$ sve tri metrike iste, umjesto $\mathbb{E}^1$ rabit ćemo $\mathbb{R}$.

Različite metrike na $\mathbb{R}^n$

Na skupu $\mathbb{R}^n$ moguće je definirati mnogo različitih razdaljinskih funkcija. Promotrimo tri, a zbog jednostavnosti i *geometrijskog zôra*, za $n = 2$.

Primjer 6.4

Definirajmo sljedeće tri funkcije $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} d_1(P, Q) &:= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \\ d_2(P, Q) &:= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \\ d_\infty(P, Q) &:= \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \end{aligned}$$

gdje su $P = (x_1, x_2)$ i $Q = (y_1, y_2)$ proizvoljne točke u $\mathbb{R}^2$.

- Lako se provjeri da su d_1, d_2 i d_∞ zaista metrike na $\mathbb{R}^2$.
  Očito je d_2 upravo euklidska metrika iz primjera 6.1, tj. $(\mathbb{R}^2, d_2) = \mathbb{E}^2$.
  Prostori $(\mathbb{R}^2, d_1)$ i $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ *nisu* euklidski prostori.

  Jasno je da odgovarajuće metrike d_1, d_2 i d_∞ postoje i na $\mathbb{R}^n$ za sve n.

NAPOMENA: Kako su u $\mathbb{R}$ sve tri metrike iste, umjesto $\mathbb{E}^1$ rabit ćemo $\mathbb{R}$.

Različite metrike na $\mathbb{R}^n$

Na skupu $\mathbb{R}^n$ moguće je definirati mnogo različitih razdaljinskih funkcija. Promotrimo tri, a zbog jednostavnosti i *geometrijskog zôra*, za $n = 2$.

Primjer 6.4

Definirajmo sljedeće tri funkcije $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$d_1(P, Q) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

$$d_2(P, Q) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

$$d_\infty(P, Q) := \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

gdje su $P = (x_1, x_2)$ i $Q = (y_1, y_2)$ proizvoljne točke u $\mathbb{R}^2$.

- Lako se provjeri da su d_1, d_2 i d_∞ zaista metrike na $\mathbb{R}^2$.

Očito je d_2 upravo euklidska metrika iz primjera 6.1, tj. $(\mathbb{R}^2, d_2) = \mathbb{E}^2$.
Prostori $(\mathbb{R}^2, d_1)$ i $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ *nisu* euklidski prostori.

Jasno je da odgovarajuće metrike d_1, d_2 i d_∞ postoje i na $\mathbb{R}^n$ za sve n.

NAPOMENA: Kako su u $\mathbb{R}$ sve tri metrike iste, umjesto $\mathbb{E}^1$ rabit ćemo $\mathbb{R}$.

Različite metrike na $\mathbb{R}^n$

Na skupu $\mathbb{R}^n$ moguće je definirati mnogo različitih razdaljinskih funkcija. Promotrimo tri, a zbog jednostavnosti i *geometrijskog zôra*, za $n = 2$.

Primjer 6.4

Definirajmo sljedeće tri funkcije $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$d_1(P, Q) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

$$d_2(P, Q) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

$$d_\infty(P, Q) := \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

gdje su $P = (x_1, x_2)$ i $Q = (y_1, y_2)$ proizvoljne točke u $\mathbb{R}^2$.

Lako se provjeri da su d_1, d_2 i d_∞ zaista metrike na $\mathbb{R}^2$.
Očito je d_2 upravo euklidska metrika iz primjera 6.1, tj. $(\mathbb{R}^2, d_2) = \mathbb{E}^2$.
Prostori $(\mathbb{R}^2, d_1)$ i $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ *nisu* euklidski prostori.

Jasno je da odgovarajuće metrike d_1, d_2 i d_∞ postoje i na $\mathbb{R}^n$ za sve n.

NAPOMENA: Kako su u $\mathbb{R}$ sve tri metrike iste, umjesto $\mathbb{E}^1$ rabit ćemo $\mathbb{R}$.

Različite metrike na $\mathbb{R}^n$

Na skupu $\mathbb{R}^n$ moguće je definirati mnogo različitih razdaljinskih funkcija. Promotrimo tri, a zbog jednostavnosti i *geometrijskog zôra*, za $n = 2$.

Primjer 6.4

Definirajmo sljedeće tri funkcije $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$d_1(P,Q) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$
$$d_2(P,Q) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$
$$d_\infty(P,Q) := \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

gdje su $P = (x_1, x_2)$ i $Q = (y_1, y_2)$ proizvoljne točke u $\mathbb{R}^2$.

Lako se provjeri da su d_1, d_2 i d_∞ zaista metrike na $\mathbb{R}^2$.
Očito je d_2 upravo euklidska metrika iz primjera 6.1, tj. $(\mathbb{R}^2, d_2) = \mathbb{E}^2$.
Prostori $(\mathbb{R}^2, d_1)$ i $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ *nisu* euklidski prostori.

Jasno je da odgovarajuće metrike d_1, d_2 i d_∞ postoje i na $\mathbb{R}^n$ za sve n.

NAPOMENA: Kako su u $\mathbb{R}$ sve tri metrike iste, umjesto $\mathbb{E}^1$ rabit ćemo $\mathbb{R}$.

Različite metrike na $\mathbb{R}^n$

Na skupu $\mathbb{R}^n$ moguće je definirati mnogo različitih razdaljinskih funkcija. Promotrimo tri, a zbog jednostavnosti i *geometrijskog zôra*, za $n = 2$.

Primjer 6.4

Definirajmo sljedeće tri funkcije $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$d_1(P, Q) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

$$d_2(P, Q) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

$$d_\infty(P, Q) := \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

gdje su $P = (x_1, x_2)$ i $Q = (y_1, y_2)$ proizvoljne točke u $\mathbb{R}^2$.

- Lako se provjeri da su d_1, d_2 i d_∞ zaista metrike na $\mathbb{R}^2$. Očito je d_2 upravo euklidska metrika iz primjera 6.1, tj. $(\mathbb{R}^2, d_2) = \mathbb{E}^2$. Prostori $(\mathbb{R}^2, d_1)$ i $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ *nisu* euklidski prostori.

Jasno je da odgovarajuće metrike d_1, d_2 i d_∞ postoje i na $\mathbb{R}^n$ za sve n.

NAPOMENA: Kako su u $\mathbb{R}$ sve tri metrike iste, umjesto $\mathbb{E}^1$ rabit ćemo $\mathbb{R}$.

Kompleksni brojevi $\mathbb{C}$ kao metrički prostor

Primjer 6.5

Za kompleksne brojeve z_1 i z_2 definiramo njihovu udaljenost kao

$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$$

i tako dobivamo metrički prostor $(\mathbb{C}, d)$.

Izrazimo li kompleksne brojeve z kao $x + iy$, dobivamo

$$d(z_1, z_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

kao kada na kompleksne brojeve gledamo kao na parove realnih brojeva.
Da je d zaista metrika na $\mathbb{C}$, dokazuje se sada isto kao i za d_2 u $\mathbb{R}^2$.
U kojem su smislu metrički prostori $(\mathbb{C}, d)$ i $\mathbb{E}^2 = (\mathbb{R}^2, d_2)$ ekvivalentni, vidjet ćemo u §8 (primjer 8.11).

Kompleksni brojevi $\mathbb{C}$ kao metrički prostor

Primjer 6.5

Za kompleksne brojeve z_1 i z_2 definiramo njihovu udaljenost kao

$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$$

i tako dobivamo metrički prostor $(\mathbb{C}, d)$.

Izrazimo li kompleksne brojeve z kao $x + iy$, dobivamo

$$d(z_1, z_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

kao kada na kompleksne brojeve gledamo kao na parove realnih brojeva. Da je d zaista metrika na $\mathbb{C}$, dokazuje se sada isto kao i za d_2 u $\mathbb{R}^2$.

U kojem su smislu metrički prostori $(\mathbb{C}, d)$ i $\mathbb{E}^2 = (\mathbb{R}^2, d_2)$ ekvivalentni, vidjet ćemo u §8 (primjer 8.11).

Kompleksni brojevi $\mathbb{C}$ kao metrički prostor

Primjer 6.5

Za kompleksne brojeve z_1 i z_2 definiramo njihovu udaljenost kao

$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$$

i tako dobivamo metrički prostor $(\mathbb{C}, d)$.

Izrazimo li kompleksne brojeve z kao $x + iy$, dobivamo

$$d(z_1, z_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

kao kada na kompleksne brojeve gledamo kao na parove realnih brojeva. Da je d zaista metrika na $\mathbb{C}$, dokazuje se sada isto kao i za d_2 u $\mathbb{R}^2$. U kojem su smislu metrički prostori $(\mathbb{C}, d)$ i $\mathbb{E}^2 = (\mathbb{R}^2, d_2)$ ekvivalentni, vidjet ćemo u §8 (primjer 8.11).

Metrički potprostor

Neka je A podskup metričkog prostora (X, d). Tada je očito restrikcija $d_A = d|_{A\times A} \colon A \times A \to \mathbb{R}$, jedna metrika na A.
Kaže se, malo neprecizno, i da je metrika d_A dobivena restrikcijom na A metrike d.

Definicija 6.6

Ovako definiran metrički prostor (A, d_A) naziva se *metrički potprostor* ili kratko *potprostor* metričkog prostora (X, d).

Iz definicije je jasno da za točke $a, a' \in A$ vrijedi $d_A(a, a') = d(a, a')$, pa se najčešće „indeks" (*subscript*) uz metriku d_A ne piše, tj. za metriku na potprostoru A koristi se ista oznaka, d, kao i za metriku na X.

Napomena 6.7

Ako je $A \subseteq X$, a X je metrički prostor, onda ćemo nekad govoriti o A kao *podskupu* od X, a nekad kao o *potprostoru* od X, ovisno o tome na čemu je u tom trenutku naglasak.

Metrički potprostor

Neka je A podskup metričkog prostora (X, d). Tada je očito restrikcija $d_A = d|_{A\times A}\colon A \times A \to \mathbb{R}$, jedna metrika na A.
Kaže se, malo neprecizno, i da je metrika d_A dobivena restrikcijom na A metrike d.

Definicija 6.6

Ovako definiran metrički prostor (A, d_A) naziva se *metrički potprostor* ili kratko *potprostor* metričkog prostora (X, d).

Iz definicije je jasno da za točke $a, a' \in A$ vrijedi $d_A(a, a') = d(a, a')$, pa se najčešće „indeks" (*subscript*) uz metriku d_A ne piše, tj. za metriku na potprostoru A koristi se ista oznaka, d, kao i za metriku na X.

Napomena 6.7

Ako je $A \subseteq X$, a X je metrički prostor, onda ćemo nekad govoriti o A kao *podskupu* od X, a nekad kao o *potprostoru* od X, ovisno o tome na čemu je u tom trenutku naglasak.

Metrički potprostor

Neka je A podskup metričkog prostora (X, d). Tada je očito restrikcija $d_A = d|_{A\times A}\colon A \times A \to \mathbb{R}$, jedna metrika na A.
Kaže se, malo neprecizno, i da je metrika d_A dobivena restrikcijom na A metrike d.

Definicija 6.6

Ovako definiran metrički prostor (A, d_A) naziva se *metrički potprostor* ili kratko *potprostor* metričkog prostora (X, d).

Iz definicije je jasno da za točke $a, a' \in A$ vrijedi $d_A(a, a') = d(a, a')$, pa se najčešće „indeks" (*subscript*) uz metriku d_A ne piše, tj. za metriku na potprostoru A koristi se ista oznaka, d, kao i za metriku na X.

Napomena 6.7

Ako je $A \subseteq X$, a X je metrički prostor, onda ćemo nekad govoriti o A kao *podskupu* od X, a nekad kao o *potprostoru* od X, ovisno o tome na čemu je u tom trenutku naglasak.

Metrički potprostor

Neka je A podskup metričkog prostora (X, d). Tada je očito restrikcija $d_A = d|_{A\times A}\colon A \times A \to \mathbb{R}$, jedna metrika na A.
Kaže se, malo neprecizno, i da je metrika d_A dobivena restrikcijom na A metrike d.

Definicija 6.6

Ovako definiran metrički prostor (A, d_A) naziva se *metrički potprostor* ili kratko *potprostor* metričkog prostora (X, d).

Iz definicije je jasno da za točke $a, a' \in A$ vrijedi $d_A(a, a') = d(a, a')$, pa se najčešće „indeks" (*subscript*) uz metriku d_A ne piše, tj. za metriku na potprostoru A koristi se ista oznaka, d, kao i za metriku na X.

Napomena 6.7

Ako je $A \subseteq X$, a X je metrički prostor, onda ćemo nekad govoriti o A kao *podskupu* od X, a nekad kao o *potprostoru* od X, ovisno o tome na čemu je u tom trenutku naglasak.

Neprekidnost restrikcije preslikavanja na potprostor

Neka su X i Y metrički prostori, $f\colon X \to Y$ neko preslikavanje, i A potprostor od X. Treba razlikovati neprekidnost preslikavanja f i njegove restrikcije na A, tj. preslikavanja $f|_A$. Neposredno iz definicije slijedi

Teorem 6.8

Neka je $f\colon X \to Y$ neprekidno preslikavanje i $A \subseteq X$ proizvoljan potprostor. Tada je restrikcija $f|_A\colon A \to Y$ neprekidna. $\square$

Obrat ni u kom slučaju ne vrijedi:

Primjer 6.9

Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tzv. *Dirichletova funkcija* definirana s

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in \mathbb{Q} \\ 0\,, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Restrikcija $f|_{\mathbb{Q}}$ je konstantna funkcija, koja je neprekidna na $\mathbb{Q}$, dok f nije neprekidna nigdje.

Neprekidnost restrikcije preslikavanja na potprostor

Neka su X i Y metrički prostori, $f\colon X \to Y$ neko preslikavanje, i A potprostor od X. Treba razlikovati neprekidnost preslikavanja f i njegove restrikcije na A, tj. preslikavanja $f|_A$. Neposredno iz definicije slijedi

Teorem 6.8

Neka je $f\colon X \to Y$ neprekidno preslikavanje i $A \subseteq X$ proizvoljan potprostor. Tada je restrikcija $f|_A\colon A \to Y$ neprekidna. $\square$

Obrat ni u kom slučaju ne vrijedi:

Primjer 6.9

Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tzv. *Dirichletova funkcija* definirana s

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in \mathbb{Q} \\ 0\,, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Restrikcija $f|_{\mathbb{Q}}$ je konstantna funkcija, koja je neprekidna na $\mathbb{Q}$, dok f nije neprekidna nigdje.

Neprekidnost restrikcije preslikavanja na potprostor

Neka su X i Y metrički prostori, $f\colon X \to Y$ neko preslikavanje, i A potprostor od X. Treba razlikovati neprekidnost preslikavanja f i njegove restrikcije na A, tj. preslikavanja $f|_A$. Neposredno iz definicije slijedi

Teorem 6.8

Neka je $f\colon X \to Y$ neprekidno preslikavanje i $A \subseteq X$ proizvoljan potprostor. Tada je restrikcija $f|_A\colon A \to Y$ neprekidna. □

Obrat ni u kom slučaju ne vrijedi:

Primjer 6.9

Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tzv. *Dirichletova funkcija* definirana s

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in \mathbb{Q} \\ 0\,, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Restrikcija $f|_{\mathbb{Q}}$ je konstantna funkcija, koja je neprekidna na $\mathbb{Q}$, dok f nije neprekidna nigdje.

Neprekidnost *slijeva* i neprekidnost *zdesna*

Primjer 6.10

Neka je $[a, b] \subseteq S \subseteq \mathbb{R}$ i neka je $f\colon S \to \mathbb{R}$ neka funkcija.
Što znači neprekidnost restrikcije $f|_{[a,b]}$?

Po definiciji, $f|_{[a,b]}$ je neprekidna u $c \in [a, b]$ ako

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall x \in [a, b]\ \left(|x - c| < \delta \Rightarrow \left|(f|_{[a,b]})(x) - (f|_{[a,b]})(c)\right| < \varepsilon\right)$$

Kako za $x \in [a, b]$ vrijedi $(f|_{[a,b]})(x) = f(x)$, to je isto što i

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall x \in [a, b]\ \left(|x - c| < \delta| \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon\right).$$

Ako je $c \in \langle a, b\rangle$ onda to nije ništa drugo nego neprekidnost od f u c.
Ali što je s neprekidnošću restrikcije $f|_{[a,b]}$ u a? Zahtjev $x \in [a, b]$ i $|x - a| < \delta$ znači $a \leqslant x < a + \delta$, pa onda neprekidnost restrikcije $f|_{[a,b]}$ u a zapravo znači *neprekidnost zdesna* funkcije f u točki a.

Analogno, restrikcija $f|_{[a,b]}$ je neprekidna u b ako i samo ako je funkcija f *neprekidna slijeva* u točki b.

Neprekidnost *slijeva* i neprekidnost *zdesna*

Primjer 6.10

Neka je $[a,b] \subseteq S \subseteq \mathbb{R}$ i neka je $f\colon S \to \mathbb{R}$ neka funkcija.
Što znači neprekidnost restrikcije $f|_{[a,b]}$?
Po definiciji, $f|_{[a,b]}$ je neprekidna u $c \in [a,b]$ ako

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall x \in [a,b]\ \Big(|x-c| < \delta \Rightarrow \big|(f|_{[a,b]})(x) - (f|_{[a,b]})(c)\big| < \varepsilon\Big)$$

Kako za $x \in [a,b]$ vrijedi $(f|_{[a,b]})(x) = f(x)$, to je isto što i

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall x \in [a,b]\ \big(|x-c| < \delta| \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon\big).$$

Ako je $c \in \langle a,b \rangle$ onda to nije ništa drugo nego neprekidnost od f u c.
Ali što je s neprekidnošću restrikcije $f|_{[a,b]}$ u a? Zahtjev $x \in [a,b]$ i $|x-a| < \delta$ znači $a \leqslant x < a+\delta$, pa onda neprekidnost restrikcije $f|_{[a,b]}$ u a zapravo znači *neprekidnost zdesna* funkcije f u točki a.

Analogno, restrikcija $f|_{[a,b]}$ je neprekidna u b ako i samo ako je funkcija f *neprekidna slijeva* u točki b.

Neprekidnost *slijeva* i neprekidnost *zdesna*

Primjer 6.10

Neka je $[a, b] \subseteq S \subseteq \mathbb{R}$ i neka je $f\colon S \to \mathbb{R}$ neka funkcija.
Što znači neprekidnost restrikcije $f|_{[a,b]}$?
Po definiciji, $f|_{[a,b]}$ je neprekidna u $c \in [a, b]$ ako

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall x \in [a, b] \ \Big(|x - c| < \delta \Rightarrow \big|(f|_{[a,b]})(x) - (f|_{[a,b]})(c)\big| < \varepsilon\Big)$$

Kako za $x \in [a, b]$ vrijedi $(f|_{[a,b]})(x) = f(x)$, to je isto što i

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall x \in [a, b] \ \Big(|x - c| < \delta| \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon\Big).$$

Ako je $c \in \langle a, b \rangle$ onda to nije ništa drugo nego neprekidnost od f u c.
Ali što je s neprekidnošću restrikcije $f|_{[a,b]}$ u a? Zahtjev $x \in [a, b]$ i $|x - a| < \delta$ znači $a \leqslant x < a + \delta$, pa onda neprekidnost restrikcije $f|_{[a,b]}$ u a zapravo znači *neprekidnost zdesna* funkcije f u točki a.

Analogno, restrikcija $f|_{[a,b]}$ je neprekidna u b ako i samo ako je funkcija f *neprekidna slijeva* u točki b.

Neprekidnost *slijeva* i neprekidnost *zdesna*

Primjer 6.10

Neka je $[a, b] \subseteq S \subseteq \mathbb{R}$ i neka je $f\colon S \to \mathbb{R}$ neka funkcija.
Što znači neprekidnost restrikcije $f|_{[a,b]}$?
Po definiciji, $f|_{[a,b]}$ je neprekidna u $c \in [a, b]$ ako

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall x \in [a, b]\ \Big(|x - c| < \delta \Rightarrow \big|(f|_{[a,b]})(x) - (f|_{[a,b]})(c)\big| < \varepsilon\Big)$$

Kako za $x \in [a, b]$ vrijedi $(f|_{[a,b]})(x) = f(x)$, to je isto što i

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall x \in [a, b]\ \Big(|x - c| < \delta| \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon\Big).$$

Ako je $c \in \langle a, b\rangle$ onda to nije ništa drugo nego neprekidnost od f u c.
Ali što je s neprekidnošću restrikcije $f|_{[a,b]}$ u a? Zahtjev $x \in [a, b]$ i $|x - a| < \delta$ znači $a \leqslant x < a + \delta$, pa onda neprekidnost restrikcije $f|_{[a,b]}$ u a zapravo znači *neprekidnost zdesna* funkcije f u točki a.

Analogno, restrikcija $f|_{[a,b]}$ je neprekidna u b ako i samo ako je funkcija f *neprekidna slijeva* u točki b.

Neprekidnost *slijeva* i neprekidnost *zdesna*

Primjer 6.10

Neka je $[a,b] \subseteq S \subseteq \mathbb{R}$ i neka je $f\colon S \to \mathbb{R}$ neka funkcija.
Što znači neprekidnost restrikcije $f|_{[a,b]}$?
Po definiciji, $f|_{[a,b]}$ je neprekidna u $c \in [a,b]$ ako

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall x \in [a,b]\ \Big(|x-c| < \delta \Rightarrow \big|(f|_{[a,b]})(x) - (f|_{[a,b]})(c)\big| < \varepsilon\Big)$$

Kako za $x \in [a,b]$ vrijedi $(f|_{[a,b]})(x) = f(x)$, to je isto što i

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall x \in [a,b]\ \big(|x-c| < \delta| \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon\big).$$

Ako je $c \in \langle a,b \rangle$ onda to nije ništa drugo nego neprekidnost od f u c.
Ali što je s neprekidnošću restrikcije $f|_{[a,b]}$ u a? Zahtjev $x \in [a,b]$ i $|x-a| < \delta$ znači $a \leqslant x < a+\delta$, pa onda neprekidnost restrikcije $f|_{[a,b]}$ u a zapravo znači *neprekidnost zdesna* funkcije f u točki a.

Analogno, restrikcija $f|_{[a,b]}$ je neprekidna u b ako i samo ako je funkcija f *neprekidna slijeva* u točki b.

Neprekidnost *slijeva* i neprekidnost *zdesna*

Primjer 6.10

Neka je $[a, b] \subseteq S \subseteq \mathbb{R}$ i neka je $f\colon S \to \mathbb{R}$ neka funkcija.
Što znači neprekidnost restrikcije $f|_{[a,b]}$?
Po definiciji, $f|_{[a,b]}$ je neprekidna u $c \in [a, b]$ ako

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall x \in [a, b]\ \Big(|x - c| < \delta \Rightarrow \big|(f|_{[a,b]})(x) - (f|_{[a,b]})(c)\big| < \varepsilon \Big)$$

Kako za $x \in [a, b]$ vrijedi $(f|_{[a,b]})(x) = f(x)$, to je isto što i

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall x \in [a, b]\ \Big(|x - c| < \delta| \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon \Big).$$

Ako je $c \in \langle a, b\rangle$ onda to nije ništa drugo nego neprekidnost od f u c.
Ali što je s neprekidnošću restrikcije $f|_{[a,b]}$ u a? Zahtjev $x \in [a, b]$ i $|x - a| < \delta$ znači $a \leqslant x < a + \delta$, pa onda neprekidnost restrikcije $f|_{[a,b]}$ u a zapravo znači *neprekidnost zdesna* funkcije f u točki a.

Analogno, restrikcija $f|_{[a,b]}$ je neprekidna u b ako i samo ako je funkcija f *neprekidna slijeva* u točki b.

Neprekidnost *slijeva* i neprekidnost *zdesna*

Primjer 6.10

Neka je $[a, b] \subseteq S \subseteq \mathbb{R}$ i neka je $f\colon S \to \mathbb{R}$ neka funkcija.
Što znači neprekidnost restrikcije $f|_{[a,b]}$?
Po definiciji, $f|_{[a,b]}$ je neprekidna u $c \in [a, b]$ ako

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall x \in [a, b]\ \Big(|x - c| < \delta \Rightarrow \big|(f|_{[a,b]})(x) - (f|_{[a,b]})(c)\big| < \varepsilon\Big)$$

Kako za $x \in [a, b]$ vrijedi $(f|_{[a,b]})(x) = f(x)$, to je isto što i

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \forall x \in [a, b]\ \Big(|x - c| < \delta| \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon\Big).$$

Ako je $c \in \langle a, b\rangle$ onda to nije ništa drugo nego neprekidnost od f u c.
Ali što je s neprekidnošću restrikcije $f|_{[a,b]}$ u a? Zahtjev $x \in [a, b]$ i $|x - a| < \delta$ znači $a \leqslant x < a + \delta$, pa onda neprekidnost restrikcije $f|_{[a,b]}$ u a zapravo znači *neprekidnost zdesna* funkcije f u točki a.

Analogno, restrikcija $f|_{[a,b]}$ je neprekidna u b ako i samo ako je funkcija f *neprekidna slijeva* u točki b.

Produkt metričkih prostora

Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) dva metrička prostora. Tada na produktu $X \times Y$ možemo definirati različite metrike, npr. kao u primjeru 6.4:

$$d_1\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) := d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$$

$$d_2\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) := \sqrt{\big(d_X(x_1, x_2)\big)^2 + \big(d_Y(y_1, y_2)\big)^2}$$

$$d_\infty\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) := \max\{d_X(x_1, x_2)\,, d_Y(y_1, y_2)\}$$

Kao za $\mathbb{R}^2$, lako se pokazuje da su d_1, d_2 i d_∞ zaista metrike na $X \times Y$.

U § 8 (primjer 8.6) vidjet ćemo da su ove tri metrike u izvjesnom smislu ekvivalentne, što opravdava sljedeću definiciju (vidi i napomenu 8.12):

Definicija 6.11

Kartezijev produkt $X \times Y$ zajedno s bilo kojom od navedenih metrika d_1, d_2 ili d_∞ naziva se *produkt metričkih prostora* X i Y.

Analogno se definira i produkt od više, ali konačno mnogo, metričkih prostora.

Produkt metričkih prostora

Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) dva metrička prostora. Tada na produktu $X \times Y$ možemo definirati različite metrike, npr. kao u primjeru 6.4:

$$d_1\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) := d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$$

$$d_2\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) := \sqrt{\big(d_X(x_1, x_2)\big)^2 + \big(d_Y(y_1, y_2)\big)^2}$$

$$d_\infty\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) := \max\{d_X(x_1, x_2)\,, d_Y(y_1, y_2)\}$$

Kao za $\mathbb{R}^2$, lako se pokazuje da su d_1, d_2 i d_∞ zaista metrike na $X \times Y$.

U § 8 (primjer 8.6) vidjet ćemo da su ove tri metrike u izvjesnom smislu ekvivalentne, što opravdava sljedeću definiciju (vidi i napomenu 8.12):

Definicija 6.11

Kartezijev produkt $X \times Y$ zajedno s bilo kojom od navedenih metrika d_1, d_2 ili d_∞ naziva se *produkt metričkih prostora* X i Y.

Analogno se definira i produkt od više, ali konačno mnogo, metričkih prostora.

Produkt metričkih prostora

Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) dva metrička prostora. Tada na produktu $X \times Y$ možemo definirati različite metrike, npr. kao u primjeru 6.4:

$$d_1\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) := d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$$

$$d_2\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) := \sqrt{\big(d_X(x_1, x_2)\big)^2 + \big(d_Y(y_1, y_2)\big)^2}$$

$$d_\infty\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) := \max\{d_X(x_1, x_2)\,, d_Y(y_1, y_2)\}$$

Kao za $\mathbb{R}^2$, lako se pokazuje da su d_1, d_2 i d_∞ zaista metrike na $X \times Y$.

U § 8 (primjer 8.6) vidjet ćemo da su ove tri metrike u izvjesnom smislu ekvivalentne, što opravdava sljedeću definiciju (vidi i napomenu 8.12):

Definicija 6.11

Kartezijev produkt $X \times Y$ zajedno s bilo kojom od navedenih metrika d_1, d_2 ili d_∞ naziva se *produkt metričkih prostora* X i Y.

Analogno se definira i produkt od više, ali konačno mnogo, metričkih prostora.

Metrika na skupu omeđenih funkcija

U analizi, a i drugdje, često treba proučavati neke familije funkcija, i to tako da „bliske" funkcije imaju i „bliska" svojstva. Dakle, treba familiju funkcija snabdjeti strukturom metričkog prostora.

Primjer 6.12

Za omeđene funkcije $f, g \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ definiramo

$$\rho(f, g) := \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| .$$

Na taj način na skupu svih omeđenih realnih funkcija na $[a, b]$ dobivamo metriku.

Lako se pokazuje da je funkcija ρ dobro definirana, tj. da supremum u definiciji zaista postoji, i da ρ zadovoljava uvjete (M1)–(M3).

Pokažimo da vrijedi i (M4).

Metrika na skupu omeđenih funkcija

U analizi, a i drugdje, često treba proučavati neke familije funkcija, i to tako da „bliske" funkcije imaju i „bliska" svojstva. Dakle, treba familiju funkcija snabdjeti strukturom metričkog prostora.

Primjer 6.12

Za omeđene funkcije $f, g \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ definiramo

$$\rho(f, g) := \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| .$$

Na taj način na skupu svih omeđenih realnih funkcija na $[a, b]$ dobivamo metriku.

Lako se pokazuje da je funkcija ρ dobro definirana, tj. da supremum u definiciji zaista postoji, i da ρ zadovoljava uvjete (M1)–(M3).

Pokažimo da vrijedi i (M4).

Metrika na skupu omeđenih funkcija

U analizi, a i drugdje, često treba proučavati neke familije funkcija, i to tako da „bliske” funkcije imaju i „bliska” svojstva. Dakle, treba familiju funkcija snabdjeti strukturom metričkog prostora.

Primjer 6.12

Za omeđene funkcije $f, g \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ definiramo
$$\rho(f, g) := \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| .$$
Na taj način na skupu svih omeđenih realnih funkcija na $[a, b]$ dobivamo metriku.

Lako se pokazuje da je funkcija ρ dobro definirana, tj. da supremum u definiciji zaista postoji, i da ρ zadovoljava uvjete (M1)–(M3).

Pokažimo da vrijedi i (M4).

Metrika na skupu omeđenih funkcija

U analizi, a i drugdje, često treba proučavati neke familije funkcija, i to tako da „bliske" funkcije imaju i „bliska" svojstva. Dakle, treba familiju funkcija snabdjeti strukturom metričkog prostora.

Primjer 6.12

Za omeđene funkcije $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ definiramo

$$\rho(f, g) := \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|\,.$$

Na taj način na skupu svih omeđenih realnih funkcija na $[a, b]$ dobivamo metriku.

Lako se pokazuje da je funkcija ρ dobro definirana, tj. da supremum u definiciji zaista postoji, i da ρ zadovoljava uvjete (M1)–(M3).

Pokažimo da vrijedi i (M4).

Prostor omeđenih funkcija

Neka su $f, g, h \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ tri omeđene funkcije. Tada za svaki $t \in [a, b]$ vrijedi

$$\begin{aligned} |f(t) - g(t)| &\leqslant |f(t) - h(t)| + |h(t) - g(t)| \\ &\leqslant \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - h(x)| + \sup_{x \in [a,b]} |h(x) - g(x)| \\ &= \rho(f, h) + \rho(h, g). \end{aligned}$$

Kako to vrijedi za svaki $t \in [a, b]$, to je $\rho(f, h) + \rho(h, g)$ gornja međa skupa $\{|f(t) - g(t)| : t \in [a, b]\}$. Stoga je i

$$\rho(f, g) = \sup_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)| \leqslant \rho(f, h) + \rho(h, g)$$

pa ρ zadovoljava i (M4).

Definicija 6.13

Metrika ρ naziva se *sup-metrika* ili *uniformna metrika*, i metrički prostor svih omeđenih realnih funkcija na $[a, b]$ s metrikom ρ označujemo $\mathscr{B}([a, b], \mathbb{R})$ ili jednostavno $\mathscr{B}[a, b]$.

Prostor omeđenih funkcija

Neka su $f, g, h\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ tri omeđene funkcije. Tada za svaki $t \in [a, b]$ vrijedi

$$\begin{aligned} |f(t) - g(t)| &\leqslant |f(t) - h(t)| + |h(t) - g(t)| \\ &\leqslant \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - h(x)| + \sup_{x \in [a,b]} |h(x) - g(x)| \\ &= \rho(f, h) + \rho(h, g). \end{aligned}$$

Kako to vrijedi za svaki $t \in [a, b]$, to je $\rho(f, h) + \rho(h, g)$ gornja međa skupa $\{|f(t) - g(t)| : t \in [a, b]\}$. Stoga je i

$$\rho(f, g) = \sup_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)| \leqslant \rho(f, h) + \rho(h, g)$$

pa ρ zadovoljava i (M4).

Definicija 6.13

Metrika ρ naziva se *sup-metrika* ili *uniformna metrika*, i metrički prostor svih omeđenih realnih funkcija na $[a, b]$ s metrikom ρ označujemo $\mathscr{B}([a, b], \mathbb{R})$ ili jednostavno $\mathscr{B}[a, b]$.

Prostor omeđenih funkcija

Neka su $f, g, h \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ tri omeđene funkcije. Tada za svaki $t \in [a, b]$ vrijedi

$$\begin{aligned}|f(t) - g(t)| &\leqslant |f(t) - h(t)| + |h(t) - g(t)| \\ &\leqslant \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - h(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |h(x) - g(x)| \\ &= \rho(f, h) + \rho(h, g).\end{aligned}$$

Kako to vrijedi za svaki $t \in [a, b]$, to je $\rho(f, h) + \rho(h, g)$ gornja međa skupa $\{|f(t) - g(t)| : t \in [a, b]\}$. Stoga je i

$$\rho(f, g) = \sup_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)| \leqslant \rho(f, h) + \rho(h, g)$$

pa ρ zadovoljava i (M4).

Definicija 6.13

Metrika ρ naziva se *sup-metrika* ili *uniformna metrika*, i metrički prostor svih omeđenih realnih funkcija na $[a, b]$ s metrikom ρ označujemo $\mathscr{B}([a, b], \mathbb{R})$ ili jednostavno $\mathscr{B}[a, b]$.

Prostor omeđenih funkcija

Neka su $f, g, h\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ tri omeđene funkcije. Tada za svaki $t \in [a, b]$ vrijedi

$$\begin{aligned}|f(t) - g(t)| &\leqslant |f(t) - h(t)| + |h(t) - g(t)| \\ &\leqslant \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - h(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |h(x) - g(x)| \\ &= \rho(f, h) + \rho(h, g).\end{aligned}$$

Kako to vrijedi za svaki $t \in [a, b]$, to je $\rho(f, h) + \rho(h, g)$ gornja međa skupa $\{|f(t) - g(t)| : t \in [a, b]\}$. Stoga je i

$$\rho(f, g) = \sup_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)| \leqslant \rho(f, h) + \rho(h, g)$$

pa ρ zadovoljava i (M4).

Definicija 6.13

Metrika ρ naziva se *sup-metrika* ili *uniformna metrika*, i metrički prostor svih omeđenih realnih funkcija na $[a, b]$ s metrikom ρ označujemo $\mathscr{B}([a, b], \mathbb{R})$ ili jednostavno $\mathscr{B}[a, b]$.

Prostor neprekidnih funkcija

Kao što znamo iz analize (vidi uvod, str. 1), svaka je neprekidna funkcija $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ omeđena.

Definicija 6.14

Skup svih neprekidnih realnih funkcija na $[a, b]$ sa sup-metrikom ρ je metrički prostor. Nazivamo ga *prostorom neprekidnih realnih funkcija* na $[a, b]$, oznaka $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ ili jednostavno $\mathscr{C}[a, b]$. On je potprostor metričkog prostora $\mathscr{B}[a, b]$.

Napomena 6.15

Uniformna metrika ρ često se označava d_∞, i na skupu neprekidnih realnih funkcija na $[a, b]$ predstavlja, uz metrike d_1 i d_2 definirane na sljedećoj stranici, analogone metrikama d_∞, d_1 i d_2 na $\mathbb{R}^n$.

Prostor neprekidnih funkcija

Kao što znamo iz analize (vidi uvod, str. 1), svaka je neprekidna funkcija $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ omeđena.

Definicija 6.14

Skup svih neprekidnih realnih funkcija na $[a, b]$ sa sup-metrikom ρ je metrički prostor. Nazivamo ga *prostorom neprekidnih realnih funkcija* na $[a, b]$, oznaka $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ ili jednostavno $\mathscr{C}[a, b]$. On je potprostor metričkog prostora $\mathscr{B}[a, b]$.

Napomena 6.15

Uniformna metrika ρ često se označava d_∞, i na skupu neprekidnih realnih funkcija na $[a, b]$ predstavlja, uz metrike d_1 i d_2 definirane na sljedećoj stranici, analogone metrikama d_∞, d_1 i d_2 na $\mathbb{R}^n$.

Prostor neprekidnih funkcija

Kao što znamo iz analize (vidi uvod, str. 1), svaka je neprekidna funkcija $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ omeđena.

Definicija 6.14

Skup svih neprekidnih realnih funkcija na $[a, b]$ sa sup-metrikom ρ je metrički prostor. Nazivamo ga *prostorom neprekidnih realnih funkcija* na $[a, b]$, oznaka $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ ili jednostavno $\mathscr{C}[a, b]$. On je potprostor metričkog prostora $\mathscr{B}[a, b]$.

Napomena 6.15

Uniformna metrika ρ često se označava d_∞, i na skupu neprekidnih realnih funkcija na $[a, b]$ predstavlja, uz metrike d_1 i d_2 definirane na sljedećoj stranici, analogone metrikama d_∞, d_1 i d_2 na $\mathbb{R}^n$.

Još dvije metrike na skupu neprekidnih funkcija

Na skupu neprekidnih funkcija $[a, b] \to \mathbb{R}$ promatraju se i druge metrike.

Definicija 6.16

Za neprekidne funkcije $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ definiramo

$$d_1(f, g) := \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x\,.$$

Pokazuje se da je d_1 zaista metrika na skupu neprekidnih funkcija na $[a, b]$, i naziva se *L_1-metrika*.

Definicija 6.17

Za neprekidne funkcije $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ definiramo i

$$d_2(f, g) := \sqrt{\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)^2\,\mathrm{d}x}.$$

d_2 je također jedna metrika na skupu neprekidnih funkcija na $[a, b]$, i naziva se *L_2-metrika*.

Još dvije metrike na skupu neprekidnih funkcija

Na skupu neprekidnih funkcija $[a, b] \to \mathbb{R}$ promatraju se i druge metrike.

Definicija 6.16

Za neprekidne funkcije $f, g \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ definiramo

$$d_1(f, g) := \int_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x \, .$$

Pokazuje se da je d_1 zaista metrika na skupu neprekidnih funkcija na $[a, b]$, i naziva se *L_1-metrika*.

Definicija 6.17

Za neprekidne funkcije $f, g \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ definiramo i

$$d_2(f, g) := \sqrt{\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)^2 \, \mathrm{d}x}.$$

d_2 je također jedna metrika na skupu neprekidnih funkcija na $[a, b]$, i naziva se *L_2-metrika*.

Još dvije metrike na skupu neprekidnih funkcija

Na skupu neprekidnih funkcija $[a, b] \to \mathbb{R}$ promatraju se i druge metrike.

Definicija 6.16

Za neprekidne funkcije $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ definiramo

$$d_1(f, g) := \int_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x \, .$$

Pokazuje se da je d_1 zaista metrika na skupu neprekidnih funkcija na $[a, b]$, i naziva se *L_1-metrika*.

Definicija 6.17

Za neprekidne funkcije $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ definiramo i

$$d_2(f, g) := \sqrt{\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)^2 \, \mathrm{d}x}.$$

d_2 je također jedna metrika na skupu neprekidnih funkcija na $[a, b]$, i naziva se *L_2-metrika*.

Hilbertov prostor ℓ_2 i Hilbertov kub I^ω

Evo primjera dvaju važnih metričkih prostora o kojima će još biti govora:

Definicija 6.18

Hilbertov prostor ℓ_2 je skup svi nizova $\mathbf{x} = (x_k)_k$ realnih brojeva takvih da red $\sum x_k^2$ konvergira, s metrikom definiranom ovako:

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2}.$$

Definicija 6.19

Hilbertov kub I^ω je skup svih nizova realnih brojeva $\mathbf{x} = (x_k)_k$ takvih da je $x_k \in I = [0, 1]$ za sve k, s metrikom definiranom kao

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{2^k}.$$

Hilbertov prostor ℓ_2 i Hilbertov kub I^ω

Evo primjera dvaju važnih metričkih prostora o kojima će još biti govora:

Definicija 6.18

Hilbertov prostor ℓ_2 je skup svi nizova $\mathbf{x} = (x_k)_k$ realnih brojeva takvih da red $\sum x_k^2$ konvergira, s metrikom definiranom ovako:

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2}.$$

Definicija 6.19

Hilbertov kub I^ω je skup svih nizova realnih brojeva $\mathbf{x} = (x_k)_k$ takvih da je $x_k \in I = [0,1]$ za sve k, s metrikom definiranom kao

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{2^k}.$$

Hilbertov prostor ℓ_2 i Hilbertov kub I^ω

Evo primjera dvaju važnih metričkih prostora o kojima će još biti govora:

Definicija 6.18

Hilbertov prostor ℓ_2 je skup svi nizova $\mathbf{x} = (x_k)_k$ realnih brojeva takvih da red $\sum x_k^2$ konvergira, s metrikom definiranom ovako:

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2}.$$

Definicija 6.19

Hilbertov kub I^ω je skup svih nizova realnih brojeva $\mathbf{x} = (x_k)_k$ takvih da je $x_k \in I = [0, 1]$ za sve k, s metrikom definiranom kao

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{2^k}.$$

Omeđeni skupovi

Definicija 6.20

Za podskup A metričkog prostora (X, d) kažemo da je *omeđen* ako postoji točka $x \in X$ i broj $M \in \mathbb{R}$ t.d. je $d(a, x) \leqslant M$ za sve $a \in A$.

- Lako se vidi da ako je $A \subseteq X$ omeđen, onda za *svaku* točku $x' \in X$ postoji $M' \in \mathbb{R}$ t.d. je $d(a, x') \leqslant M'$ za sve $a \in A$ $\quad [M' = M + d(x, x')]$.

Definicija 6.21

Za neprazan omeđen podskup A metričkog prostora (X, d) definira se *dijametar* kao broj $\operatorname{diam} A := \sup\limits_{a, a' \in A} d(a, a')$.

Lako se pokazuje

Teorem 6.22

Unija konačnog broja omeđenih skupova je omeđen skup.

Omeđeni skupovi

Definicija 6.20

Za podskup A metričkog prostora (X, d) kažemo da je *omeđen* ako postoji točka $x \in X$ i broj $M \in \mathbb{R}$ t.d. je $d(a, x) \leqslant M$ za sve $a \in A$.

- Lako se vidi da ako je $A \subseteq X$ omeđen, onda za *svaku* točku $x' \in X$ postoji $M' \in \mathbb{R}$ t.d. je $d(a, x') \leqslant M'$ za sve $a \in A$ $[M' = M + d(x, x')]$.

Definicija 6.21

Za neprazan omeđen podskup A metričkog prostora (X, d) definira se *dijametar* kao broj $\operatorname{diam} A := \sup_{a, a' \in A} d(a, a')$.

Lako se pokazuje

Teorem 6.22

Unija konačnog broja omeđenih skupova je omeđen skup.

Omeđeni skupovi

Definicija 6.20

Za podskup A metričkog prostora (X, d) kažemo da je *omeđen* ako postoji točka $x \in X$ i broj $M \in \mathbb{R}$ t.d. je $d(a, x) \leqslant M$ za sve $a \in A$.

- Lako se vidi da ako je $A \subseteq X$ omeđen, onda za *svaku* točku $x' \in X$ postoji $M' \in \mathbb{R}$ t.d. je $d(a, x') \leqslant M'$ za sve $a \in A$ $\quad [M' = M + d(x, x')]$.

Definicija 6.21

Za neprazan omeđen podskup A metričkog prostora (X, d) definira se *dijametar* kao broj $\operatorname{diam} A := \sup\limits_{a,a' \in A} d(a, a')$.

Lako se pokazuje

- **Teorem 6.22**

  Unija konačnog broja omeđenih skupova je omeđen skup.

Omeđeni skupovi

Definicija 6.20

Za podskup A metričkog prostora (X, d) kažemo da je *omeđen* ako postoji točka $x \in X$ i broj $M \in \mathbb{R}$ t.d. je $d(a, x) \leqslant M$ za sve $a \in A$.

- Lako se vidi da ako je $A \subseteq X$ omeđen, onda za *svaku* točku $x' \in X$ postoji $M' \in \mathbb{R}$ t.d. je $d(a, x') \leqslant M'$ za sve $a \in A$ $[M' = M + d(x, x')]$.

Definicija 6.21

Za neprazan omeđen podskup A metričkog prostora (X, d) definira se *dijametar* kao broj $\operatorname{diam} A := \sup\limits_{a, a' \in A} d(a, a')$.

Lako se pokazuje

Teorem 6.22

Unija konačnog broja omeđenih skupova je omeđen skup.

Omeđene funkcije

Definicija 6.23

Kažemo da je funkcija $f\colon X \to Y$ skupa X u metrički prostor (Y, d) *omeđena* ako je slika $f(X)$ omeđen podskup od Y.

- Ne treba nam nikakva dodatna struktura na skupu X kako bismo s

$$\rho(f, g) = d_\infty(f, g) := \sup_{x \in X} d\big(f(x), g(x)\big)$$

definirali uniformnu metriku na skupu svih omeđenih funkcija s X u Y.

Tako dobiven metrički prostor označivat ćemo $\mathscr{B}(X, Y)$.
Kada je i X metrički prostor onda je od interesa i njegov potprostor $\mathscr{B}\mathscr{C}(X, Y)$ svih omeđenih neprekidnih preslikavanja s X u Y.

- **Napomena 6.24**

  Uoči da je $\mathscr{B}\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R}) = \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Omeđene funkcije

Definicija 6.23

Kažemo da je funkcija $f\colon X \to Y$ skupa X u metrički prostor (Y, d) *omeđena* ako je slika $f(X)$ omeđen podskup od Y.

Ne treba nam nikakva dodatna struktura na skupu X kako bismo s

$$\rho(f, g) = d_\infty(f, g) := \sup_{x \in X} d\big(f(x), g(x)\big)$$

definirali uniformnu metriku na skupu svih omeđenih funkcija s X u Y.

Tako dobiven metrički prostor označivat ćemo $\mathscr{B}(X, Y)$.
Kada je i X metrički prostor onda je od interesa i njegov potprostor $\mathscr{B}\mathscr{C}(X, Y)$ svih omeđenih neprekidnih preslikavanja s X u Y.

Napomena 6.24

Uoči da je $\mathscr{B}\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R}) = \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Omeđene funkcije

Definicija 6.23

Kažemo da je funkcija $f\colon X \to Y$ skupa X u metrički prostor (Y, d) *omeđena* ako je slika $f(X)$ omeđen podskup od Y.

Ne treba nam nikakva dodatna struktura na skupu X kako bismo s

$$\rho(f, g) = d_\infty(f, g) := \sup_{x \in X} d\big(f(x), g(x)\big)$$

definirali uniformnu metriku na skupu svih omeđenih funkcija s X u Y.

Tako dobiven metrički prostor označivat ćemo $\mathscr{B}(X, Y)$.

Kada je i X metrički prostor onda je od interesa i njegov potprostor $\mathscr{B}\mathscr{C}(X, Y)$ svih omeđenih neprekidnih preslikavanja s X u Y.

Napomena 6.24

Uoči da je $\mathscr{B}\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R}) = \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Omeđene funkcije

Definicija 6.23

Kažemo da je funkcija $f\colon X \to Y$ skupa X u metrički prostor (Y, d) *omeđena* ako je slika $f(X)$ omeđen podskup od Y.

Ne treba nam nikakva dodatna struktura na skupu X kako bismo s

$$\rho(f, g) = d_\infty(f, g) := \sup_{x \in X} d\big(f(x), g(x)\big)$$

definirali uniformnu metriku na skupu svih omeđenih funkcija s X u Y.

Tako dobiven metrički prostor označivat ćemo $\mathscr{B}(X, Y)$.
Kada je i X metrički prostor onda je od interesa i njegov potprostor $\mathscr{B}\mathscr{C}(X, Y)$ svih omeđenih neprekidnih preslikavanja s X u Y.

Napomena 6.24

Uoči da je $\mathscr{B}\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R}) = \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Omeđene funkcije

Definicija 6.23

Kažemo da je funkcija $f\colon X \to Y$ skupa X u metrički prostor (Y, d) *omeđena* ako je slika $f(X)$ omeđen podskup od Y.

Ne treba nam nikakva dodatna struktura na skupu X kako bismo s

$$\rho(f, g) = d_\infty(f, g) := \sup_{x\in X} d\big(f(x), g(x)\big)$$

definirali uniformnu metriku na skupu svih omeđenih funkcija s X u Y.

Tako dobiven metrički prostor označivat ćemo $\mathscr{B}(X, Y)$.
Kada je i X metrički prostor onda je od interesa i njegov potprostor $\mathscr{B}\mathscr{C}(X, Y)$ svih omeđenih neprekidnih preslikavanja s X u Y.

Napomena 6.24

Uoči da je $\mathscr{B}\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R}) = \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Udaljenost točke do skupa

U različitim situacijama korisna je funkcija koju ćemo sada definirati.

Definicija 6.25

Neka je A podskup metričkog prostora (X, d). Za točku $x \in X$ se broj $d(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a)$ naziva *udaljenost točke x do skupa A*.

Primjer 6.26

Udaljenost točke do skupa

U različitim situacijama korisna je funkcija koju ćemo sada definirati.

Definicija 6.25

Neka je A podskup metričkog prostora (X, d). Za točku $x \in X$ se broj $d(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a)$ naziva *udaljenost točke x do skupa A*.

Primjer 6.26

- Za svaku točku $x \in A$ je $d(x, A) = 0$;
- ali obratno ne vrijedi: u $\mathbb{R}$ je $d(2, \langle 2, 3\rangle) = 0$ iako $2 \notin \langle 2, 3\rangle$.
- Za svaki $x \in \mathbb{R}$ je $d(x, \mathbb{Q}) = 0$.
- Neka je $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ jedinična kružnica. Tada za svaki kompleksan broj $w \in \mathbb{C}$ vrijedi $d(w, \mathbb{S}^1) = \big|1 - |w|\big|$.
- Za jednočlan skup $\{a\}$ je $d(x, \{a\}) = d(x, a)$ za sve $x \in X$.

Udaljenost točke do skupa

U različitim situacijama korisna je funkcija koju ćemo sada definirati.

Definicija 6.25

Neka je A podskup metričkog prostora (X, d). Za točku $x \in X$ se broj $d(x, A) := \inf\limits_{a \in A} d(x, a)$ naziva *udaljenost točke x do skupa A*.

Primjer 6.26

- Za svaku točku $x \in A$ je $d(x, A) = 0$;
- ali obratno ne vrijedi: u $\mathbb{R}$ je $d\big(2, \langle 2, 3\rangle\big) = 0$ iako $2 \notin \langle 2, 3\rangle$.
- Za svaki $x \in \mathbb{R}$ je $d(x, \mathbb{Q}) = 0$.
- Neka je $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ jedinična kružnica. Tada za svaki kompleksan broj $w \in \mathbb{C}$ vrijedi $d(w, \mathbb{S}^1) = \big|1 - |w|\big|$.
- Za jednočlan skup $\{a\}$ je $d(x, \{a\}) = d(x, a)$ za sve $x \in X$.

Udaljenost točke do skupa

U različitim situacijama korisna je funkcija koju ćemo sada definirati.

Definicija 6.25

Neka je A podskup metričkog prostora (X, d). Za točku $x \in X$ se broj $d(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a)$ naziva *udaljenost točke x do skupa A*.

Primjer 6.26

- Za svaku točku $x \in A$ je $d(x, A) = 0$;
- ali obratno ne vrijedi: u $\mathbb{R}$ je $d\big(2, \langle 2, 3\rangle\big) = 0$ iako $2 \notin \langle 2, 3\rangle$.
- Za svaki $x \in \mathbb{R}$ je $d(x, \mathbb{Q}) = 0$.
- Neka je $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ jedinična kružnica. Tada za svaki kompleksan broj $w \in \mathbb{C}$ vrijedi $d(w, \mathbb{S}^1) = \big|1 - |w|\big|$.
- Za jednočlan skup $\{a\}$ je $d(x, \{a\}) = d(x, a)$ za sve $x \in X$.

Udaljenost točke do skupa

U različitim situacijama korisna je funkcija koju ćemo sada definirati.

Definicija 6.25

Neka je A podskup metričkog prostora (X, d). Za točku $x \in X$ se broj $d(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a)$ naziva *udaljenost točke x do skupa A*.

Primjer 6.26

- Za svaku točku $x \in A$ je $d(x, A) = 0$;
- ali obratno ne vrijedi: u $\mathbb{R}$ je $d\big(2, \langle 2, 3\rangle\big) = 0$ iako $2 \notin \langle 2, 3\rangle$.
- Za svaki $x \in \mathbb{R}$ je $d(x, \mathbb{Q}) = 0$.
- Neka je $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ jedinična kružnica. Tada za svaki kompleksan broj $w \in \mathbb{C}$ vrijedi $d(w, \mathbb{S}^1) = \big|1 - |w|\big|$.
- Za jednočlan skup $\{a\}$ je $d(x, \{a\}) = d(x, a)$ za sve $x \in X$.

Udaljenost točke do skupa

U različitim situacijama korisna je funkcija koju ćemo sada definirati.

Definicija 6.25

Neka je A podskup metričkog prostora (X, d). Za točku $x \in X$ se broj $d(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a)$ naziva *udaljenost točke x do skupa A*.

Primjer 6.26

- Za svaku točku $x \in A$ je $d(x, A) = 0$;
- ali obratno ne vrijedi: u $\mathbb{R}$ je $d\big(2, \langle 2, 3\rangle\big) = 0$ iako $2 \notin \langle 2, 3\rangle$.
- Za svaki $x \in \mathbb{R}$ je $d(x, \mathbb{Q}) = 0$.
- Neka je $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ jedinična kružnica. Tada za svaki kompleksan broj $w \in \mathbb{C}$ vrijedi $d(w, \mathbb{S}^1) = \big|1 - |w|\big|$.
- Za jednočlan skup $\{a\}$ je $d(x, \{a\}) = d(x, a)$ za sve $x \in X$.

Neprekidnost udaljenosti do skupa

Često je korisna sljedeća činjenica:

Propozicija 6.27

Za svaki podskup A metričkog prostora (X, d) je funkcija $x \mapsto d(x, A)$, kao funkcija $X \to \mathbb{R}$, neprekidna.

Dokaz: Za $x, y \in X$ i svaki $a \in A$ je $d(x, A) \leqslant d(x, a) \leqslant d(x, y) + d(y, a)$, pa je $d(x, A) - d(x, y) \leqslant d(y, a)$ za sve $a \in A$.
Stoga je $d(x, A) - d(x, y) \leqslant \inf_{a \in A} d(y, a) = d(y, A)$, tj. $d(x, A) - d(y, A) \leqslant d(x, y)$. Analogno je $d(y, A) - d(x, A) \leqslant d(x, y)$, pa je $\left| d(x, A) - d(y, A) \right| \leqslant d(x, y)$, odakle slijedi neprekidnost funkcije $x \mapsto d(x, A)$. □

Posljedica 6.28

Za proizvoljnu točku $a \in X$ je funkcija $x \mapsto d(x, a)$, kao funkcija $X \to \mathbb{R}$, neprekidna. □

Neprekidnost udaljenosti do skupa

Često je korisna sljedeća činjenica:

Propozicija 6.27

Za svaki podskup A metričkog prostora (X, d) je funkcija $x \mapsto d(x, A)$, kao funkcija $X \to \mathbb{R}$, neprekidna.

Dokaz: Za $x, y \in X$ i svaki $a \in A$ je $d(x, A) \leqslant d(x, a) \leqslant d(x, y) + d(y, a)$, pa je $d(x, A) - d(x, y) \leqslant d(y, a)$ za sve $a \in A$.
Stoga je $d(x, A) - d(x, y) \leqslant \inf_{a \in A} d(y, a) = d(y, A)$, tj. $d(x, A) - d(y, A) \leqslant d(x, y)$. Analogno je $d(y, A) - d(x, A) \leqslant d(x, y)$, pa je $\left| d(x, A) - d(y, A) \right| \leqslant d(x, y)$, odakle slijedi neprekidnost funkcije $x \mapsto d(x, A)$. $\square$

Posljedica 6.28

Za proizvoljnu točku $a \in X$ je funkcija $x \mapsto d(x, a)$, kao funkcija $X \to \mathbb{R}$, neprekidna. $\square$

Neprekidnost udaljenosti do skupa

Često je korisna sljedeća činjenica:

Propozicija 6.27

Za svaki podskup A metričkog prostora (X, d) je funkcija $x \mapsto d(x, A)$, kao funkcija $X \to \mathbb{R}$, neprekidna.

Dokaz: Za $x, y \in X$ i svaki $a \in A$ je $d(x, A) \leqslant d(x, a) \leqslant d(x, y) + d(y, a)$, pa je $d(x, A) - d(x, y) \leqslant d(y, a)$ za sve $a \in A$.
Stoga je $d(x, A) - d(x, y) \leqslant \inf_{a \in A} d(y, a) = d(y, A)$, tj. $d(x, A) - d(y, A) \leqslant d(x, y)$. Analogno je $d(y, A) - d(x, A) \leqslant d(x, y)$, pa je $\big|d(x, A) - d(y, A)\big| \leqslant d(x, y)$, odakle slijedi neprekidnost funkcije $x \mapsto d(x, A)$. $\square$

Posljedica 6.28

Za proizvoljnu točku $a \in X$ je funkcija $x \mapsto d(x, a)$, kao funkcija $X \to \mathbb{R}$, neprekidna. $\square$

Neprekidnost udaljenosti do skupa

Često je korisna sljedeća činjenica:

Propozicija 6.27

Za svaki podskup A metričkog prostora (X, d) je funkcija $x \mapsto d(x, A)$, kao funkcija $X \to \mathbb{R}$, neprekidna.

Dokaz: Za $x, y \in X$ i svaki $a \in A$ je $d(x, A) \leqslant d(x, a) \leqslant d(x, y) + d(y, a)$, pa je $d(x, A) - d(x, y) \leqslant d(y, a)$ za sve $a \in A$.
Stoga je $d(x, A) - d(x, y) \leqslant \inf_{a \in A} d(y, a) = d(y, A)$, tj. $d(x, A) - d(y, A) \leqslant d(x, y)$. Analogno je $d(y, A) - d(x, A) \leqslant d(x, y)$, pa je $\left| d(x, A) - d(y, A) \right| \leqslant d(x, y)$, odakle slijedi neprekidnost funkcije $x \mapsto d(x, A)$. $\square$

Posljedica 6.28

Za proizvoljnu točku $a \in X$ je funkcija $x \mapsto d(x, a)$, kao funkcija $X \to \mathbb{R}$, neprekidna. $\square$

Neprekidnost udaljenosti do skupa

Često je korisna sljedeća činjenica:

Propozicija 6.27

Za svaki podskup A metričkog prostora (X, d) je funkcija $x \mapsto d(x, A)$, kao funkcija $X \to \mathbb{R}$, neprekidna.

Dokaz: Za $x, y \in X$ i svaki $a \in A$ je $d(x, A) \leqslant d(x, a) \leqslant d(x, y) + d(y, a)$, pa je $d(x, A) - d(x, y) \leqslant d(y, a)$ za sve $a \in A$.
Stoga je $d(x, A) - d(x, y) \leqslant \inf_{a \in A} d(y, a) = d(y, A)$, tj. $d(x, A) - d(y, A) \leqslant d(x, y)$. Analogno je $d(y, A) - d(x, A) \leqslant d(x, y)$, pa je $\left| d(x, A) - d(y, A) \right| \leqslant d(x, y)$, odakle slijedi neprekidnost funkcije $x \mapsto d(x, A)$. □

Posljedica 6.28

Za proizvoljnu točku $a \in X$ je funkcija $x \mapsto d(x, a)$, kao funkcija $X \to \mathbb{R}$, neprekidna. □

Otvorene kugle

Definicija 7.1

Neka je x točka metričkog prostora (X, d) i $r > 0$ pozitivan realan broj. *Otvorena kugla* oko točke x s radijusom r je skup

$$K(x; r) = K_d(x; r) := \{x' \in X : d(x, x') < r\}.$$

$K(x; r)$ će uvijek označivati *otvorenu kuglu*, ali ćemo često, zbog jednostavnosti, govoriti samo *kugla*.

Primjer 7.2

U euklidskim prostorima $\mathbb{R}$, $\mathbb{E}^2$ i $\mathbb{E}^3$ otvorene kugle su redom:

$$K(x; r) = \langle x - r, x + r\rangle \qquad \text{(otvoren interval)}$$

$$K((x, y); r) = \{(x', y') : (x' - x)^2 + (y' - y)^2 < r^2\}$$

(unutrašnjost kruga, krug bez obrubljujuće kružnice)

$$K((x, y, z); r) = \{(x', y', z') : (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 < r^2\}$$

(unutrašnjost kugle, kugla bez obrubljujuće sfere)

Otvorene kugle

Definicija 7.1

Neka je x točka metričkog prostora (X, d) i $r > 0$ pozitivan realan broj. *Otvorena kugla* oko točke x s radijusom r je skup

$$K(x; r) = K_d(x; r) := \{x' \in X : d(x, x') < r\}.$$

$K(x; r)$ će uvijek označivati *otvorenu kuglu*, ali ćemo često, zbog jednostavnosti, govoriti samo *kugla*.

Primjer 7.2

U euklidskim prostorima $\mathbb{R}$, $\mathbb{E}^2$ i $\mathbb{E}^3$ otvorene kugle su redom:

$$K(x; r) = \langle x - r, x + r\rangle \qquad \text{(otvoren interval)}$$

$$K((x, y); r) = \{(x', y') : (x' - x)^2 + (y' - y)^2 < r^2\}$$

(unutrašnjost kruga, krug bez obrubljujuće kružnice)

$$K((x, y, z); r) = \{(x', y', z') : (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 < r^2\}$$

(unutrašnjost kugle, kugla bez obrubljujuće sfere)

Otvorene kugle

Definicija 7.1

Neka je x točka metričkog prostora (X, d) i $r > 0$ pozitivan realan broj. *Otvorena kugla* oko točke x s radijusom r je skup

$$K(x;r) = K_d(x;r) := \{x' \in X : d(x,x') < r\}.$$

$K(x;r)$ će uvijek označivati *otvorenu kuglu*, ali ćemo često, zbog jednostavnosti, govoriti samo *kugla*.

Primjer 7.2

U euklidskim prostorima $\mathbb{R}$, $\mathbb{E}^2$ i $\mathbb{E}^3$ otvorene kugle su redom:

$$K(x;r) = \langle x-r, x+r\rangle \qquad \text{(otvoren interval)}$$

$$K\big((x,y);r\big) = \{(x',y') : (x'-x)^2 + (y'-y)^2 < r^2\}$$

(unutrašnjost kruga, krug bez obrubljujuće kružnice)

$$K\big((x,y,z);r\big) = \{(x',y',z') : (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2 < r^2\}$$

(unutrašnjost kugle, kugla bez obrubljujuće sfere)

Nisu sve kugle okrugle

Termin *kugla* sugerira predodžbu okrugle kugle u našem, 3-dimenzionalnom prostoru. No, jesu li kugle okrugle ili ne, ovisi o metrici.

Evo primjera nekih „jediničnih” otvorenih kugala u $\mathbb{R}^2$:

Primjer 7.3

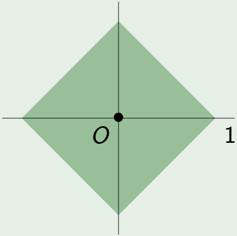
$K_{d_1}(O;1)$ u $(\mathbb{R}^2, d_1)$ $\quad$ $K_{d_2}(O;1)$ u $(\mathbb{R}^2, d_2) = \mathbb{E}^2$ $\quad$ $K_{d_\infty}(O;1)$ u $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$

Nisu sve kugle okrugle

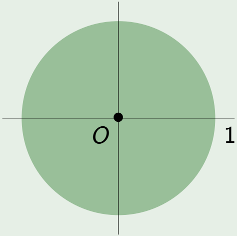
Termin *kugla* sugerira predodžbu okrugle kugle u našem, 3-dimenzionalnom prostoru. No, jesu li kugle okrugle ili ne, ovisi o metrici.

Evo primjera nekih „jediničnih” otvorenih kugala u $\mathbb{R}^2$:

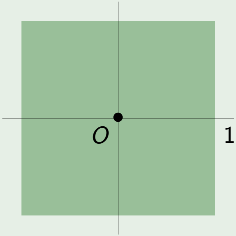
Primjer 7.3



$K_{d_1}(O;1)$ u $(\mathbb{R}^2, d_1)$



$K_{d_2}(O;1)$ u $(\mathbb{R}^2, d_2) = \mathbb{E}^2$



$K_{d_\infty}(O;1)$ u $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$

Još „čudnije” kugle

Primjer 7.4

Otvorena kugla u diskretnom metričkom prostoru (primjer 6.2) je ili jedna točka ili čitav prostor, ovisno o radijusu. Točnije,

$$K(a;r) = \begin{cases} \{a\}, & r \leqslant 1 \\ X, & r > 1 \end{cases}.$$

Primjer 7.5

U prostoru $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ kugla $K_\rho(\sin;1)$ sadrži sve funkcije čiji graf leži između grafova funkcija $x \mapsto \sin x - 1$ i $x \mapsto \sin x + 1$ (npr. plavi graf).

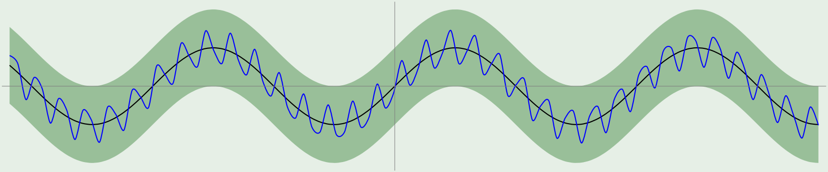
Još „čudnije" kugle

Primjer 7.4

Otvorena kugla u diskretnom metričkom prostoru (primjer 6.2) je ili jedna točka ili čitav prostor, ovisno o radijusu. Točnije,

$$K(a; r) = \begin{cases} \{a\}, & r \leqslant 1 \\ X, & r > 1 \end{cases}.$$

Primjer 7.5



U prostoru $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ kugla $K_\rho(\sin; 1)$ sadrži sve funkcije čiji graf leži između grafova funkcija $x \mapsto \sin x - 1$ i $x \mapsto \sin x + 1$ (npr. plavi graf).

Otvorene kugle u potprostoru

Otvorene kugle u potprostoru mogu biti sasvim drugačije od „istih" kugala u prostoru:

Primjer 7.6

Neka je $A = [0, 3] \cup \{5\} \subseteq \mathbb{R}$.

kugla	u $\mathbb{R}$	u A
$K(1;1)$	$\langle 0, 2\rangle$	$\langle 0, 2\rangle$
$K(1;2)$	$\langle -1, 3\rangle$	$[0, 3\rangle$
$K(1;3)$	$\langle -2, 4\rangle$	$[0, 3]$
$K(3;1)$	$\langle 2, 4\rangle$	$\langle 2, 3]$
$K(5;1)$	$\langle 4, 6\rangle$	$\{5\}$
$K(5;3)$	$\langle 2, 8\rangle$	$\langle 2, 3] \cup \{5\}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Otvorene kugle u potprostoru

Otvorene kugle u potprostoru mogu biti sasvim drugačije od „istih" kugala u prostoru:

Primjer 7.6

Neka je $A = [0,3] \cup \{5\} \subseteq \mathbb{R}$.

kugla	u $\mathbb{R}$	u A
$K(1;1)$	$\langle 0,2\rangle$	$\langle 0,2\rangle$
$K(1;2)$	$\langle -1,3\rangle$	$[0,3\rangle$
$K(1;3)$	$\langle -2,4\rangle$	$[0,3]$
$K(3;1)$	$\langle 2,4\rangle$	$\langle 2,3]$
$K(5;1)$	$\langle 4,6\rangle$	$\{5\}$
$K(5;3)$	$\langle 2,8\rangle$	$\langle 2,3] \cup \{5\}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Neprekidnost i kugle

Koristeći se kuglama, možemo definiciju neprekidnosti, definicija 5.2, izreći i ovako:

Definicija 7.7

Preslikavanje $f\colon X \to Y$ je neprekidno u točki $x^* \in X$ ako za svaku ε-kuglu u Y oko $f(x^*)$ postoji δ-kugla u X oko točke x^* takva da je $f\big(K_X(x^*;\delta)\big) \subseteq K_Y\big(f(x^*);\varepsilon\big)$. Ili kraće

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \text{ t.d. je } \ f\big(K(x^*;\delta)\big) \subseteq K\big(f(x^*);\varepsilon\big).$$

Ovo je očito samo preformulacija originalne definicije neprekidnosti, ali ima zôrni, geometrijski *štih*, i, kao što ćemo uskoro vidjeti, pogodna je za generalizaciju.

Primjer 7.8

Svako preslikavanje diskretnog metričkog prostora (X, δ) u proizvoljan metrički prostor (Y, d) je neprekidno.

Neprekidnost i kugle

Koristeći se kuglama, možemo definiciju neprekidnosti, definicija 5.2, izreći i ovako:

Definicija 7.7

Preslikavanje $f\colon X \to Y$ je neprekidno u točki $x^* \in X$ ako za svaku ε-kuglu u Y oko $f(x^*)$ postoji δ-kugla u X oko točke x^* takva da je $f\big(K_X(x^*;\delta)\big) \subseteq K_Y\big(f(x^*);\varepsilon\big)$. Ili kraće

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \text{ t.d. je } f\big(K(x^*;\delta)\big) \subseteq K\big(f(x^*);\varepsilon\big).$$

Ovo je očito samo preformulacija originalne definicije neprekidnosti, ali ima zôrni, geometrijski *štih*, i, kao što ćemo uskoro vidjeti, pogodna je za generalizaciju.

Primjer 7.8

Svako preslikavanje diskretnog metričkog prostora (X, δ) u proizvoljan metrički prostor (Y, d) je neprekidno.

Neprekidnost i kugle

Koristeći se kuglama, možemo definiciju neprekidnosti, definicija 5.2, izreći i ovako:

Definicija 7.7

Preslikavanje $f\colon X \to Y$ je neprekidno u točki $x^* \in X$ ako za svaku ε-kuglu u Y oko $f(x^*)$ postoji δ-kugla u X oko točke x^* takva da je $f\big(K_X(x^*;\delta)\big) \subseteq K_Y\big(f(x^*);\varepsilon\big)$. Ili kraće

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \text{ t.d. je } \ f\big(K(x^*;\delta)\big) \subseteq K\big(f(x^*);\varepsilon\big).$$

Ovo je očito samo preformulacija originalne definicije neprekidnosti, ali ima zôrni, geometrijski *štih*, i, kao što ćemo uskoro vidjeti, pogodna je za generalizaciju.

Primjer 7.8

Svako preslikavanje diskretnog metričkog prostora (X, δ) u proizvoljan metrički prostor (Y, d) je neprekidno.

Otvoreni skupovi

Sljedeća generalizacija otvorenih kugala pokazala se izuzetno korisnom.

Definicija 7.9

Za podskup U metričkog prostora (X, d) kažemo da je *otvoren* ako za svaku točku $x \in U$ postoji $r > 0$ takav da je $K(x; r) \subseteq U$.

Napomena 7.10

Primijeti da u ovoj definiciji r ovisi o x (intuitivno, što je x bliži „rubu" skupa U to će trebati uzeti manji r).

Otvoreni skupovi

Sljedeća generalizacija otvorenih kugala pokazala se izuzetno korisnom.

Definicija 7.9

Za podskup U metričkog prostora (X, d) kažemo da je *otvoren* ako za svaku točku $x \in U$ postoji $r > 0$ takav da je $K(x; r) \subseteq U$.

Napomena 7.10

Primijeti da u ovoj definiciji r ovisi o x (intuitivno, što je x bliži „rubu” skupa U to će trebati uzeti manji r).

Otvorene kugle su otvoreni skupovi

Lema 7.11

U metričkom prostoru (X, d) svaka je otvorena kugla $K(x; r)$ otvoren skup u smislu prethodne definicije.

Dokaz:

Neka je $y \in K(x; r)$ i neka je $r' = r - d(x, y)$.

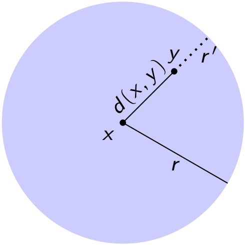
Otvorene kugle su otvoreni skupovi

Lema 7.11

U metričkom prostoru (X, d) svaka je otvorena kugla $K(x; r)$ otvoren skup u smislu prethodne definicije.

Dokaz:

Neka je $y \in K(x;r)$ i neka je $r' = r - d(x,y)$.
Tvrdimo da je $K(y;r') \subseteq K(x;r)$.
Za proizvoljan $y' \in K(y;r')$ je
$d(y',x) \leqslant d(y',y) + d(y,x) < r' + d(x,y) = r$,
tj. $y' \in K(x;r)$. $\square$



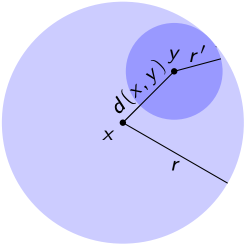
Otvorene kugle su otvoreni skupovi

Lema 7.11

U metričkom prostoru (X, d) svaka je otvorena kugla $K(x; r)$ otvoren skup u smislu prethodne definicije.

Dokaz:

Neka je $y \in K(x; r)$ i neka je $r' = r - d(x, y)$.
Tvrdimo da je $K(y; r') \subseteq K(x; r)$.
Za proizvoljan $y' \in K(y; r')$ je
$d(y', x) \leqslant d(y', y) + d(y, x) < r' + d(x, y) = r$,
tj. $y' \in K(x; r)$. $\square$



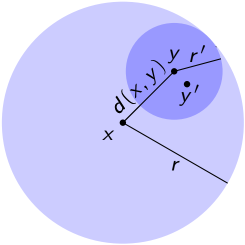
Otvorene kugle su otvoreni skupovi

Lema 7.11

U metričkom prostoru (X, d) svaka je otvorena kugla $K(x; r)$ otvoren skup u smislu prethodne definicije.

Dokaz:

Neka je $y \in K(x; r)$ i neka je $r' = r - d(x, y)$.
Tvrdimo da je $K(y; r') \subseteq K(x; r)$.
Za proizvoljan $y' \in K(y; r')$ je
$d(y', x) \leqslant d(y', y) + d(y, x) < r' + d(x, y) = r$,
tj. $y' \in K(x; r)$. $\square$



Primjeri otvorenih (i ne-otvorenih) skupova u $\mathbb{R}$

Općenito, osim otvorenih kugala postoje i drugi otvoreni skupovi.

Primjer 7.12

Za $a < b$ je otvoren interval $\langle a, b\rangle$ u $\mathbb{R}$ isto što i „kugla" $K\left(\frac{a+b}{2}; \frac{b-a}{2}\right)$.

Primjeri otvorenih (i ne-otvorenih) skupova u $\mathbb{R}$

Općenito, osim otvorenih kugala postoje i drugi otvoreni skupovi.

Primjer 7.12

Za $a < b$ je otvoren interval $\langle a, b\rangle$ u $\mathbb{R}$ isto što i „kugla" $K\left(\frac{a+b}{2}; \frac{b-a}{2}\right)$.
Ali i beskonačni intervali, npr. $\langle -\infty, 7\rangle$, kao i cijeli $\mathbb{R}$, su otvoreni skupovi, a oni nisu kugle.

I skup $\langle -2, 1\rangle \cup \langle 3, \infty\rangle$ je otvoren.

S druge strane, segment $[a, b]$ kao i poluotvoreni intervali $[a, b\rangle$ i $\langle a, b]$ nisu otvoreni skupovi u $\mathbb{R}$.
Niti skupovi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ nisu otvoreni podskupovi od $\mathbb{R}$.

Primjeri otvorenih (i ne-otvorenih) skupova u $\mathbb{R}$

Općenito, osim otvorenih kugala postoje i drugi otvoreni skupovi.

Primjer 7.12

Za $a < b$ je otvoren interval $\langle a, b\rangle$ u $\mathbb{R}$ isto što i „kugla" $K\left(\frac{a+b}{2}; \frac{b-a}{2}\right)$.
Ali i beskonačni intervali, npr. $\langle -\infty, 7\rangle$, kao i cijeli $\mathbb{R}$, su otvoreni skupovi, a oni nisu kugle.
I skup $\langle -2, 1\rangle \cup \langle 3, \infty\rangle$ je otvoren.

S druge strane, segment $[a, b]$ kao i poluotvoreni intervali $[a, b\rangle$ i $\langle a, b]$ nisu otvoreni skupovi u $\mathbb{R}$.
Niti skupovi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ nisu otvoreni podskupovi od $\mathbb{R}$.

Primjeri otvorenih (i ne-otvorenih) skupova u $\mathbb{R}$

Općenito, osim otvorenih kugala postoje i drugi otvoreni skupovi.

Primjer 7.12

Za $a < b$ je otvoren interval $\langle a, b\rangle$ u $\mathbb{R}$ isto što i „kugla" $K\left(\frac{a+b}{2}; \frac{b-a}{2}\right)$.
Ali i beskonačni intervali, npr. $\langle -\infty, 7\rangle$, kao i cijeli $\mathbb{R}$, su otvoreni skupovi, a oni nisu kugle.
I skup $\langle -2, 1\rangle \cup \langle 3, \infty\rangle$ je otvoren.

S druge strane, segment $[a, b]$ kao i poluotvoreni intervali $[a, b\rangle$ i $\langle a, b]$ nisu otvoreni skupovi u $\mathbb{R}$.
Niti skupovi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ nisu otvoreni podskupovi od $\mathbb{R}$.

Primjeri otvorenih (i ne-otvorenih) skupova u $\mathbb{R}$

Općenito, osim otvorenih kugala postoje i drugi otvoreni skupovi.

Primjer 7.12

Za $a < b$ je otvoren interval $\langle a, b\rangle$ u $\mathbb{R}$ isto što i „kugla" $K\left(\frac{a+b}{2}; \frac{b-a}{2}\right)$.
Ali i beskonačni intervali, npr. $\langle -\infty, 7\rangle$, kao i cijeli $\mathbb{R}$, su otvoreni skupovi, a oni nisu kugle.
I skup $\langle -2, 1\rangle \cup \langle 3, \infty\rangle$ je otvoren.

S druge strane, segment $[a, b]$ kao i poluotvoreni intervali $[a, b\rangle$ i $\langle a, b]$ nisu otvoreni skupovi u $\mathbb{R}$.
Niti skupovi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ nisu otvoreni podskupovi od $\mathbb{R}$.

Otvoreni (i ne-otvoreni) podskupovi u $\mathbb{E}^2$

Primjer 7.13

Važan primjer otvorenog skupa u $\mathbb{E}^2$ koji nije kugla je *otvoren pravokutnik*, tj. podskup oblika

$$\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle = \{(x, y) : a < x < b,\ c < y < d\}.$$

kao i „pruge"
$\langle a, b\rangle \times \mathbb{R} = \{(x, y) : a < x < b\}$ i $\mathbb{R} \times \langle c, d\rangle = \{(x, y) : c < y < d\}$.
Također otvorena je npr. i *otvorena desna poluravnina*, tj. skup $\{(x, y) : x > 0\}$, ali ne i skup $\{(x, y) : x \geqslant 0\}$.

Skup oblika $\langle a, b\rangle \times \{0\}$ *nije* otvoren u $\mathbb{E}^2$, iako je „jednak" skupu $\langle a, b\rangle$ koji *je* otvoren u $\mathbb{E} = \mathbb{R}$.

Ali, $\langle a, b\rangle \times \{0\}$ *je otvoren* u $\mathbb{R} \times \{0\}$ kao potprostoru od $\mathbb{E}^2$.

Analognih i sličnih primjera otvorenih i ne-otvorenih skupova ima, naravno, u $\mathbb{E}^n$ i za $n > 2$.

Otvoreni (i ne-otvoreni) podskupovi u $\mathbb{E}^2$

Primjer 7.13

Važan primjer otvorenog skupa u $\mathbb{E}^2$ koji nije kugla je *otvoren pravokutnik*, tj. podskup oblika

$$\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle = \{(x, y) : a < x < b,\ c < y < d\}.$$

kao i „pruge”

$\langle a, b\rangle \times \mathbb{R} = \{(x, y) : a < x < b\}$ i $\mathbb{R} \times \langle c, d\rangle = \{(x, y) : c < y < d\}$.

Također otvorena je npr. i *otvorena desna poluravnina*, tj. skup $\{(x, y) : x > 0\}$, ali ne i skup $\{(x, y) : x \geqslant 0\}$.

Skup oblika $\langle a, b\rangle \times \{0\}$ *nije* otvoren u $\mathbb{E}^2$, iako je „jednak” skupu $\langle a, b\rangle$ koji *je* otvoren u $\mathbb{E} = \mathbb{R}$.

Ali, $\langle a, b\rangle \times \{0\}$ *je otvoren* u $\mathbb{R} \times \{0\}$ kao potprostoru od $\mathbb{E}^2$.

Analognih i sličnih primjera otvorenih i ne-otvorenih skupova ima, naravno, u $\mathbb{E}^n$ i za $n > 2$.

Otvoreni (i ne-otvoreni) podskupovi u $\mathbb{E}^2$

Primjer 7.13

Važan primjer otvorenog skupa u $\mathbb{E}^2$ koji nije kugla je *otvoren pravokutnik*, tj. podskup oblika

$$\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle = \{(x, y) : a < x < b,\ c < y < d\}.$$

kao i „pruge"

$\langle a, b\rangle \times \mathbb{R} = \{(x, y) : a < x < b\}$ i $\mathbb{R} \times \langle c, d\rangle = \{(x, y) : c < y < d\}$.

Također otvorena je npr. i *otvorena desna poluravnina*, tj. skup $\{(x, y) : x > 0\}$, ali ne i skup $\{(x, y) : x \geqslant 0\}$.

Skup oblika $\langle a, b\rangle \times \{0\}$ *nije* otvoren u $\mathbb{E}^2$, iako je „jednak" skupu $\langle a, b\rangle$ koji *je* otvoren u $\mathbb{E} = \mathbb{R}$.

Ali, $\langle a, b\rangle \times \{0\}$ *je otvoren* u $\mathbb{R} \times \{0\}$ kao potprostoru od $\mathbb{E}^2$.

Analognih i sličnih primjera otvorenih i ne-otvorenih skupova ima, naravno, u $\mathbb{E}^n$ i za $n > 2$.

Otvoreni (i ne-otvoreni) podskupovi u $\mathbb{E}^2$

Primjer 7.13

Važan primjer otvorenog skupa u $\mathbb{E}^2$ koji nije kugla je *otvoren pravokutnik*, tj. podskup oblika

$$\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle = \{(x, y) : a < x < b,\ c < y < d\}.$$

kao i „pruge"

$\langle a, b\rangle \times \mathbb{R} = \{(x, y) : a < x < b\}$ i $\mathbb{R} \times \langle c, d\rangle = \{(x, y) : c < y < d\}$.

Također otvorena je npr. i *otvorena desna poluravnina*, tj. skup $\{(x, y) : x > 0\}$, ali ne i skup $\{(x, y) : x \geqslant 0\}$.

Skup oblika $\langle a, b\rangle \times \{0\}$ *nije* otvoren u $\mathbb{E}^2$, iako je „jednak" skupu $\langle a, b\rangle$ koji *je* otvoren u $\mathbb{E} = \mathbb{R}$.

Ali, $\langle a, b\rangle \times \{0\}$ *je otvoren* u $\mathbb{R} \times \{0\}$ kao potprostoru od $\mathbb{E}^2$.

Analognih i sličnih primjera otvorenih i ne-otvorenih skupova ima, naravno, u $\mathbb{E}^n$ i za $n > 2$.

Otvoreni (i ne-otvoreni) podskupovi u $\mathbb{E}^2$

Primjer 7.13

Važan primjer otvorenog skupa u $\mathbb{E}^2$ koji nije kugla je *otvoren pravokutnik*, tj. podskup oblika

$$\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle = \{(x, y) : a < x < b,\ c < y < d\}.$$

kao i „pruge"

$\langle a, b\rangle \times \mathbb{R} = \{(x, y) : a < x < b\}$ i $\mathbb{R} \times \langle c, d\rangle = \{(x, y) : c < y < d\}$.

Također otvorena je npr. i *otvorena desna poluravnina*, tj. skup $\{(x, y) : x > 0\}$, ali ne i skup $\{(x, y) : x \geqslant 0\}$.

Skup oblika $\langle a, b\rangle \times \{0\}$ *nije* otvoren u $\mathbb{E}^2$, iako je „jednak" skupu $\langle a, b\rangle$ koji *je* otvoren u $\mathbb{E} = \mathbb{R}$.

Ali, $\langle a, b\rangle \times \{0\}$ *je otvoren* u $\mathbb{R} \times \{0\}$ kao potprostoru od $\mathbb{E}^2$.

Analognih i sličnih primjera otvorenih i ne-otvorenih skupova ima, naravno, u $\mathbb{E}^n$ i za $n > 2$.

Otvoreni (i ne-otvoreni) podskupovi u $\mathbb{E}^2$

Primjer 7.13

Važan primjer otvorenog skupa u $\mathbb{E}^2$ koji nije kugla je *otvoren pravokutnik*, tj. podskup oblika

$$\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle = \{(x, y) : a < x < b,\ c < y < d\}.$$

kao i „pruge"

$\langle a, b\rangle \times \mathbb{R} = \{(x, y) : a < x < b\}$ i $\mathbb{R} \times \langle c, d\rangle = \{(x, y) : c < y < d\}$.

Također otvorena je npr. i *otvorena desna poluravnina*, tj. skup $\{(x, y) : x > 0\}$, ali ne i skup $\{(x, y) : x \geqslant 0\}$.

Skup oblika $\langle a, b\rangle \times \{0\}$ *nije* otvoren u $\mathbb{E}^2$, iako je „jednak" skupu $\langle a, b\rangle$ koji *je* otvoren u $\mathbb{E} = \mathbb{R}$.

Ali, $\langle a, b\rangle \times \{0\}$ *je otvoren* u $\mathbb{R} \times \{0\}$ kao potprostoru od $\mathbb{E}^2$.

Analognih i sličnih primjera otvorenih i ne-otvorenih skupova ima, naravno, u $\mathbb{E}^n$ i za $n > 2$.

Ekstremni slučajevi

Primjer 7.14

U diskretnom metričkom prostoru (primjer 6.2) svaki je skup otvoren.

S druge strane, u *svakom* metričkom prostoru (X, d) cijeli prostor X je otvoren skup.

Dogovorno se uzima da je u svakom metričkom prostoru prazan skup $\emptyset$ otvoren.

Sljedeći teorem je još jedna karakterizacija neprekidnosti.
Iako se može činiti da je to samo *prelijevanje šupljega u prazno*, vidjet ćemo da to nije tako.

Ekstremni slučajevi

Primjer 7.14

U diskretnom metričkom prostoru (primjer 6.2) svaki je skup otvoren.

S druge strane, u *svakom* metričkom prostoru (X, d) cijeli prostor X je otvoren skup.

Dogovorno se uzima da je u svakom metričkom prostoru prazan skup $\emptyset$ otvoren.

Sljedeći teorem je još jedna karakterizacija neprekidnosti.
Iako se može činiti da je to samo *prelijevanje šupljega u prazno*, vidjet ćemo da to nije tako.

Ekstremni slučajevi

Primjer 7.14

U diskretnom metričkom prostoru (primjer 6.2) svaki je skup otvoren.

S druge strane, u *svakom* metričkom prostoru (X, d) cijeli prostor X je otvoren skup.

Dogovorno se uzima da je u svakom metričkom prostoru prazan skup $\emptyset$ otvoren.

Sljedeći teorem je još jedna karakterizacija neprekidnosti.
Iako se može činiti da je to samo *prelijevanje šupljega u prazno*, vidjet ćemo da to nije tako.

Ekstremni slučajevi

Primjer 7.14

U diskretnom metričkom prostoru (primjer 6.2) svaki je skup otvoren.

S druge strane, u *svakom* metričkom prostoru (X, d) cijeli prostor X je otvoren skup.

Dogovorno se uzima da je u svakom metričkom prostoru prazan skup $\emptyset$ otvoren.

Sljedeći teorem je još jedna karakterizacija neprekidnosti.
Iako se može činiti da je to samo *prelijevanje šupljega u prazno*, vidjet ćemo da to nije tako.

Neprekidnost i otvoreni skupovi

Teorem 7.15

Preslikavanje $f\colon X \to Y$ metričkih prostora je neprekidno ako i samo ako za svaki podskup $V \subseteq Y$ koji je otvoren u Y, njegova je praslika $f^{-1}(V)$ otvoren podskup od X.

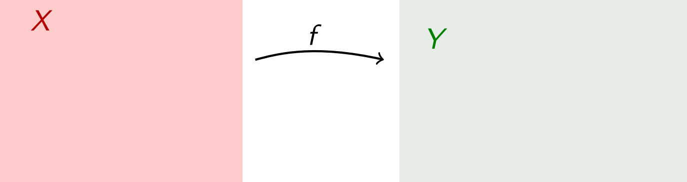
Neprekidnost i otvoreni skupovi

Teorem 7.15

Preslikavanje $f\colon X \to Y$ *metričkih prostora je neprekidno ako i samo ako za svaki podskup* $V \subseteq Y$ *koji je otvoren u* Y, *njegova je praslika* $f^{-1}(V)$ *otvoren podskup od* X.

Dokaz:

$\Rightarrow$



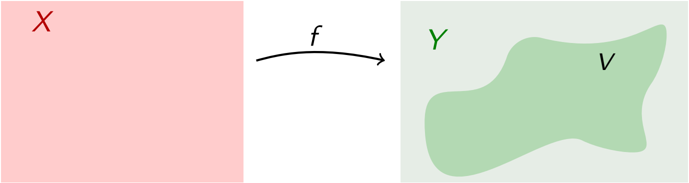
Neprekidnost i otvoreni skupovi

Teorem 7.15

Preslikavanje $f\colon X \to Y$ metričkih prostora je neprekidno ako i samo ako za svaki podskup $V \subseteq Y$ koji je otvoren u Y, njegova je praslika $f^{-1}(V)$ otvoren podskup od X.

Dokaz:

$\Rightarrow$



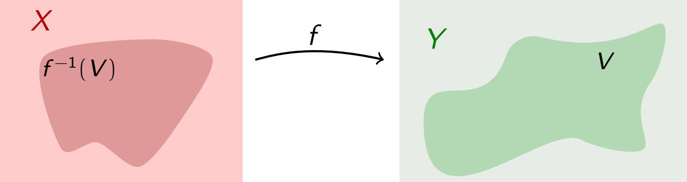
Neprekidnost i otvoreni skupovi

Teorem 7.15

Preslikavanje $f\colon X \to Y$ metričkih prostora je neprekidno ako i samo ako za svaki podskup $V \subseteq Y$ koji je otvoren u Y, njegova je praslika $f^{-1}(V)$ otvoren podskup od X.

Dokaz:

$\Rightarrow$



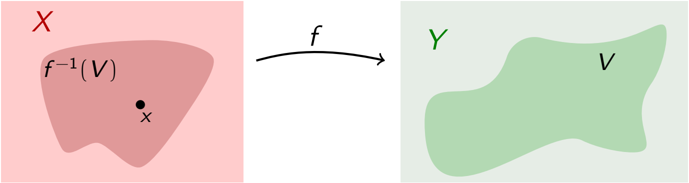
Neprekidnost i otvoreni skupovi

Teorem 7.15

Preslikavanje $f: X \to Y$ metričkih prostora je neprekidno ako i samo ako za svaki podskup $V \subseteq Y$ koji je otvoren u Y, njegova je praslika $f^{-1}(V)$ otvoren podskup od X.

Dokaz:

$\Rightarrow$



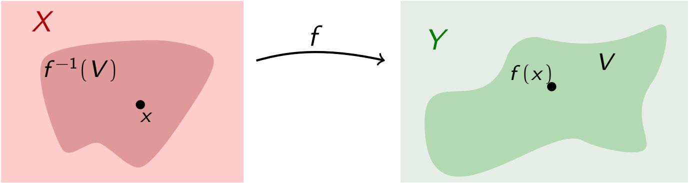
Neprekidnost i otvoreni skupovi

Teorem 7.15

Preslikavanje $f : X \to Y$ metričkih prostora je neprekidno ako i samo ako za svaki podskup $V \subseteq Y$ koji je otvoren u Y, njegova je praslika $f^{-1}(V)$ otvoren podskup od X.

Dokaz:

$\Rightarrow$



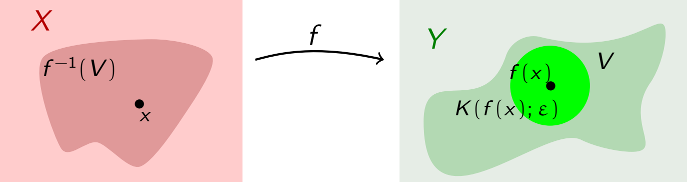
Neprekidnost i otvoreni skupovi

Teorem 7.15

Preslikavanje $f : X \to Y$ metričkih prostora je neprekidno ako i samo ako za svaki podskup $V \subseteq Y$ koji je otvoren u Y, njegova je praslika $f^{-1}(V)$ otvoren podskup od X.

Dokaz:

$\Rightarrow$



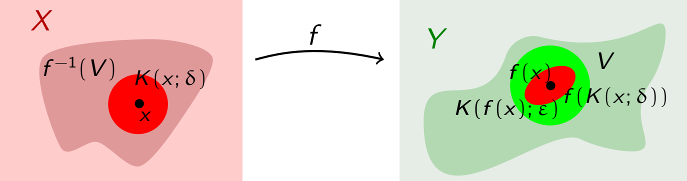
Neprekidnost i otvoreni skupovi

Teorem 7.15

Preslikavanje $f : X \to Y$ *metričkih prostora je neprekidno ako i samo ako za svaki podskup* $V \subseteq Y$ *koji je otvoren u* Y, *njegova je praslika* $f^{-1}(V)$ *otvoren podskup od* X.

Dokaz:

$\Rightarrow$



Neprekidnost i otvoreni skupovi

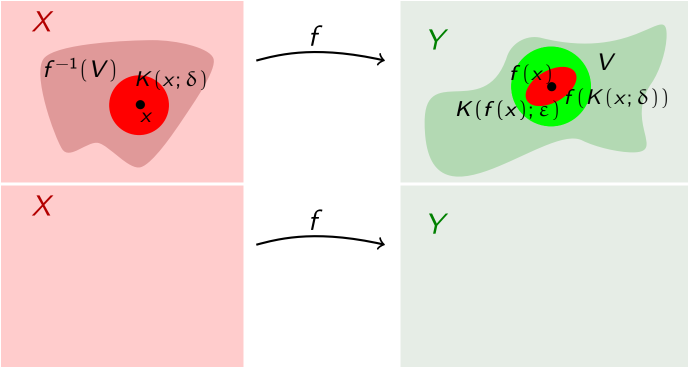
Teorem 7.15

Preslikavanje $f\colon X \to Y$ metričkih prostora je neprekidno ako i samo ako za svaki podskup $V \subseteq Y$ koji je otvoren u Y, njegova je praslika $f^{-1}(V)$ otvoren podskup od X.

Dokaz:

$\Rightarrow$

$\Leftarrow$



Neprekidnost i otvoreni skupovi

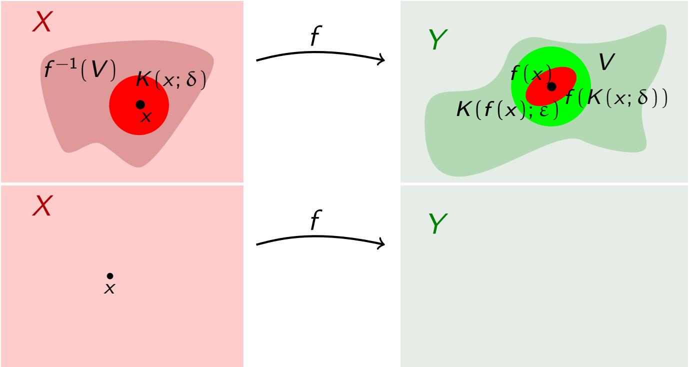
Teorem 7.15

Preslikavanje $f : X \to Y$ metričkih prostora je neprekidno ako i samo ako za svaki podskup $V \subseteq Y$ koji je otvoren u Y, njegova je praslika $f^{-1}(V)$ otvoren podskup od X.

Dokaz:

$\Rightarrow$

$\Leftarrow$



Neprekidnost i otvoreni skupovi

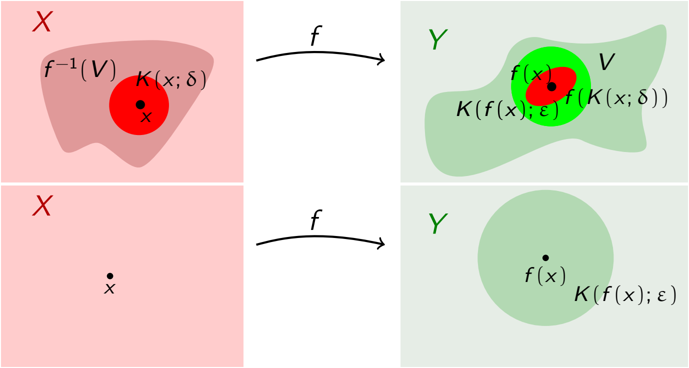
Teorem 7.15

Preslikavanje $f\colon X \to Y$ metričkih prostora je neprekidno ako i samo ako za svaki podskup $V \subseteq Y$ koji je otvoren u Y, njegova je praslika $f^{-1}(V)$ otvoren podskup od X.

Dokaz:

$\Rightarrow$

$\Leftarrow$



Neprekidnost i otvoreni skupovi

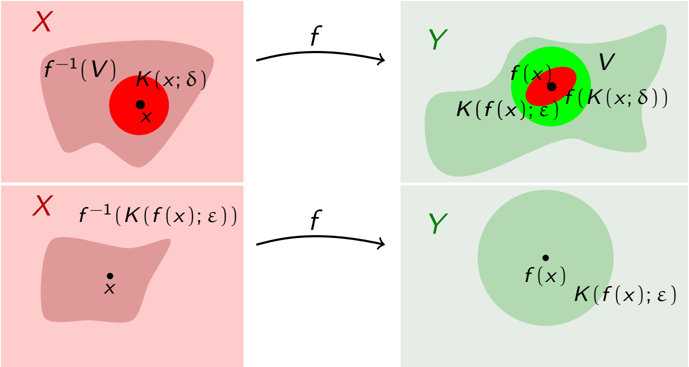
Teorem 7.15

Preslikavanje $f : X \to Y$ metričkih prostora je neprekidno ako i samo ako za svaki podskup $V \subseteq Y$ koji je otvoren u Y, njegova je praslika $f^{-1}(V)$ otvoren podskup od X.

Dokaz:

$\Rightarrow$

$\Leftarrow$



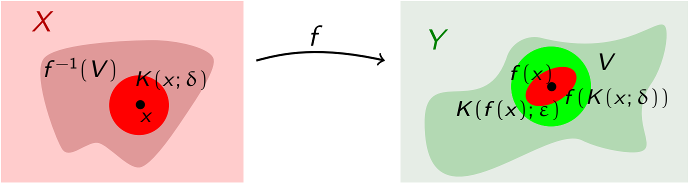
Neprekidnost i otvoreni skupovi

Teorem 7.15

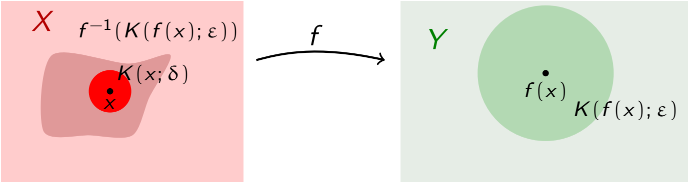
Preslikavanje $f : X \to Y$ metričkih prostora je neprekidno ako i samo ako za svaki podskup $V \subseteq Y$ koji je otvoren u Y, njegova je praslika $f^{-1}(V)$ otvoren podskup od X.

Dokaz:

$\Rightarrow$



$\Leftarrow$



Neprekidnost i otvoreni skupovi

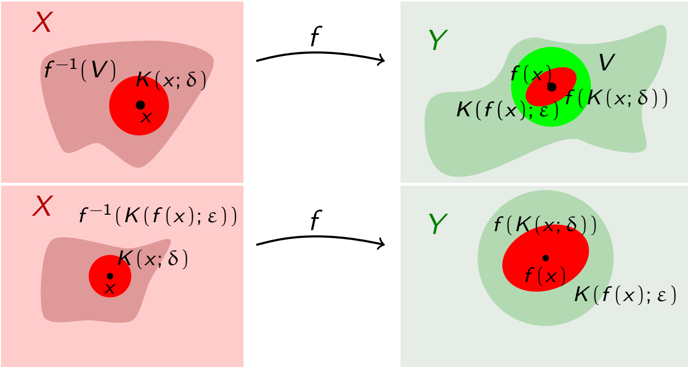
Teorem 7.15

Preslikavanje $f\colon X \to Y$ metričkih prostora je neprekidno ako i samo ako za svaki podskup $V \subseteq Y$ koji je otvoren u Y, njegova je praslika $f^{-1}(V)$ otvoren podskup od X.

Dokaz:

$\Rightarrow$

$\Leftarrow$



$\square$

Neprekidnost i otvoreni skupovi

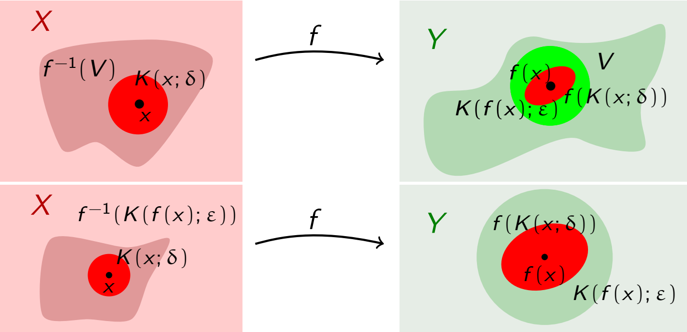
Teorem 7.15

Preslikavanje $f : X \to Y$ metričkih prostora je neprekidno ako i samo ako za svaki podskup $V \subseteq Y$ koji je otvoren u Y, njegova je praslika $f^{-1}(V)$ otvoren podskup od X.

Dokaz:

$\Rightarrow$

$\Leftarrow$



UPOZORENJE: Slika otvorenog skupa ne mora biti otvoren skup ! $\square$

Familija otvorenih skupova

Sljedeća su dva svojstva familije otvorenih skupova važna:

Propozicija 7.16

Neka su $U_1, U_2, \ldots, U_k$ otvoreni podskupovi metričkog prostora X. Tada je i njihov presjek $\bigcap_{j=1}^{j=k} U_j$ otvoren.
Dakle, presjek konačne familije otvorenih skupova je otvoren skup. □

Primjer 7.17

Presjek *beskonačne* familije otvorenih skupova ne mora biti otvoren !
Naprimjer, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \langle -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \rangle = \{0\}$ nije otvoren skup u $\mathbb{R}$.

Propozicija 7.18

Unija bilo koje familije otvorenih podskupova metričkog prostora je otvoren skup. □

Familija otvorenih skupova

Sljedeća su dva svojstva familije otvorenih skupova važna:

Propozicija 7.16

Neka su $U_1, U_2, \ldots, U_k$ otvoreni podskupovi metričkog prostora X. Tada je i njihov presjek $\bigcap_{j=1}^{j=k} U_j$ otvoren. Dakle, presjek konačne familije otvorenih skupova je otvoren skup. $\square$

Primjer 7.17

Presjek *beskonačne* familije otvorenih skupova ne mora biti otvoren ! Naprimjer, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \langle -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \rangle = \{0\}$ nije otvoren skup u $\mathbb{R}$.

Propozicija 7.18

Unija bilo koje familije otvorenih podskupova metričkog prostora je otvoren skup. $\square$

Familija otvorenih skupova

Sljedeća su dva svojstva familije otvorenih skupova važna:

Propozicija 7.16

Neka su $U_1, U_2, \dots, U_k$ otvoreni podskupovi metričkog prostora X. Tada je i njihov presjek $\bigcap_{j=1}^{j=k} U_j$ otvoren. Dakle, presjek konačne familije otvorenih skupova je otvoren skup. $\square$

Primjer 7.17

Presjek *beskonačne* familije otvorenih skupova ne mora biti otvoren !
Naprimjer, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \langle -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \rangle = \{0\}$ nije otvoren skup u $\mathbb{R}$.

Propozicija 7.18

Unija bilo koje familije otvorenih podskupova metričkog prostora je otvoren skup. $\square$

Familija otvorenih skupova

Sljedeća su dva svojstva familije otvorenih skupova važna:

Propozicija 7.16

Neka su $U_1, U_2, \ldots, U_k$ otvoreni podskupovi metričkog prostora X. Tada je i njihov presjek $\bigcap_{j=1}^{j=k} U_j$ otvoren.
Dakle, presjek konačne familije otvorenih skupova je otvoren skup. $\square$

Primjer 7.17

Presjek *beskonačne* familije otvorenih skupova ne mora biti otvoren !
Naprimjer, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \langle -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \rangle = \{0\}$ nije otvoren skup u $\mathbb{R}$.

Propozicija 7.18

Unija bilo koje familije otvorenih podskupova metričkog prostora je otvoren skup. $\square$

Topološki ekvivalentne metrike

Pojam metrike smo uveli kako bismo proučavali neprekidnost preslikavanja. Prirodna je stoga sljedeća definicija:

Definicija 8.1

Neka su d_1 i d_2 dvije metrike na skupu X. Kažemo da su one *topološki ekvivalentne* ako za svaka dva metrička prostora (Y, d) i (Z, d') i preslikavanja $f\colon Y \to X$ i $g\colon X \to Z$ vrijede sljedeće tvrdnje:

(a) $f\colon (Y, d) \to (X, d_1)$ je neprekidno ako i samo ako je $f\colon (Y, d) \to (X, d_2)$ neprekidno
tj. f je (d, d_1)-neprekidno akko je (d, d_2)-neprekidno; i

(b) $g\colon (X, d_1) \to (Z, d')$ je neprekidno ako i samo ako je $g\colon (X, d_2) \to (Z, d')$ neprekidno
tj. g je (d_1, d')-neprekidno akko je (d_2, d')-neprekidno.

- Očito je da je to relacija ekvivalencije.

Topološki ekvivalentne metrike

Pojam metrike smo uveli kako bismo proučavali neprekidnost preslikavanja. Prirodna je stoga sljedeća definicija:

Definicija 8.1

Neka su d_1 i d_2 dvije metrike na skupu X. Kažemo da su one *topološki ekvivalentne* ako za svaka dva metrička prostora (Y, d) i (Z, d') i preslikavanja $f\colon Y \to X$ i $g\colon X \to Z$ vrijede sljedeće tvrdnje:

(a) $f\colon (Y, d) \to (X, d_1)$ je neprekidno ako i samo ako je $f\colon (Y, d) \to (X, d_2)$ neprekidno
tj. f je (d, d_1)-neprekidno akko je (d, d_2)-neprekidno; i

(b) $g\colon (X, d_1) \to (Z, d')$ je neprekidno ako i samo ako je $g\colon (X, d_2) \to (Z, d')$ neprekidno
tj. g je (d_1, d')-neprekidno akko je (d_2, d')-neprekidno.

Očito je da je to relacija ekvivalencije.

Topološki ekvivalentne metrike

Pojam metrike smo uveli kako bismo proučavali neprekidnost preslikavanja. Prirodna je stoga sljedeća definicija:

Definicija 8.1

Neka su d_1 i d_2 dvije metrike na skupu X. Kažemo da su one *topološki ekvivalentne* ako za svaka dva metrička prostora (Y, d) i (Z, d') i preslikavanja $f\colon Y \to X$ i $g\colon X \to Z$ vrijede sljedeće tvrdnje:

(a) $f\colon (Y, d) \to (X, d_1)$ je neprekidno ako i samo ako je $f\colon (Y, d) \to (X, d_2)$ neprekidno
tj. f je (d, d_1)-neprekidno akko je (d, d_2)-neprekidno; i

(b) $g\colon (X, d_1) \to (Z, d')$ je neprekidno ako i samo ako je $g\colon (X, d_2) \to (Z, d')$ neprekidno
tj. g je (d_1, d')-neprekidno akko je (d_2, d')-neprekidno.

- Očito je da je to relacija ekvivalencije.

Karakterizacija topološke ekvivalentnosti metrika

Definicija topološke ekvivalentnosti dviju metrika je prilično nezgrapna za upotrebu, pa je vrlo korisna i zôrna sljedeća karakterizacija:

Propozicija 8.2

Metrike d_1 i d_2 su topološki ekvivalentne akko definiraju jedne te iste otvorene skupove, tj. podskup U je otvoren s obzirom na metriku d_1 akko je otvoren s obzirom na metriku d_2.

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka su d_1 i d_2 topološki ekvivalentne metrike i neka je $U \subseteq X$ d_2-otvoren. Identiteta $\mathbb{1}\colon (X, d_2) \to (X, d_2)$ je neprekidna, pa je prema (b) iz definicije i $\mathbb{1}\colon (X, d_1) \to (X, d_2)$ neprekidna. Prema teoremu 7.15 skup $\mathbb{1}^{-1}(U) \subseteq (X, d_1)$ je otvoren. Ali $\mathbb{1}^{-1}(U) = U$, pa je U i d_1-otvoren. Analogno se dokaže da ako je U d_1-otvoren onda je i d_2-otvoren.

$\Leftarrow$ Ovaj se smjer dokazuje primjenom teorema 7.15, provjeravajući otvorenost odgovarajućih podskupova prema definiciji topološke ekvivalentnosti dviju metrika.

Karakterizacija topološke ekvivalentnosti metrika

Definicija topološke ekvivalentnosti dviju metrika je prilično nezgrapna za upotrebu, pa je vrlo korisna i zôrna sljedeća karakterizacija:

Propozicija 8.2

Metrike d_1 i d_2 su topološki ekvivalentne akko definiraju jedne te iste otvorene skupove, tj. podskup U je otvoren s obzirom na metriku d_1 akko je otvoren s obzirom na metriku d_2.

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka su d_1 i d_2 topološki ekvivalentne metrike i neka je $U \subseteq X$ d_2-otvoren. Identiteta $\mathbb{1}\colon (X, d_2) \to (X, d_2)$ je neprekidna, pa je prema (b) iz definicije i $\mathbb{1}\colon (X, d_1) \to (X, d_2)$ neprekidna. Prema teoremu 7.15 skup $\mathbb{1}^{-1}(U) \subseteq (X, d_1)$ je otvoren. Ali $\mathbb{1}^{-1}(U) = U$, pa je U i d_1-otvoren. Analogno se dokaže da ako je U d_1-otvoren onda je i d_2-otvoren.

$\Leftarrow$ Ovaj se smjer dokazuje primjenom teorema 7.15, provjeravajući otvorenost odgovarajućih podskupova prema definiciji topološke ekvivalentnosti dviju metrika.

Karakterizacija topološke ekvivalentnosti metrika

Definicija topološke ekvivalentnosti dviju metrika je prilično nezgrapna za upotrebu, pa je vrlo korisna i zôrna sljedeća karakterizacija:

Propozicija 8.2

Metrike d_1 i d_2 su topološki ekvivalentne akko definiraju jedne te iste otvorene skupove, tj. podskup U je otvoren s obzirom na metriku d_1 akko je otvoren s obzirom na metriku d_2.

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Neka su d_1 i d_2 topološki ekvivalentne metrike i neka je $U \subseteq X$ d_2-otvoren. Identiteta $\mathbb{1}\colon (X, d_2) \to (X, d_2)$ je neprekidna, pa je prema (b) iz definicije i $\mathbb{1}\colon (X, d_1) \to (X, d_2)$ neprekidna. Prema teoremu 7.15 skup $\mathbb{1}^{-1}(U) \subseteq (X, d_1)$ je otvoren. Ali $\mathbb{1}^{-1}(U) = U$, pa je U i d_1-otvoren.
Analogno se dokaže da ako je U d_1-otvoren onda je i d_2-otvoren.
$\boxed{\Leftarrow}$ Ovaj se smjer dokazuje primjenom teorema 7.15, provjeravajući otvorenost odgovarajućih podskupova prema definiciji topološke ekvivalentnosti dviju metrika.

Karakterizacija topološke ekvivalentnosti metrika

Definicija topološke ekvivalentnosti dviju metrika je prilično nezgrapna za upotrebu, pa je vrlo korisna i zôrna sljedeća karakterizacija:

Propozicija 8.2

Metrike d_1 i d_2 su topološki ekvivalentne akko definiraju jedne te iste otvorene skupove, tj. podskup U je otvoren s obzirom na metriku d_1 akko je otvoren s obzirom na metriku d_2.

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Neka su d_1 i d_2 topološki ekvivalentne metrike i neka je $U \subseteq X$ d_2-otvoren. Identiteta $\mathbb{1}\colon (X, d_2) \to (X, d_2)$ je neprekidna, pa je prema (b) iz definicije i $\mathbb{1}\colon (X, d_1) \to (X, d_2)$ neprekidna. Prema teoremu 7.15 skup $\mathbb{1}^{-1}(U) \subseteq (X, d_1)$ je otvoren. Ali $\mathbb{1}^{-1}(U) = U$, pa je U i d_1-otvoren. Analogno se dokaže da ako je U d_1-otvoren onda je i d_2-otvoren.

$\boxed{\Leftarrow}$ Ovaj se smjer dokazuje primjenom teorema 7.15, provjeravajući otvorenost odgovarajućih podskupova prema definiciji topološke ekvivalentnosti dviju metrika.

Karakterizacija topološke ekvivalentnosti metrika

Definicija topološke ekvivalentnosti dviju metrika je prilično nezgrapna za upotrebu, pa je vrlo korisna i zôrna sljedeća karakterizacija:

Propozicija 8.2

Metrike d_1 i d_2 su topološki ekvivalentne akko definiraju jedne te iste otvorene skupove, tj. podskup U je otvoren s obzirom na metriku d_1 akko je otvoren s obzirom na metriku d_2.

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka su d_1 i d_2 topološki ekvivalentne metrike i neka je $U \subseteq X$ d_2-otvoren. Identiteta $\mathbb{1}\colon (X, d_2) \to (X, d_2)$ je neprekidna, pa je prema (b) iz definicije i $\mathbb{1}\colon (X, d_1) \to (X, d_2)$ neprekidna. Prema teoremu 7.15 skup $\mathbb{1}^{-1}(U) \subseteq (X, d_1)$ je otvoren. Ali $\mathbb{1}^{-1}(U) = U$, pa je U i d_1-otvoren. Analogno se dokaže da ako je U d_1-otvoren onda je i d_2-otvoren.

$\Leftarrow$ Ovaj se smjer dokazuje primjenom teorema 7.15, provjeravajući otvorenost odgovarajućih podskupova prema definiciji topološke ekvivalentnosti dviju metrika.

Još jedna karakterizacija topološke ekvivalencije metrika

Propozicija 8.3

(a) *Metrike d_1 i d_2 su topološki ekvivalentne akko su d_1-kugle d_2-otvorene, i obratno.*

(b) *Metrike d_1 i d_2 su topološki ekvivalentne akko za $\forall x_0 \in X$ i $\forall r_1 > 0$, $\exists r_2 > 0$ t.d. je $K_2(x_0; r_2) \subseteq K_1(x_0; r_1)$, i obratno.*

Dokaz: (a) $\Rightarrow$ Neka je $x \in K_1(x_0; r)$. Kako su metrike d_1 i d_2 topološki ekvivalentne, kugla $K_1(x_0; r)$ je i d_2-otvoren skup, pa $\exists r' > 0$ t.d. je $K_2(x; r') \subseteq K_1(x_0; r)$, tj. kugla $K_1(x_0; r)$ je i d_2-otvorena. Analogno se pokazuje da su d_2-kugle i d_1-otvorene.

$\Leftarrow$ Neka je $U \subseteq X$ d_1-otvoren i $x \in U$, te neka je $r_1 > 0$ t.d. je $K_1(x; r_1) \subseteq U$. Kako je kugla $K_1(x; r_1)$ i d_2-otvorena, postoji $r_2 > 0$ t.d. je $K_2(x; r_2) \subseteq K_1(x; r_1) \subseteq U$, tj. U je i d_2-otvoren. Analogno se pokaže da je svaki d_2-otvoren skup i d_1-otvoren, pa tvrdnja slijedi iz prethodne propozicije 8.2.

$\triangle$

Još jedna karakterizacija topološke ekvivalencije metrika

Propozicija 8.3

(a) *Metrike d_1 i d_2 su topološki ekvivalentne akko su d_1-kugle d_2-otvorene, i obratno.*

(b) *Metrike d_1 i d_2 su topološki ekvivalentne akko za $\forall x_0 \in X$ i $\forall r_1 > 0$, $\exists r_2 > 0$ t.d. je $K_2(x_0; r_2) \subseteq K_1(x_0; r_1)$, i obratno.*

Dokaz: (a) $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $x \in K_1(x_0; r)$. Kako su metrike d_1 i d_2 topološki ekvivalentne, kugla $K_1(x_0; r)$ je i d_2-otvoren skup, pa $\exists r' > 0$ t.d. je $K_2(x; r') \subseteq K_1(x_0; r)$, tj. kugla $K_1(x_0; r)$ je i d_2-otvorena. Analogno se pokazuje da su d_2-kugle i d_1-otvorene.

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka je $U \subseteq X$ d_1-otvoren i $x \in U$, te neka je $r_1 > 0$ t.d. je $K_1(x; r_1) \subseteq U$. Kako je kugla $K_1(x; r_1)$ i d_2-otvorena, postoji $r_2 > 0$ t.d. je $K_2(x; r_2) \subseteq K_1(x; r_1) \subseteq U$, tj. U je i d_2-otvoren. Analogno se pokaže da je svaki d_2-otvoren skup i d_1-otvoren, pa tvrdnja slijedi iz prethodne propozicije 8.2. $\triangle$

Još jedna karakterizacija topološke ekvivalencije metrika

Propozicija 8.3

(a) *Metrike d_1 i d_2 su topološki ekvivalentne akko su d_1-kugle d_2-otvorene, i obratno.*

(b) *Metrike d_1 i d_2 su topološki ekvivalentne akko za $\forall x_0 \in X$ i $\forall r_1 > 0$, $\exists r_2 > 0$ t.d. je $K_2(x_0; r_2) \subseteq K_1(x_0; r_1)$, i obratno.*

Dokaz: (a) $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $x \in K_1(x_0; r)$. Kako su metrike d_1 i d_2 topološki ekvivalentne, kugla $K_1(x_0; r)$ je i d_2-otvoren skup, pa $\exists r' > 0$ t.d. je $K_2(x; r') \subseteq K_1(x_0; r)$, tj. kugla $K_1(x_0; r)$ je i d_2-otvorena. Analogno se pokazuje da su d_2-kugle i d_1-otvorene.

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka je $U \subseteq X$ d_1-otvoren i $x \in U$, te neka je $r_1 > 0$ t.d. je $K_1(x; r_1) \subseteq U$. Kako je kugla $K_1(x; r_1)$ i d_2-otvorena, postoji $r_2 > 0$ t.d. je $K_2(x; r_2) \subseteq K_1(x; r_1) \subseteq U$, tj. U je i d_2-otvoren.
Analogno se pokaže da je svaki d_2-otvoren skup i d_1-otvoren, pa tvrdnja slijedi iz prethodne propozicije 8.2. $\triangle$

Još jedna karakterizacija topološke ekvivalencije metrika

Propozicija 8.3

(a) *Metrike d_1 i d_2 su topološki ekvivalentne akko su d_1-kugle d_2-otvorene, i obratno.*

(b) *Metrike d_1 i d_2 su topološki ekvivalentne akko za $\forall x_0 \in X$ i $\forall r_1 > 0$, $\exists r_2 > 0$ t.d. je $K_2(x_0; r_2) \subseteq K_1(x_0; r_1)$, i obratno.*

Dokaz: (a) $\Rightarrow$ Neka je $x \in K_1(x_0; r)$. Kako su metrike d_1 i d_2 topološki ekvivalentne, kugla $K_1(x_0; r)$ je i d_2-otvoren skup, pa $\exists r' > 0$ t.d. je $K_2(x; r') \subseteq K_1(x_0; r)$, tj. kugla $K_1(x_0; r)$ je i d_2-otvorena. Analogno se pokazuje da su d_2-kugle i d_1-otvorene.

$\Leftarrow$ Neka je $U \subseteq X$ d_1-otvoren i $x \in U$, te neka je $r_1 > 0$ t.d. je $K_1(x; r_1) \subseteq U$. Kako je kugla $K_1(x; r_1)$ i d_2-otvorena, postoji $r_2 > 0$ t.d. je $K_2(x; r_2) \subseteq K_1(x; r_1) \subseteq U$, tj. U je i d_2-otvoren. Analogno se pokaže da je svaki d_2-otvoren skup i d_1-otvoren, pa tvrdnja slijedi iz prethodne propozicije 8.2. $\triangle$

Dokaz tvrdnje (b)

$\Rightarrow$ Neka su metrike d_1 i d_2 topološki ekvivalentne. Prema (a) je svaka d_1-kugla $K_1(x_0; r_1)$ d_2-otvorena, pa $\exists r_2 > 0$ t.d. je $K_2(x_0; r_2) \subseteq K_1(x_0; r_1)$. Analogno se dokaže obratno.

$\Leftarrow$ Neka je $U \subseteq X$ d_1-otvoren skup, $x_0 \in U$ proizvoljna točka, i neka je $r_1 > 0$ t.d. je $K_1(x_0; r_1) \subseteq U$. Prema pretpostavci, postoji $r_2 > 0$ t.d. je $K_2(x_0; r_2) \subseteq K_1(x_0; r_1) \subseteq U$, pa je skup U i d_2-otvoren.
Analogno se pokaže da je svaki d_2-otvoren skup i d_1-otvoren, pa tvrdnja slijedi iz prethodne propozicije 8.2. $\square$

Dokaz tvrdnje (b)

$\Rightarrow$ Neka su metrike d_1 i d_2 topološki ekvivalentne. Prema (a) je svaka d_1-kugla $K_1(x_0; r_1)$ d_2-otvorena, pa $\exists r_2 > 0$ t.d. je $K_2(x_0; r_2) \subseteq K_1(x_0; r_1)$. Analogno se dokaže obratno.

$\Leftarrow$ Neka je $U \subseteq X$ d_1-otvoren skup, $x_0 \in U$ proizvoljna točka, i neka je $r_1 > 0$ t.d. je $K_1(x_0; r_1) \subseteq U$. Prema pretpostavci, postoji $r_2 > 0$ t.d. je $K_2(x_0; r_2) \subseteq K_1(x_0; r_1) \subseteq U$, pa je skup U i d_2-otvoren. Analogno se pokaže da je svaki d_2-otvoren skup i d_1-otvoren, pa tvrdnja slijedi iz prethodne propozicije 8.2. $\square$

Dokaz tvrdnje (b)

$\Rightarrow$ Neka su metrike d_1 i d_2 topološki ekvivalentne. Prema (a) je svaka d_1-kugla $K_1(x_0; r_1)$ d_2-otvorena, pa $\exists r_2 > 0$ t.d. je $K_2(x_0; r_2) \subseteq K_1(x_0; r_1)$. Analogno se dokaže obratno.

$\Leftarrow$ Neka je $U \subseteq X$ d_1-otvoren skup, $x_0 \in U$ proizvoljna točka, i neka je $r_1 > 0$ t.d. je $K_1(x_0; r_1) \subseteq U$. Prema pretpostavci, postoji $r_2 > 0$ t.d. je $K_2(x_0; r_2) \subseteq K_1(x_0; r_1) \subseteq U$, pa je skup U i d_2-otvoren.

Analogno se pokaže da je svaki d_2-otvoren skup i d_1-otvoren, pa tvrdnja slijedi iz prethodne propozicije 8.2. $\square$

Lipschitz-ekvivalentne metrike

Još jedna vrsta ekvivalencije metrika je korisna i važna:

Definicija 8.4

Za dvije metrike d i d' na X kažemo da su ekvivalentne u Lipschitzovom smislu ili da su Lipschitz-ekvivalentne ako postoje konstante $\lambda, \mu > 0$ takve da za sve $x, y \in X$ vrijedi

$$d(x,y) \leqslant \lambda\, d'(x,y), \quad i$$

$$d'(x,y) \leqslant \mu\, d(x,y)\,.$$

- Lako se provjeri da je i to jedna relacija ekvivalencije.

Napomena: Kod Mardešića (Matematička analiza, 1. dio) ovo se svojstvo zove *uniformna ekvivalentnost*, a mi ćemo uniformnom ekvivalentnošću nazivati nešto drugo.

Lipschitz-ekvivalentne metrike

Još jedna vrsta ekvivalencije metrika je korisna i važna:

Definicija 8.4

Za dvije metrike d i d' na X kažemo da su ekvivalentne u Lipschitzovom smislu ili da su Lipschitz-ekvivalentne ako postoje konstante $\lambda, \mu > 0$ takve da za sve $x, y \in X$ vrijedi

$$d(x,y) \leqslant \lambda\, d'(x,y), \quad i$$
$$d'(x,y) \leqslant \mu\, d(x,y)\,.$$

- Lako se provjeri da je i to jedna relacija ekvivalencije.

Napomena: Kod Mardešića (Matematička analiza, 1. dio) ovo se svojstvo zove *uniformna ekvivalentnost*, a mi ćemo uniformnom ekvivalentnošću nazivati nešto drugo.

Lipschitz-ekvivalentne metrike

Još jedna vrsta ekvivalencije metrika je korisna i važna:

Definicija 8.4

Za dvije metrike d i d' na X kažemo da su ekvivalentne u Lipschitzovom smislu ili da su Lipschitz-ekvivalentne ako postoje konstante $\lambda, \mu > 0$ takve da za sve $x, y \in X$ vrijedi

$$d(x,y) \leqslant \lambda\, d'(x,y), \ \text{ i}$$
$$d'(x,y) \leqslant \mu\, d(x,y)\,.$$

- Lako se provjeri da je i to jedna relacija ekvivalencije.

Napomena: Kod Mardešića (Matematička analiza, 1. dio) ovo se svojstvo zove *uniformna ekvivalentnost*, a mi ćemo uniformnom ekvivalentnošću nazivati nešto drugo.

Lipschitz-ekvivalentne metrike

Još jedna vrsta ekvivalencije metrika je korisna i važna:

Definicija 8.4

Za dvije metrike d i d' na X kažemo da su ekvivalentne u Lipschitzovom smislu ili da su Lipschitz-ekvivalentne ako postoje konstante $\lambda, \mu > 0$ takve da za sve $x, y \in X$ vrijedi

$$d(x,y) \leqslant \lambda\, d'(x,y), \ \ i$$
$$d'(x,y) \leqslant \mu\, d(x,y)\,.$$

- Lako se provjeri da je i to jedna relacija ekvivalencije.

Napomena: Kod Mardešića (Matematička analiza, 1. dio) ovo se svojstvo zove *uniformna ekvivalentnost*, a mi ćemo uniformnom ekvivalentnošću nazivati nešto drugo.

Lipschitz-ekvivalencija $\Rightarrow$ topološka ekvivalencija

Propozicija 8.5

Lipschitz-ekvivalentne metrike su topološki ekvivalentne.

Dokaz: Neka su λ i μ kao u definiciji Lipschitz-ekvivalencije.

Tvrdnja: $K_d(x;r) \subseteq K_{d'}(x;\mu\, r)$ i $K_{d'}(x;r) \subseteq K_d(x;\lambda\, r)$.

Zaista, za $y \in K_d(x;r)$ je $d'(y,x) \leqslant \mu\, d(x,y) < \mu\, r$ pa je $y \in K_{d'}(x;\mu\, r)$. Analogno se dokazuje druga inkluzija. $\triangle$

Neka je $U \subseteq X$ d-otvoren i $x \in U$. Tada postoji $r > 0$ t.d. je $K_d(x,r) \subseteq U$. Prema prethodnoj tvrdnji je $K_{d'}(x;\frac{1}{\lambda}r) \subseteq K_d(x;r) \subseteq U$, pa je U i d'-otvoren.

Analogno se dokazuje da je svaki d'-otvoren skup ujedno i d-otvoren.

Tvrdnja sada slijedi iz propozicije 8.2. $\square$

Lipschitz-ekvivalencija $\Rightarrow$ topološka ekvivalencija

Propozicija 8.5

Lipschitz-ekvivalentne metrike su topološki ekvivalentne.

Dokaz: Neka su λ i μ kao u definiciji Lipschitz-ekvivalencije.

Tvrdnja: $K_d(x;r) \subseteq K_{d'}(x;\mu\, r)$ i $K_{d'}(x;r) \subseteq K_d(x;\lambda\, r)$.

Zaista, za $y \in K_d(x;r)$ je $d'(y,x) \leqslant \mu\, d(x,y) < \mu\, r$ pa je $y \in K_{d'}(x;\mu\, r)$. Analogno se dokazuje druga inkluzija. $\triangle$

Neka je $U \subseteq X$ d-otvoren i $x \in U$. Tada postoji $r > 0$ t.d. je $K_d(x,r) \subseteq U$. Prema prethodnoj tvrdnji je $K_{d'}(x;\frac{1}{\lambda}r) \subseteq K_d(x;r) \subseteq U$, pa je U i d'-otvoren.

Analogno se dokazuje da je svaki d'-otvoren skup ujedno i d-otvoren.

Tvrdnja sada slijedi iz propozicije 8.2. $\square$

Lipschitz-ekvivalencija $\Rightarrow$ topološka ekvivalencija

Propozicija 8.5

Lipschitz-ekvivalentne metrike su topološki ekvivalentne.

Dokaz: Neka su λ i μ kao u definiciji Lipschitz-ekvivalencije.

Tvrdnja: $K_d(x;r) \subseteq K_{d'}(x;\mu\, r)$ i $K_{d'}(x;r) \subseteq K_d(x;\lambda\, r)$.

Zaista, za $y \in K_d(x;r)$ je $d'(y,x) \leqslant \mu\, d(x,y) < \mu\, r$ pa je $y \in K_{d'}(x;\mu\, r)$. Analogno se dokazuje druga inkluzija. $\triangle$

Neka je $U \subseteq X$ d-otvoren i $x \in U$. Tada postoji $r > 0$ t.d. je $K_d(x,r) \subseteq U$. Prema prethodnoj tvrdnji je $K_{d'}(x;\frac{1}{\lambda}r) \subseteq K_d(x;r) \subseteq U$, pa je U i d'-otvoren.

Analogno se dokazuje da je svaki d'-otvoren skup ujedno i d-otvoren.

Tvrdnja sada slijedi iz propozicije 8.2. $\square$

Lipschitz-ekvivalencija $\Rightarrow$ topološka ekvivalencija

Propozicija 8.5

Lipschitz-ekvivalentne metrike su topološki ekvivalentne.

Dokaz: Neka su λ i μ kao u definiciji Lipschitz-ekvivalencije.

Tvrdnja: $K_d(x;r) \subseteq K_{d'}(x;\mu\,r)$ i $K_{d'}(x;r) \subseteq K_d(x;\lambda\,r)$.

Zaista, za $y \in K_d(x;r)$ je $d'(y,x) \leqslant \mu\,d(x,y) < \mu\,r$ pa je $y \in K_{d'}(x;\mu\,r)$. Analogno se dokazuje druga inkluzija. $\triangle$

Neka je $U \subseteq X$ d-otvoren i $x \in U$. Tada postoji $r > 0$ t.d. je $K_d(x,r) \subseteq U$. Prema prethodnoj tvrdnji je $K_{d'}(x;\frac{1}{\lambda}r) \subseteq K_d(x;r) \subseteq U$, pa je U i d'-otvoren.

Analogno se dokazuje da je svaki d'-otvoren skup ujedno i d-otvoren.

Tvrdnja sada slijedi iz propozicije 8.2. $\square$

Lipschitz-ekvivalencija $\Rightarrow$ topološka ekvivalencija

Propozicija 8.5

Lipschitz-ekvivalentne metrike su topološki ekvivalentne.

Dokaz: Neka su λ i μ kao u definiciji Lipschitz-ekvivalencije.

Tvrdnja: $K_d(x;r) \subseteq K_{d'}(x;\mu\, r)$ i $K_{d'}(x;r) \subseteq K_d(x;\lambda\, r)$.

Zaista, za $y \in K_d(x;r)$ je $d'(y,x) \leqslant \mu\, d(x,y) < \mu\, r$ pa je $y \in K_{d'}(x;\mu\, r)$. Analogno se dokazuje druga inkluzija. $\triangle$

Neka je $U \subseteq X$ d-otvoren i $x \in U$. Tada postoji $r > 0$ t.d. je $K_d(x,r) \subseteq U$. Prema prethodnoj tvrdnji je $K_{d'}(x;\frac{1}{\lambda}r) \subseteq K_d(x;r) \subseteq U$, pa je U i d'-otvoren.

Analogno se dokazuje da je svaki d'-otvoren skup ujedno i d-otvoren.

Tvrdnja sada slijedi iz propozicije 8.2. $\square$

Ekvivalencija triju metrika u $\mathbb{R}^n$

Primjer 8.6

Za metrike d_1, d_2 i d_∞ u $\mathbb{R}^n$ iz primjera 6.4 vrijedi:

$$\frac{1}{n}\, d_1(x,y) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\, d_2(x,y) \leqslant d_\infty(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant d_1(x,y)\ .$$

Odavde slijedi da su te tri metrike Lipschitz-ekvivalentne, dakle i topološki ekvivalentne.

Iste nejednakosti, i zaključak, vrijede i za metrike d_1, d_2 i d_∞ definirane na produktu bilo kojih n metričkih prostora (def. 6.11).

Napomena: Primijetimo da je za Lipschitz-ekvivalentnost metrika d_1, d_2 i d_∞ dovoljno dokazati slabiju verziju gornjih nejednakosti:

$$d_\infty(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant d_1(x,y) \leqslant n \cdot d_\infty(x,y)\ ,$$

što je malo jednostavnije dokazati.

Ekvivalencija triju metrika u $\mathbb{R}^n$

Primjer 8.6

Za metrike d_1, d_2 i d_∞ u $\mathbb{R}^n$ iz primjera 6.4 vrijedi:

$$\frac{1}{n}\, d_1(x,y) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\, d_2(x,y) \leqslant d_\infty(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant d_1(x,y)\ .$$

Odavde slijedi da su te tri metrike Lipschitz-ekvivalentne, dakle i topološki ekvivalentne.
Iste nejednakosti, i zaključak, vrijede i za metrike d_1, d_2 i d_∞ definirane na produktu bilo kojih n metričkih prostora (def. 6.11).

Napomena: Primijetimo da je za Lipschitz-ekvivalentnost metrika d_1, d_2 i d_∞ dovoljno dokazati slabiju verziju gornjih nejednakosti:

$$d_\infty(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant d_1(x,y) \leqslant n \cdot d_\infty(x,y)\ ,$$

što je malo jednostavnije dokazati.

Ekvivalencija triju metrika u $\mathbb{R}^n$

Primjer 8.6

Za metrike d_1, d_2 i d_∞ u $\mathbb{R}^n$ iz primjera 6.4 vrijedi:

$$\frac{1}{n}\, d_1(x,y) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\, d_2(x,y) \leqslant d_\infty(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant d_1(x,y)\ .$$

Odavde slijedi da su te tri metrike Lipschitz-ekvivalentne, dakle i topološki ekvivalentne.
Iste nejednakosti, i zaključak, vrijede i za metrike d_1, d_2 i d_∞ definirane na produktu bilo kojih n metričkih prostora (def. 6.11).

Napomena: Primijetimo da je za Lipschitz-ekvivalentnost metrika d_1, d_2 i d_∞ dovoljno dokazati slabiju verziju gornjih nejednakosti:

$$d_\infty(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant d_1(x,y) \leqslant n \cdot d_\infty(x,y)\ ,$$

što je malo jednostavnije dokazati.

Ne-ekvivalentnost metrika d_1 i d_∞ u $\mathscr{C}[a,b]$

Primjer 8.7

L_1-metrika d_1 (definicija 6.16) i sup-metrika d_∞ (definicija 6.23) na skupu $\mathscr{C}[a,b]$ neprekidnih realnih funkcija na $[a,b]$, *nisu* topološki ekvivalentne.

Zaista, neka su $f, g \in \mathscr{C}[a,b]$. Tada je $|f(x) - g(x)| \leqslant d_\infty(f,g)$ za sve $x \in [a,b]$, pa je $d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx \leqslant (b-a)\,d_\infty(f,g)$. Stoga je $K_{d_\infty}(f;r) \subseteq K_{d_1}(f;(b-a)\,r)$.

Međutim, kugla $K_{d_\infty}(\mathbb{0};1)$, gdje je $\mathbb{0}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ konstantna funkcija $\mathbb{0}(x) = 0$ za sve x, nije d_1-otvorena.

Naime, kada bi bila d_1-otvorena, onda bi za neki $\varepsilon > 0$ bilo $K_{d_1}(\mathbb{0};\varepsilon) \subseteq K_{d_\infty}(\mathbb{0};1)$.
Međutim, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji neprekidna funkcija g na $[a,b]$ t.d. je $d_1(\mathbb{0},g) = \int_a^b |g(x)|\,dx < \varepsilon$ i za koju postoji $x^* \in [a,b]$ t.d. je $g(x^*) > 1$, pa je $d_\infty(\mathbb{0};g) > 1$.

Ne-ekvivalentnost metrika d_1 i d_∞ u $\mathscr{C}[a, b]$

Primjer 8.7

L_1-metrika d_1 (definicija 6.16) i sup-metrika d_∞ (definicija 6.23) na skupu $\mathscr{C}[a, b]$ neprekidnih realnih funkcija na $[a, b]$, *nisu* topološki ekvivalentne.

Zaista, neka su $f, g \in \mathscr{C}[a, b]$. Tada je $|f(x) - g(x)| \leqslant d_\infty(f, g)$ za sve $x \in [a, b]$, pa je $d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant (b - a)\, d_\infty(f, g)$. Stoga je $K_{d_\infty}(f; r) \subseteq K_{d_1}(f; (b - a)\, r)$.

Međutim, kugla $K_{d_\infty}(\mathbb{0}; 1)$, gdje je $\mathbb{0}\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ konstantna funkcija $\mathbb{0}(x) = 0$ za sve x, nije d_1-otvorena.

Naime, kada bi bila d_1-otvorena, onda bi za neki $\varepsilon > 0$ bilo $K_{d_1}(\mathbb{0}; \varepsilon) \subseteq K_{d_\infty}(\mathbb{0}; 1)$.

Međutim, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji neprekidna funkcija g na $[a, b]$ t.d. je $d_1(\mathbb{0}, g) = \int_a^b |g(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon$ i za koju postoji $x^* \in [a, b]$ t.d. je $g(x^*) > 1$, pa je $d_\infty(\mathbb{0}; g) > 1$.

Ne-ekvivalentnost metrika d_1 i d_∞ u $\mathscr{C}[a, b]$

Primjer 8.7

L_1-metrika d_1 (definicija 6.16) i sup-metrika d_∞ (definicija 6.23) na skupu $\mathscr{C}[a, b]$ neprekidnih realnih funkcija na $[a, b]$, *nisu* topološki ekvivalentne.

Zaista, neka su $f, g \in \mathscr{C}[a, b]$. Tada je $|f(x) - g(x)| \leqslant d_\infty(f, g)$ za sve $x \in [a, b]$, pa je $d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant (b - a)\, d_\infty(f, g)$. Stoga je $K_{d_\infty}(f; r) \subseteq K_{d_1}(f; (b - a)\, r)$.

Međutim, kugla $K_{d_\infty}(\mathbb{0}; 1)$, gdje je $\mathbb{0}\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ konstantna funkcija $\mathbb{0}(x) = 0$ za sve x, nije d_1-otvorena.

Naime, kada bi bila d_1-otvorena, onda bi za neki $\varepsilon > 0$ bilo $K_{d_1}(\mathbb{0}; \varepsilon) \subseteq K_{d_\infty}(\mathbb{0}; 1)$.

Međutim, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji neprekidna funkcija g na $[a, b]$ t.d. je $d_1(\mathbb{0}, g) = \int_a^b |g(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon$ i za koju postoji $x^* \in [a, b]$ t.d. je $g(x^*) > 1$, pa je $d_\infty(\mathbb{0}; g) > 1$.

Ne-ekvivalentnost metrika d_1 i d_∞ u $\mathscr{C}[a,b]$

Primjer 8.7

L_1-metrika d_1 (definicija 6.16) i sup-metrika d_∞ (definicija 6.23) na skupu $\mathscr{C}[a,b]$ neprekidnih realnih funkcija na $[a,b]$, *nisu* topološki ekvivalentne.

Zaista, neka su $f,g \in \mathscr{C}[a,b]$. Tada je $|f(x)-g(x)| \leqslant d_\infty(f,g)$ za sve $x \in [a,b]$, pa je $d_1(f,g) = \int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant (b-a)\, d_\infty(f,g)$. Stoga je $K_{d_\infty}(f;r) \subseteq K_{d_1}(f;(b-a)\,r)$.

Međutim, kugla $K_{d_\infty}(\mathbb{0};1)$, gdje je $\mathbb{0}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ konstantna funkcija $\mathbb{0}(x) = 0$ za sve x, nije d_1-otvorena.

Naime, kada bi bila d_1-otvorena, onda bi za neki $\varepsilon > 0$ bilo $K_{d_1}(\mathbb{0};\varepsilon) \subseteq K_{d_\infty}(\mathbb{0};1)$.

Međutim, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji neprekidna funkcija g na $[a,b]$ t.d. je $d_1(\mathbb{0},g) = \int_a^b |g(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon$ i za koju postoji $x^* \in [a,b]$ t.d. je $g(x^*) > 1$, pa je $d_\infty(\mathbb{0};g) > 1$.

Ne-ekvivalentnost metrika d_1 i d_∞ u $\mathscr{C}[a, b]$

Primjer 8.7

L_1-metrika d_1 (definicija 6.16) i sup-metrika d_∞ (definicija 6.23) na skupu $\mathscr{C}[a, b]$ neprekidnih realnih funkcija na $[a, b]$, *nisu* topološki ekvivalentne.

Zaista, neka su $f, g \in \mathscr{C}[a, b]$. Tada je $|f(x) - g(x)| \leqslant d_\infty(f, g)$ za sve $x \in [a, b]$, pa je $d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \leqslant (b - a)\, d_\infty(f, g)$. Stoga je $K_{d_\infty}(f; r) \subseteq K_{d_1}(f; (b - a)\, r)$.

Međutim, kugla $K_{d_\infty}(\mathbb{O}; 1)$, gdje je $\mathbb{O} \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ konstantna funkcija $\mathbb{O}(x) = 0$ za sve x, nije d_1-otvorena.

Naime, kada bi bila d_1-otvorena, onda bi za neki $\varepsilon > 0$ bilo $K_{d_1}(\mathbb{O}; \varepsilon) \subseteq K_{d_\infty}(\mathbb{O}; 1)$.

Međutim, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji neprekidna funkcija g na $[a, b]$ t.d. je $d_1(\mathbb{O}, g) = \int_a^b |g(x)|\, dx < \varepsilon$ i za koju postoji $x^* \in [a, b]$ t.d. je $g(x^*) > 1$, pa je $d_\infty(\mathbb{O}; g) > 1$.

Homeomorfizam

Definicija 8.8

Neka su X i Y metrički prostori. Neprekidna bijekcija $f\colon X \to Y$ takva da je i njezin inverz $f^{-1}\colon Y \to X$ neprekidan, naziva se *homeomorfizam*, a za prostore X i Y kažemo da su *homeomorfni* ili *topološki ekvivalentni*.

Lako se vidi da vrijedi

Propozicija 8.9

Dvije metrike d i d' na skupu X su topološki ekvivalentne ako i samo ako je identiteta $\mathbb{1}_X\colon (X,d) \to (X,d')$ homeomorfizam. $\square$

Homeomorfizam

Definicija 8.8

Neka su X i Y metrički prostori. Neprekidna bijekcija $f\colon X \to Y$ takva da je i njezin inverz $f^{-1}\colon Y \to X$ neprekidan, naziva se *homeomorfizam*, a za prostore X i Y kažemo da su *homeomorfni* ili *topološki ekvivalentni*.

Lako se vidi da vrijedi

Propozicija 8.9

Dvije metrike d i d' na skupu X su topološki ekvivalentne ako i samo ako je identiteta $\mathbb{1}_X\colon (X, d) \to (X, d')$ homeomorfizam. □

Izometrija

Definicija 8.10

Surjekcija $f\colon (X,d) \twoheadrightarrow (X',d')$ *t.d. je* $d'\big(f(x),f(y)\big) = d(x,y)$ *za sve* $x,y \in X$ *naziva se* ***izometrija***.

- Lako se vidi da je svaka izometrija ujedno i homeomorfizam.

Primjer 8.11

Preslikavanje $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ definirano s $f(x,y) := x + iy$ je izometrija euklidskog prostora $(\mathbb{E}^2, d_2)$ na prostor kompleksnih brojeva $(\mathbb{C}, d)$ s metrikom d iz primjera 6.5.

Napomena 8.12

Neka su (X,d_X) *i* (Y,d_Y) *metrički prostori a* d_1, d_2 *i* d_∞ *spominjane tri metrike na produktu* $X \times Y$. *Metrički prostori* $(X \times Y, d_1)$, $(X \times Y, d_2)$ *i* $(X \times Y, d_\infty)$ *nisu međusobno izometrični, ali jesu homeomorfni.*

Izometrija

Definicija 8.10

Surjekcija $f\colon (X,d) \twoheadrightarrow (X',d')$ *t.d. je* $d'\big(f(x),f(y)\big) = d(x,y)$ *za sve* $x,y \in X$ *naziva se* ***izometrija***.

- Lako se vidi da je svaka izometrija ujedno i homeomorfizam.

Primjer 8.11

Preslikavanje $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ definirano s $f(x,y) := x + iy$ je izometrija euklidskog prostora $(\mathbb{E}^2, d_2)$ na prostor kompleksnih brojeva $(\mathbb{C}, d)$ s metrikom d iz primjera 6.5.

Napomena 8.12

Neka su (X,d_X) *i* (Y,d_Y) *metrički prostori a* d_1*,* d_2 *i* d_∞ *spominjane tri metrike na produktu* $X \times Y$*. Metrički prostori* $(X \times Y, d_1)$*,* $(X \times Y, d_2)$ *i* $(X \times Y, d_\infty)$ *nisu međusobno izometrični, ali jesu homeomorfni.*

Izometrija

Definicija 8.10

Surjekcija $f\colon (X,d) \twoheadrightarrow (X',d')$ t.d. je $d'\big(f(x),f(y)\big) = d(x,y)$ za sve $x,y \in X$ naziva se izometrija.

- Lako se vidi da je svaka izometrija ujedno i homeomorfizam.

Primjer 8.11

Preslikavanje $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ definirano s $f(x,y) := x + \imath y$ je izometrija euklidskog prostora $(\mathbb{E}^2, d_2)$ na prostor kompleksnih brojeva $(\mathbb{C}, d)$ s metrikom d iz primjera 6.5.

Napomena 8.12

Neka su (X,d_X) i (Y,d_Y) metrički prostori a d_1, d_2 i d_∞ spominjane tri metrike na produktu $X \times Y$. Metrički prostori $(X\times Y, d_1)$, $(X \times Y, d_2)$ i $(X \times Y, d_\infty)$ nisu međusobno izometrični, ali jesu homeomorfni.

Izometrija

Definicija 8.10

Surjekcija $f\colon (X,d) \twoheadrightarrow (X',d')$ *t.d. je* $d'\big(f(x),f(y)\big) = d(x,y)$ *za sve* $x,y \in X$ *naziva se* ***izometrija***.

- Lako se vidi da je svaka izometrija ujedno i homeomorfizam.

Primjer 8.11

Preslikavanje $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ definirano s $f(x,y) := x + \imath y$ je izometrija euklidskog prostora $(\mathbb{E}^2, d_2)$ na prostor kompleksnih brojeva $(\mathbb{C}, d)$ s metrikom d iz primjera 6.5.

Napomena 8.12

Neka su (X,d_X) *i* (Y,d_Y) *metrički prostori a* d_1, d_2 *i* d_∞ *spominjane tri metrike na produktu* $X \times Y$. *Metrički prostori* $(X \times Y, d_1)$, $(X \times Y, d_2)$ *i* $(X \times Y, d_\infty)$ *nisu međusobno izometrični, ali jesu homeomorfni.*

3 TOPOLOŠKI PROSTOR

- Topološka struktura
- Baza i podbaza
- Potprostor
- Produkt topoloških prostora
- Homeomorfizam i topološka svojstva
- Zatvoreni skupovi, gomilišta, zatvorenje, rub i nutrina
- Aksiomi separacije

Definicija topološkog prostora

Kao što smo vidjeli u prethodnom poglavlju, za neprekidnost preslikavanja dovoljno je poznavati otvorene skupove. Zato je prirodna sljedeća definicija:

Definicija 9.1

Topološki prostor $(X, \mathscr{T})$ je skup X zajedno s familijom $\mathscr{T}$ podskupova od X koja ima sljedeća svojstva:

(TOP1) $X, \emptyset \in \mathscr{T}$;

(TOP2) presjek svaka dva skupa familije $\mathscr{T}$ također pripada familiji $\mathscr{T}$;

(TOP3) unija proizvoljne kolekcije skupova iz $\mathscr{T}$ također pripada familiji $\mathscr{T}$.

Familija $\mathscr{T}$ naziva se *topološka struktura* ili jednostavno *topologija* na X, a njezini članovi nazivaju se *otvoreni skupovi*.

Iz (TOP2) indukcijom slijedi da je i presjek svake *konačne* kolekcije otvorenih skupova otvoren skup.

Definicija topološkog prostora

Kao što smo vidjeli u prethodnom poglavlju, za neprekidnost preslikavanja dovoljno je poznavati otvorene skupove. Zato je prirodna sljedeća definicija:

Definicija 9.1

Topološki prostor $(X, \mathscr{T})$ je skup X zajedno s familijom $\mathscr{T}$ podskupova od X koja ima sljedeća svojstva:

(TOP1) $X, \emptyset \in \mathscr{T}$;

(TOP2) presjek svaka dva skupa familije $\mathscr{T}$ također pripada familiji $\mathscr{T}$;

(TOP3) unija proizvoljne kolekcije skupova iz $\mathscr{T}$ također pripada familiji $\mathscr{T}$.

Familija $\mathscr{T}$ naziva se *topološka struktura* ili jednostavno *topologija* na X, a njezini članovi nazivaju se *otvoreni skupovi*.

Iz (TOP2) indukcijom slijedi da je i presjek svake *konačne* kolekcije otvorenih skupova otvoren skup.

Definicija topološkog prostora

Kao što smo vidjeli u prethodnom poglavlju, za neprekidnost preslikavanja dovoljno je poznavati otvorene skupove. Zato je prirodna sljedeća definicija:

Definicija 9.1

Topološki prostor $(X, \mathscr{T})$ je skup X zajedno s familijom $\mathscr{T}$ podskupova od X koja ima sljedeća svojstva:

(TOP1) $X, \emptyset \in \mathscr{T}$;

(TOP2) presjek svaka dva skupa familije $\mathscr{T}$ također pripada familiji $\mathscr{T}$;

(TOP3) unija proizvoljne kolekcije skupova iz $\mathscr{T}$ također pripada familiji $\mathscr{T}$.

Familija $\mathscr{T}$ naziva se *topološka struktura* ili jednostavno *topologija* na X, a njezini članovi nazivaju se *otvoreni skupovi*.

Iz (TOP2) indukcijom slijedi da je i presjek svake *konačne* kolekcije otvorenih skupova otvoren skup.

Primjeri

Primjer 9.2

Neka je X skup a $\mathscr{T} = 2^X = \mathscr{P}(X)$ familija svih podskupova od X. Ta familija očito zadovoljava (TOP1)–(TOP3) pa je to topologija na X u kojoj je svaki skup otvoren. Ta se topologija naziva *diskretnom* topologijom, a $(X, \mathscr{T})$ *diskretnim topološkim prostorom*.

Primjer 9.3

U svakom metričkom prostoru (X, d) familija svih otvorenih skupova u smislu definicije 7.9, zadovoljava (TOP1)–(TOP3), tj. metrika d definira topološku strukturu na X. Kaže se da je ta topologija *definirana* ili *inducirana* metrikom d.

Dakle, svaki metrički prostor je ujedno i topološki prostor. Specijalno, svi euklidski prostori imaju topološku strukturu.

Primjeri

Primjer 9.2

Neka je X skup a $\mathscr{T} = 2^X = \mathscr{P}(X)$ familija svih podskupova od X. Ta familija očito zadovoljava (TOP1)–(TOP3) pa je to topologija na X u kojoj je svaki skup otvoren. Ta se topologija naziva *diskretnom* topologijom, a $(X, \mathscr{T})$ *diskretnim topološkim prostorom*.

Primjer 9.3

U svakom metričkom prostoru (X, d) familija svih otvorenih skupova u smislu definicije 7.9, zadovoljava (TOP1)–(TOP3), tj. metrika d definira topološku strukturu na X. Kaže se da je ta topologija *definirana* ili *inducirana* metrikom d.

Dakle, svaki metrički prostor je ujedno i topološki prostor.

Specijalno, svi euklidski prostori imaju topološku strukturu.

Primjeri

Primjer 9.2

Neka je X skup a $\mathscr{T} = 2^X = \mathscr{P}(X)$ familija svih podskupova od X. Ta familija očito zadovoljava (TOP1)–(TOP3) pa je to topologija na X u kojoj je svaki skup otvoren. Ta se topologija naziva *diskretnom* topologijom, a $(X, \mathscr{T})$ *diskretnim topološkim prostorom*.

Uoči da je diskretna topologija inducirana diskretnom metrikom.

Primjer 9.3

U svakom metričkom prostoru (X, d) familija svih otvorenih skupova u smislu definicije 7.9, zadovoljava (TOP1)–(TOP3), tj. metrika d definira topološku strukturu na X. Kaže se da je ta topologija *definirana* ili *inducirana* metrikom d.

Dakle, svaki metrički prostor je ujedno i topološki prostor.

Specijalno, svi euklidski prostori imaju topološku strukturu.

Uspoređivanje topoloških struktura

Kao što su na istom skupu moguće različite metrike, tako su moguće i različite topološke strukture.

Naprimjer, diskretna topologija na $\mathbb{R}^n$ je očito različita od euklidske topologije — topologije inducirane euklidskom metrikom d_2.

Ali, različite metrike mogu inducirati istu topologiju. Naprimjer, otvoreni skupovi koje u $\mathbb{R}^n$ definiraju metrike d_1, d_2 i d_∞ su jedni te isti, tj. sve te tri metrike definiraju istu topološku strukturu na $\mathbb{R}^n$.

Definicija 9.4

Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ dvije topologije na skupu X. Kažemo da je topologija $\mathcal{T}'$ *finija* od topologije $\mathcal{T}$, ili da $\mathcal{T}'$ *profinjuje* topologiju $\mathcal{T}$, ako je $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$, tj. ako je svaki skup koji je otvoren s obzirom na topologiju $\mathcal{T}$ otvoren i s obzirom na topologiju $\mathcal{T}'$. U tom se slučaju za topologiju $\mathcal{T}$ kaže da je *grublja* od topologije $\mathcal{T}'$.

Uspoređivanje topoloških struktura

Kao što su na istom skupu moguće različite metrike, tako su moguće i različite topološke strukture.

Naprimjer, diskretna topologija na $\mathbb{R}^n$ je očito različita od euklidske topologije — topologije inducirane euklidskom metrikom d_2.

Ali, različite metrike mogu inducirati istu topologiju. Naprimjer, otvoreni skupovi koje u $\mathbb{R}^n$ definiraju metrike d_1, d_2 i d_∞ su jedni te isti, tj. sve te tri metrike definiraju istu topološku strukturu na $\mathbb{R}^n$.

Definicija 9.4

Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ dvije topologije na skupu X. Kažemo da je topologija $\mathcal{T}'$ *finija* od topologije $\mathcal{T}$, ili da $\mathcal{T}'$ *profinjuje* topologiju $\mathcal{T}$, ako je $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$, tj. ako je svaki skup koji je otvoren s obzirom na topologiju $\mathcal{T}$ otvoren i s obzirom na topologiju $\mathcal{T}'$. U tom se slučaju za topologiju $\mathcal{T}$ kaže da je *grublja* od topologije $\mathcal{T}'$.

Uspoređivanje topoloških struktura

Kao što su na istom skupu moguće različite metrike, tako su moguće i različite topološke strukture.

Naprimjer, diskretna topologija na $\mathbb{R}^n$ je očito različita od euklidske topologije — topologije inducirane euklidskom metrikom d_2.

Ali, različite metrike mogu inducirati istu topologiju. Naprimjer, otvoreni skupovi koje u $\mathbb{R}^n$ definiraju metrike d_1, d_2 i d_∞ su jedni te isti, tj. sve te tri metrike definiraju istu topološku strukturu na $\mathbb{R}^n$.

Definicija 9.4

Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ dvije topologije na skupu X. Kažemo da je topologija $\mathcal{T}'$ *finija* od topologije $\mathcal{T}$, ili da $\mathcal{T}'$ *profinjuje* topologiju $\mathcal{T}$, ako je $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$, tj. ako je svaki skup koji je otvoren s obzirom na topologiju $\mathcal{T}$ otvoren i s obzirom na topologiju $\mathcal{T}'$. U tom se slučaju za topologiju $\mathcal{T}$ kaže da je *grublja* od topologije $\mathcal{T}'$.

Uspoređivanje topoloških struktura

Kao što su na istom skupu moguće različite metrike, tako su moguće i različite topološke strukture.

Naprimjer, diskretna topologija na $\mathbb{R}^n$ je očito različita od euklidske topologije — topologije inducirane euklidskom metrikom d_2.

Ali, različite metrike mogu inducirati istu topologiju. Naprimjer, otvoreni skupovi koje u $\mathbb{R}^n$ definiraju metrike d_1, d_2 i d_∞ su jedni te isti, tj. sve te tri metrike definiraju istu topološku strukturu na $\mathbb{R}^n$.

Definicija 9.4

Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ dvije topologije na skupu X. Kažemo da je topologija $\mathcal{T}'$ *finija* od topologije $\mathcal{T}$, ili da $\mathcal{T}'$ *profinjuje* topologiju $\mathcal{T}$, ako je $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$, tj. ako je svaki skup koji je otvoren s obzirom na topologiju $\mathcal{T}$ otvoren i s obzirom na topologiju $\mathcal{T}'$. U tom se slučaju za topologiju $\mathcal{T}$ kaže da je *grublja* od topologije $\mathcal{T}'$.

Uspoređivanje topoloških struktura

Kao što su na istom skupu moguće različite metrike, tako su moguće i različite topološke strukture.

Naprimjer, diskretna topologija na $\mathbb{R}^n$ je očito različita od euklidske topologije — topologije inducirane euklidskom metrikom d_2.

Ali, različite metrike mogu inducirati istu topologiju. Naprimjer, otvoreni skupovi koje u $\mathbb{R}^n$ definiraju metrike d_1, d_2 i d_∞ su jedni te isti, tj. sve te tri metrike definiraju istu topološku strukturu na $\mathbb{R}^n$.

Definicija 9.4

Neka su $\mathscr{T}$ i $\mathscr{T}'$ dvije topologije na skupu X. Kažemo da je topologija $\mathscr{T}'$ *finija* od topologije $\mathscr{T}$, ili da $\mathscr{T}'$ *profinjuje* topologiju $\mathscr{T}$, ako je $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}'$, tj. ako je svaki skup koji je otvoren s obzirom na topologiju $\mathscr{T}$ otvoren i s obzirom na topologiju $\mathscr{T}'$. U tom se slučaju za topologiju $\mathscr{T}$ kaže da je *grublja* od topologije $\mathscr{T}'$.

Postoje topologije koje nisu inducirane metrikom

Primjer 9.5

Neka je X neki skup i neka je $\mathscr{T} = \{\emptyset, X\}$. Ova familija $\mathscr{T}$ očito zadovoljava (TOP1)–(TOP3). To je *indiskretna* topologija i to je najgrublja među svim topologijama na X.

Lako se vidi da, ako X ima barem dvije točke, ne postoji metrika koja inducira indiskretnu topologiju.

Dakle, postoje topološki prostori koji nisu metrički.

Da ima i zanimljivih i važnih ne-metrizabilnih topoloških prostora, vidjet ćemo kasnije.

Napomena 9.6

Ne moraju svake dvije topologije na skupu X biti usporedive, tj. ako su $\mathscr{T}$ i $\mathscr{T}'$ dvije topologije na X moguće je da $\mathscr{T} \not\subseteq \mathscr{T}'$ i $\mathscr{T}' \not\subseteq \mathscr{T}$.

Postoje topologije koje nisu inducirane metrikom

Primjer 9.5

Neka je X neki skup i neka je $\mathscr{T} = \{\emptyset, X\}$. Ova familija $\mathscr{T}$ očito zadovoljava (TOP1)–(TOP3). To je *indiskretna* topologija i to je najgrublja među svim topologijama na X.

Lako se vidi da, ako X ima barem dvije točke, ne postoji metrika koja inducira indiskretnu topologiju.

Dakle, postoje topološki prostori koji nisu metrički.
Da ima i zanimljivih i važnih ne-metrizabilnih topoloških prostora, vidjet ćemo kasnije.

Napomena 9.6

Ne moraju svake dvije topologije na skupu X biti usporedive, tj. ako su $\mathscr{T}$ i $\mathscr{T}'$ dvije topologije na X moguće je da $\mathscr{T} \not\subseteq \mathscr{T}'$ i $\mathscr{T}' \not\subseteq \mathscr{T}$.

Postoje topologije koje nisu inducirane metrikom

Primjer 9.5

Neka je X neki skup i neka je $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Ova familija $\mathcal{T}$ očito zadovoljava (TOP1)–(TOP3). To je *indiskretna* topologija i to je najgrublja među svim topologijama na X.

Lako se vidi da, ako X ima barem dvije točke, ne postoji metrika koja inducira indiskretnu topologiju.

Dakle, postoje topološki prostori koji nisu metrički.
Da ima i zanimljivih i važnih ne-metrizabilnih topoloških prostora, vidjet ćemo kasnije.

Napomena 9.6

Ne moraju svake dvije topologije na skupu X biti usporedive, tj. ako su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ dvije topologije na X moguće je da $\mathcal{T} \not\subseteq \mathcal{T}'$ i $\mathcal{T}' \not\subseteq \mathcal{T}$.

Postoje topologije koje nisu inducirane metrikom

Primjer 9.5

Neka je X neki skup i neka je $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Ova familija $\mathcal{T}$ očito zadovoljava (TOP1)–(TOP3). To je *indiskretna* topologija i to je najgrublja među svim topologijama na X.

Lako se vidi da, ako X ima barem dvije točke, ne postoji metrika koja inducira indiskretnu topologiju.

Dakle, postoje topološki prostori koji nisu metrički.
Da ima i zanimljivih i važnih ne-metrizabilnih topoloških prostora, vidjet ćemo kasnije.

Napomena 9.6

Ne moraju svake dvije topologije na skupu X biti usporedive, tj. ako su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ dvije topologije na X moguće je da $\mathcal{T} \not\subseteq \mathcal{T}'$ i $\mathcal{T}' \not\subseteq \mathcal{T}$.

Kofinitna topologija

Primjer 9.7

Neka je X proizvoljan skup a familiju $\mathscr{T}$ neka čine prazan skup $\emptyset$ i komplementi konačnih skupova. Nije teško vidjeti da je tako definirana familija $\mathscr{T}$ jedna topologija na X.
Ta se topologija naziva *kofinitnom topologijom* na X.
Ako je X konačan onda se radi o diskretnoj topologiji, ali ako je X beskonačan onda je topologija $\mathscr{T}$ različita od diskretne topologije.

Kofinitna topologija

Primjer 9.7

Neka je X proizvoljan skup a familiju $\mathscr{T}$ neka čine prazan skup $\emptyset$ i komplementi konačnih skupova. Nije teško vidjeti da je tako definirana familija $\mathscr{T}$ jedna topologija na X.
Ta se topologija naziva *kofinitnom topologijom* na X.
Ako je X konačan onda se radi o diskretnoj topologiji, ali ako je X beskonačan onda je topologija $\mathscr{T}$ različita od diskretne topologije.

Neprekidna preslikavanja topoloških prostora

Imajući u vidu teorem 7.15, neprekidnost se definira ovako:

Definicija 9.8

Preslikavanje $f\colon X \to Y$ topoloških prostora je *neprekidno* ako je za svaki otvoren podskup $V \subseteq Y$ njegova praslika $f^{-1}(V)$ otvoren podskup od X.

UPOZORENJE: Definicija neprekidnosti *ne govori* o *slici* otvorenih skupova, nego o *praslici*, tj. *originalu* otvorenih skupova.
Općenito, slika otvorenog skupa iz X nije otvoren skup u Y, bez obzira je li preslikavanje neprekidno ili ne.

Uoči da je, za razliku od definicije neprekidnosti u metričkim prostorima, ovdje neprekidnost odmah definirana „globalno”, tj. kao svojstvo funkcije na cijelom prostoru.

Neprekidna preslikavanja topoloških prostora

Imajući u vidu teorem 7.15, neprekidnost se definira ovako:

Definicija 9.8

Preslikavanje $f\colon X \to Y$ topoloških prostora je *neprekidno* ako je za svaki otvoren podskup $V \subseteq Y$ njegova praslika $f^{-1}(V)$ otvoren podskup od X.

UPOZORENJE: Definicija neprekidnosti *ne govori* o *slici* otvorenih skupova, nego o *praslici*, tj. *originalu* otvorenih skupova.
Općenito, slika otvorenog skupa iz X nije otvoren skup u Y, bez obzira je li preslikavanje neprekidno ili ne.

Uoči da je, za razliku od definicije neprekidnosti u metričkim prostorima, ovdje neprekidnost odmah definirana „globalno”, tj. kao svojstvo funkcije na cijelom prostoru.

Neprekidna preslikavanja topoloških prostora

Imajući u vidu teorem 7.15, neprekidnost se definira ovako:

Definicija 9.8

Preslikavanje $f\colon X \to Y$ topoloških prostora je *neprekidno* ako je za svaki otvoren podskup $V \subseteq Y$ njegova praslika $f^{-1}(V)$ otvoren podskup od X.

UPOZORENJE: Definicija neprekidnosti *ne govori* o *slici* otvorenih skupova, nego o *praslici*, tj. *originalu* otvorenih skupova. Općenito, slika otvorenog skupa iz X nije otvoren skup u Y, bez obzira je li preslikavanje neprekidno ili ne.

Uoči da je, za razliku od definicije neprekidnosti u metričkim prostorima, ovdje neprekidnost odmah definirana „globalno”, tj. kao svojstvo funkcije na cijelom prostoru.

Neprekidnost u točki

Neprekidnost u točki definira se ovako:

Definicija 9.9

Preslikavanje $f\colon X \to Y$ je *neprekidno u točki* $x \in X$ ako za svaki u Y otvoren skup $V \ni f(x)$ postoji u X otvoren skup $U \ni x$ t.d. je $f(U) \subseteq V$.

- Lako se vidi da je f neprekidno akko je neprekidno u svakoj točki.

DOGOVOR: Kada otvoren skup U sadrži točku x, dakle $x \in U$, govorit ćemo da je U *okolina* točke x.

Isto tako, kada otvoren skup U sadrži neki skup A, govorit ćemo da je U okolina skupa A.

Napomena: Neki autori okolinom točke nazivaju *svaki* skup koji sadrži neki otvoren skup koji sadrži tu točku. I analogno za okolinu skupa.

Mi ćemo se držati gornjeg dogovora.

Neprekidnost u točki

Neprekidnost u točki definira se ovako:

Definicija 9.9

Preslikavanje $f\colon X \to Y$ je *neprekidno u točki* $x \in X$ ako za svaki u Y otvoren skup $V \ni f(x)$ postoji u X otvoren skup $U \ni x$ t.d. je $f(U) \subseteq V$.

- Lako se vidi da je f neprekidno akko je neprekidno u svakoj točki.

DOGOVOR: Kada otvoren skup U sadrži točku x, dakle $x \in U$, govorit ćemo da je U *okolina* točke x.

Isto tako, kada otvoren skup U sadrži neki skup A, govorit ćemo da je U okolina skupa A.

Napomena: Neki autori okolinom točke nazivaju *svaki* skup koji sadrži neki otvoren skup koji sadrži tu točku. I analogno za okolinu skupa.

Mi ćemo se držati gornjeg dogovora.

Neprekidnost u točki

Neprekidnost u točki definira se ovako:

Definicija 9.9

Preslikavanje $f\colon X \to Y$ je *neprekidno u točki* $x \in X$ ako za svaki u Y otvoren skup $V \ni f(x)$ postoji u X otvoren skup $U \ni x$ t.d. je $f(U) \subseteq V$.

- Lako se vidi da je f neprekidno akko je neprekidno u svakoj točki.

DOGOVOR: Kada otvoren skup U sadrži točku x, dakle $x \in U$, govorit ćemo da je U *okolina* točke x.

Isto tako, kada otvoren skup U sadrži neki skup A, govorit ćemo da je U okolina skupa A.

Napomena: Neki autori okolinom točke nazivaju *svaki* skup koji sadrži neki otvoren skup koji sadrži tu točku. I analogno za okolinu skupa.

Mi ćemo se držati gornjeg dogovora.

Neprekidnost u točki

Neprekidnost u točki definira se ovako:

Definicija 9.9

Preslikavanje $f\colon X \to Y$ je *neprekidno u točki* $x \in X$ ako za svaki u Y otvoren skup $V \ni f(x)$ postoji u X otvoren skup $U \ni x$ t.d. je $f(U) \subseteq V$.

- Lako se vidi da je f neprekidno akko je neprekidno u svakoj točki.

DOGOVOR: Kada otvoren skup U sadrži točku x, dakle $x \in U$, govorit ćemo da je U *okolina* točke x.

Isto tako, kada otvoren skup U sadrži neki skup A, govorit ćemo da je U okolina skupa A.

Napomena: Neki autori okolinom točke nazivaju *svaki* skup koji sadrži neki otvoren skup koji sadrži tu točku. I analogno za okolinu skupa.

Mi ćemo se držati gornjeg dogovora.

Neprekidnost — osnovne činjenice

Navedimo nekoliko jednostavnih osnovnih činjenica o neprekidnim preslikavanjima topoloških prostora.

Propozicija 9.10

(i) *Neka su $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$ neprekidna preslikavanja. Tada je i kompozicija $g \circ f\colon X \to Z$ neprekidno preslikavanje.*

(ii) *Za svaki topološki prostor X, identiteta $\mathbb{1}_X\colon X \to X$ je neprekidno preslikavanje.* □

Propozicija 9.11

(i) *Svako konstantno preslikavanje je neprekidno.*

(ii) *Svako preslikavanje kojemu je domena diskretan prostor je neprekidno.*

(iii) *Svako preslikavanje kojem je kodomena indiskretan prostor je neprekidno.* □

Neprekidnost — osnovne činjenice

Navedimo nekoliko jednostavnih osnovnih činjenica o neprekidnim preslikavanjima topoloških prostora.

Propozicija 9.10

(i) *Neka su* $f\colon X \to Y$ *i* $g\colon Y \to Z$ *neprekidna preslikavanja. Tada je i kompozicija* $g \circ f\colon X \to Z$ *neprekidno preslikavanje.*

(ii) *Za svaki topološki prostor* X, *identiteta* $\mathbb{1}_X\colon X \to X$ *je neprekidno preslikavanje.* □

Propozicija 9.11

(i) *Svako konstantno preslikavanje je neprekidno.*

(ii) *Svako preslikavanje kojemu je domena diskretan prostor je neprekidno.*

(iii) *Svako preslikavanje kojem je kodomena indiskretan prostor je neprekidno.* □

Neprekidnost — osnovne činjenice

Navedimo nekoliko jednostavnih osnovnih činjenica o neprekidnim preslikavanjima topoloških prostora.

Propozicija 9.10

(i) *Neka su* $f\colon X \to Y$ *i* $g\colon Y \to Z$ *neprekidna preslikavanja. Tada je i kompozicija* $g \circ f\colon X \to Z$ *neprekidno preslikavanje.*

(ii) *Za svaki topološki prostor* X, *identiteta* $\mathbb{1}_X\colon X \to X$ *je neprekidno preslikavanje.* □

Propozicija 9.11

(i) *Svako konstantno preslikavanje je neprekidno.*

(ii) *Svako preslikavanje kojemu je domena diskretan prostor je neprekidno.*

(iii) *Svako preslikavanje kojem je kodomena indiskretan prostor je neprekidno.* □

Baza topologije

U metričkom prostoru svaki je otvoren skup unija (od najčešće beskonačno mnogo) otvorenih kugala. I u topološkim prostorima je često korisno imati neku potfamiliju otvorenih skupova koja ima ulogu poput familije kugala u metričkom prostoru.

Definicija 10.1

Neka je $(X, \mathscr{T})$ topološki prostor. Za familiju $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{T}$ kažemo da je *baza topologija* $\mathscr{T}$, ako je svaki skup u $\mathscr{T}$ unija nekih članova familije $\mathscr{B}$.

Uoči razliku između ove i sljedeće definicije:

Definicija 10.2

Neka je X skup. Za familiju $\mathscr{B}$ podskupova od X kažemo da je *baza neke topologije* na X ako je familija koja se sastoji od praznog skupa $\emptyset$ i svih proizvoljnih unija članova od $\mathscr{B}$, topologija, tj. ako zadovoljava (TOP1)–(TOP3).

Baza topologije

U metričkom prostoru svaki je otvoren skup unija (od najčešće beskonačno mnogo) otvorenih kugala. I u topološkim prostorima je često korisno imati neku potfamiliju otvorenih skupova koja ima ulogu poput familije kugala u metričkom prostoru.

Definicija 10.1

Neka je $(X, \mathscr{T})$ topološki prostor. Za familiju $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{T}$ kažemo da je *baza topologija* $\mathscr{T}$, ako je svaki skup u $\mathscr{T}$ unija nekih članova familije $\mathscr{B}$.

Uoči razliku između ove i sljedeće definicije:

Definicija 10.2

Neka je X skup. Za familiju $\mathscr{B}$ podskupova od X kažemo da je *baza neke topologije* na X ako je familija koja se sastoji od praznog skupa $\emptyset$ i svih proizvoljnih unija članova od $\mathscr{B}$, topologija, tj. ako zadovoljava (TOP1)–(TOP3).

Baza topologije

U metričkom prostoru svaki je otvoren skup unija (od najčešće beskonačno mnogo) otvorenih kugala. I u topološkim prostorima je često korisno imati neku potfamiliju otvorenih skupova koja ima ulogu poput familije kugala u metričkom prostoru.

Definicija 10.1

Neka je $(X, \mathscr{T})$ topološki prostor. Za familiju $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{T}$ kažemo da je *baza topologija* $\mathscr{T}$, ako je svaki skup u $\mathscr{T}$ unija nekih članova familije $\mathscr{B}$.

Uoči razliku između ove i sljedeće definicije:

Definicija 10.2

Neka je X skup. Za familiju $\mathscr{B}$ podskupova od X kažemo da je *baza neke topologije* na X ako je familija koja se sastoji od praznog skupa $\emptyset$ i svih proizvoljnih unija članova od $\mathscr{B}$, topologija, tj. ako zadovoljava (TOP1)–(TOP3).

Kriterij za bazu

Ne može svaka familija podskupova biti baza neke topologije.
O tome govori

Propozicija 10.3

Familija $\mathscr{B}$ podskupova od X je baza neke topologije na X ako i samo ako vrijedi sljedeće:

(B1) *Unija svih članova familije $\mathscr{B}$ jednaka je X, i*

(B2) *Presjek svaka dva člana od $\mathscr{B}$ jednak je uniji nekih članova od $\mathscr{B}$.*

Dokaz:

(TOP1) Slijedi neposredno iz definicije i prvog uvjeta.

(TOP2) Za $U = \bigcup_\alpha B_\alpha$, $V = \bigcup_\beta B_\beta$ je $U \cap V = \bigcup_{\alpha,\beta}(B_\alpha \cap B_\beta)$, a svaki $B_\alpha \cap B_\beta$ je unija nekih članova od $\mathscr{B}$, pa je $U \cap V$ unija članova iz $\mathscr{B}$.

(TOP3) Unija unije članova iz $\mathscr{B}$ je unija članova iz $\mathscr{B}$. $\square$

Kriterij za bazu

Ne može svaka familija podskupova biti baza neke topologije.
O tome govori

Propozicija 10.3

Familija $\mathscr{B}$ podskupova od X je baza neke topologije na X ako i samo ako vrijedi sljedeće:

(B1) *Unija svih članova familije $\mathscr{B}$ jednaka je X, i*

(B2) *Presjek svaka dva člana od $\mathscr{B}$ jednak je uniji nekih članova od $\mathscr{B}$.*

Dokaz:

(TOP1) Slijedi neposredno iz definicije i prvog uvjeta.

(TOP2) Za $U = \bigcup_\alpha B_\alpha$, $V = \bigcup_\beta B_\beta$ je $U \cap V = \bigcup_{\alpha,\beta}(B_\alpha \cap B_\beta)$, a svaki $B_\alpha \cap B_\beta$ je unija nekih članova od $\mathscr{B}$, pa je $U \cap V$ unija članova iz $\mathscr{B}$.

(TOP3) Unija unije članova iz $\mathscr{B}$ je unija članova iz $\mathscr{B}$. $\square$

Primjena

Primjer 10.4

Kako bismo provjerili je li neko preslikavanje $f\colon X \to Y$ neprekidno, dovoljno je provjeriti jesu li praslike članova neke baze topologije na Y otvoreni podskupovi od X (ekonomičnost: ne treba to provjeravati za sve otvorene skupove u Y).

Dz. Za $V = \bigcup_\alpha B_\alpha \subseteq Y$ je $f^{-1}(V) = f^{-1}\left(\bigcup_\alpha B_\alpha\right) = \bigcup_\alpha f^{-1}(B_\alpha)$.

Druga primjena je način kako se često topologija zadaje:

Primjer 10.5

Odozdo granična topologija na $\mathbb{R}$ je topologija generirana bazom koju čine svi poluotvoreni intervali $[a, b\rangle$, $a < b$. Tu ćemo topologiju zvati i *ℓ-topologija*, a realne brojeve s tom topologijom označivat ćemo $\mathbb{R}_\ell$.

Primjena

Primjer 10.4

Kako bismo provjerili je li neko preslikavanje $f\colon X \to Y$ neprekidno, dovoljno je provjeriti jesu li praslike članova neke baze topologije na Y otvoreni podskupovi od X (ekonomičnost: ne treba to provjeravati za sve otvorene skupove u Y).
Dz. Za $V = \bigcup_\alpha B_\alpha \subseteq Y$ je $f^{-1}(V) = f^{-1}\left(\bigcup_\alpha B_\alpha\right) = \bigcup_\alpha f^{-1}(B_\alpha)$.

Druga primjena je način kako se često topologija zadaje:

Primjer 10.5

Odozdo granična topologija na $\mathbb{R}$ je topologija generirana bazom koju čine svi poluotvoreni intervali $[a, b\rangle$, $a < b$. Tu ćemo topologiju zvati i *ℓ-topologija*, a realne brojeve s tom topologijom označivat ćemo $\mathbb{R}_\ell$.

Primjena

Primjer 10.4

Kako bismo provjerili je li neko preslikavanje $f\colon X \to Y$ neprekidno, dovoljno je provjeriti jesu li praslike članova neke baze topologije na Y otvoreni podskupovi od X (ekonomičnost: ne treba to provjeravati za sve otvorene skupove u Y).
Dz. Za $V = \bigcup_\alpha B_\alpha \subseteq Y$ je $f^{-1}(V) = f^{-1}\big(\bigcup_\alpha B_\alpha\big) = \bigcup_\alpha f^{-1}(B_\alpha)$.

Druga primjena je način kako se često topologija zadaje:

Primjer 10.5

Odozdo granična topologija na $\mathbb{R}$ je topologija generirana bazom koju čine svi poluotvoreni intervali $[a, b\rangle$, $a < b$. Tu ćemo topologiju zvati i *ℓ-topologija*, a realne brojeve s tom topologijom označivat ćemo $\mathbb{R}_\ell$.

Podbaza topologije

Može se još više „ekonomizirati":

Definicija 10.6

Podbaza topologije $\mathscr{T}$ na X je takva familija $\mathscr{S}$ podskupova od X da je familija svih konačnih presjeka članova iz $\mathscr{S}$ baza topologije $\mathscr{T}$, tj. svaki je otvoren skup unija konačnih presjeka članova familije $\mathscr{S}$.

Primjer 10.7

Jednu podbazu standardne topologije na $\mathbb{R}$ čine svi „beskonačni" otvoreni intervali, tj. skupovi oblika $\langle -\infty, b\rangle$ i $\langle a, +\infty\rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Podbaza topologije

Može se još više „ekonomizirati”:

Definicija 10.6

Podbaza topologije $\mathscr{T}$ na X je takva familija $\mathscr{S}$ podskupova od X da je familija svih konačnih presjeka članova iz $\mathscr{S}$ baza topologije $\mathscr{T}$, tj. svaki je otvoren skup unija konačnih presjeka članova familije $\mathscr{S}$.

Primjer 10.7

Jednu podbazu standardne topologije na $\mathbb{R}$ čine svi „beskonačni” otvoreni intervali, tj. skupovi oblika $\langle -\infty, b\rangle$ i $\langle a, +\infty\rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Još ekonomičnije, dovoljno je uzeti samo beskonačne intervale s racionalnim krajevima, $a, b \in \mathbb{Q}$.

Podbaza topologije

Može se još više „ekonomizirati”:

Definicija 10.6

Podbaza topologije $\mathscr{T}$ na X je takva familija $\mathscr{S}$ podskupova od X da je familija svih konačnih presjeka članova iz $\mathscr{S}$ baza topologije $\mathscr{T}$, tj. svaki je otvoren skup unija konačnih presjeka članova familije $\mathscr{S}$.

Primjer 10.7

Jednu podbazu standardne topologije na $\mathbb{R}$ čine svi „beskonačni” otvoreni intervali, tj. skupovi oblika $\langle -\infty, b\rangle$ i $\langle a, +\infty\rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Još ekonomičnije, dovoljno je uzeti samo beskonačne intervale s racionalnim krajevima, $a, b \in \mathbb{Q}$.

Potprostor

Definicija 11.1

Neka je $(X, \mathscr{T})$ topološki prostor a $A \subseteq X$ podskup. *Relativna* ili *inducirana* topologija na A je familija svih presjeka članova od $\mathscr{T}$ s A. A s relativnom topologijom naziva se (topološki) *potprostor* od X.

Potprostor

Definicija 11.1

Neka je $(X, \mathscr{T})$ topološki prostor a $A \subseteq X$ podskup. *Relativna* ili *inducirana* topologija na A je familija svih presjeka članova od $\mathscr{T}$ s A. A s relativnom topologijom naziva se (topološki) *potprostor* od X.

Nekad je korisno znati sljedeće:

Propozicija 11.2

Neka su X i Y topološki prostori, $A \subseteq X$ potprostor, a $i \colon A \hookrightarrow X$ inkluzija.

(i) *Ako je $f \colon X \to Y$ neprekidno onda je neprekidna i restrikcija $f|_A = f \circ i \colon A \to Y$.*

(ii) *Preslikavanje $g \colon Y \to A$ je neprekidno ako i samo ako je neprekidna kompozicija $i \circ g \colon Y \to X$.* $\square$

Lema o lijepljenju za otvorene skupove

Dobro je znati sljedeće:

Propozicija 11.3

Neka je A otvoren podskup prostora X a $U \subseteq A$ otvoren u A. Tada je U otvoren i u X. □

Sljedeći teorem pokazuje kako je neprekidnost lokalno svojstvo preslikavanja, i vrlo je koristan.

Teorem 11.4 (Lema o lijepljenju za otvorene skupove)

Neka je $X = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$, pri čemu su U_α otvoreni podskupovi od X, a $f : X \to Y$ preslikavanje takvo da su restrikcije $f|_{U_\alpha} : U_\alpha \to Y$ neprekidne za sve $\alpha \in J$. Tada je i preslikavanje f neprekidno.

Dokaz: Neka je $V \subseteq Y$ otvoren skup. Za svaki α skup $(f|_{U_\alpha})^{-1}(V)$ je otvoren u U_α, pa je onda otvoren i u X, jer je U_α otvoren u X, a $f^{-1}(V) = \bigcup_\alpha (f|_{U_\alpha})^{-1}(V)$, pa je i on otvoren u X. □

Lema o lijepljenju za otvorene skupove

Dobro je znati sljedeće:

Propozicija 11.3

Neka je A otvoren podskup prostora X a $U \subseteq A$ otvoren u A. Tada je U otvoren i u X. $\square$

Sljedeći teorem pokazuje kako je neprekidnost lokalno svojstvo preslikavanja, i vrlo je koristan.

Teorem 11.4 (Lema o lijepljenju za otvorene skupove)

Neka je $X = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$, pri čemu su U_α otvoreni podskupovi od X, a $f : X \to Y$ preslikavanje takvo da su restrikcije $f|_{U_\alpha} : U_\alpha \to Y$ neprekidne za sve $\alpha \in J$. Tada je i preslikavanje f neprekidno.

Dokaz: Neka je $V \subseteq Y$ otvoren skup. Za svaki α skup $(f|_{U_\alpha})^{-1}(V)$ je otvoren u U_α, pa je onda otvoren i u X, jer je U_α otvoren u X, a $f^{-1}(V) = \bigcup_\alpha (f|_{U_\alpha})^{-1}(V)$, pa je i on otvoren u X. $\square$

Lema o lijepljenju za otvorene skupove

Dobro je znati sljedeće:

Propozicija 11.3

Neka je A otvoren podskup prostora X a $U \subseteq A$ otvoren u A. Tada je U otvoren i u X. □

Sljedeći teorem pokazuje kako je neprekidnost lokalno svojstvo preslikavanja, i vrlo je koristan.

Teorem 11.4 (Lema o lijepljenju za otvorene skupove)

Neka je $X = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$, pri čemu su U_α otvoreni podskupovi od X, a $f\colon X \to Y$ preslikavanje takvo da su restrikcije $f|_{U_\alpha}\colon U_\alpha \to Y$ neprekidne za sve $\alpha \in J$. Tada je i preslikavanje f neprekidno.

Dokaz: Neka je $V \subseteq Y$ otvoren skup. Za svaki α skup $(f|_{U_\alpha})^{-1}(V)$ je otvoren u U_α, pa je onda otvoren i u X, jer je U_α otvoren u X, a $f^{-1}(V) = \bigcup_\alpha (f|_{U_\alpha})^{-1}(V)$, pa je i on otvoren u X. □

Lema o lijepljenju za otvorene skupove

Dobro je znati sljedeće:

Propozicija 11.3

Neka je A otvoren podskup prostora X a $U \subseteq A$ otvoren u A. Tada je U otvoren i u X. $\square$

Sljedeći teorem pokazuje kako je neprekidnost lokalno svojstvo preslikavanja, i vrlo je koristan.

Teorem 11.4 (Lema o lijepljenju za otvorene skupove)

Neka je $X = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$, pri čemu su U_α otvoreni podskupovi od X, a $f \colon X \to Y$ preslikavanje takvo da su restrikcije $f|_{U_\alpha} \colon U_\alpha \to Y$ neprekidne za sve $\alpha \in J$. Tada je i preslikavanje f neprekidno.

Dokaz: Neka je $V \subseteq Y$ otvoren skup. Za svaki α skup $(f|_{U_\alpha})^{-1}(V)$ je otvoren u U_α, pa je onda otvoren i u X, jer je U_α otvoren u X, a $f^{-1}(V) = \bigcup_\alpha (f|_{U_\alpha})^{-1}(V)$, pa je i on otvoren u X. $\square$

Lema o lijepljenju za otvorene skupove

Dobro je znati sljedeće:

Propozicija 11.3

Neka je A otvoren podskup prostora X a $U \subseteq A$ otvoren u A. Tada je U otvoren i u X. □

Sljedeći teorem pokazuje kako je neprekidnost lokalno svojstvo preslikavanja, i vrlo je koristan.

Teorem 11.4 (Lema o lijepljenju za otvorene skupove)

Neka je $X = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$, pri čemu su U_α otvoreni podskupovi od X, a $f\colon X \to Y$ preslikavanje takvo da su restrikcije $f|_{U_\alpha}\colon U_\alpha \to Y$ neprekidne za sve $\alpha \in J$. Tada je i preslikavanje f neprekidno.

Dokaz: Neka je $V \subseteq Y$ otvoren skup. Za svaki α skup $(f|_{U_\alpha})^{-1}(V)$ je otvoren u U_α, pa je onda otvoren i u X, jer je U_α otvoren u X, a $f^{-1}(V) = \bigcup_\alpha (f|_{U_\alpha})^{-1}(V)$, pa je i on otvoren u X. □

Produkt

Ravnina $\mathbb{R}^2$ je produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s topologijom koju definira bilo koja od metrika d_1, d_2 ili d_∞ iz primjera 6.4, a preslikavanje u $\mathbb{R}^2$, npr. „krivulju" $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ zadanu s $f(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, smatramo neprekidnom ako su koordinatne funkcije $t \mapsto x(t)$ i $t \mapsto y(t)$ neprekidne. To želimo poopćiti na produkt proizvoljnih topoloških prostora.

Definicija 12.1

Neka su X i Y topološki prostori s topologijama $\mathcal{T}_X$ odnosno $\mathcal{T}_Y$. *Produktna topologija* na Kartezijevom produktu $X \times Y$ je topologija koju definira baza $\mathcal{B} = \{U \times V : U \in \mathcal{T}_X,\ V \in \mathcal{T}_Y\}$.

- Primijetimo da ako su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori, onda je produktna topologija na $X \times Y$ upravo topologija generirana bilo kojom od metrika d_1, d_2 ili d_∞.

OPREZ: Skupovi oblika $U \times V$, $U \in \mathcal{T}_X$ i $V \in \mathcal{T}_Y$, *nisu jedini* otvoreni skupovi u $X \times Y$!

Produkt

Ravnina $\mathbb{R}^2$ je produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s topologijom koju definira bilo koja od metrika d_1, d_2 ili d_∞ iz primjera 6.4, a preslikavanje u $\mathbb{R}^2$, npr. „krivulju" $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ zadanu s $f(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, smatramo neprekidnom ako su koordinatne funkcije $t \mapsto x(t)$ i $t \mapsto y(t)$ neprekidne. To želimo poopćiti na produkt proizvoljnih topoloških prostora.

Definicija 12.1

Neka su X i Y topološki prostori s topologijama $\mathcal{T}_X$ odnosno $\mathcal{T}_Y$. *Produktna topologija* na Kartezijevom produktu $X \times Y$ je topologija koju definira baza $\mathcal{B} = \{U \times V : U \in \mathcal{T}_X,\ V \in \mathcal{T}_Y\}$.

- Primijetimo da ako su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori, onda je produktna topologija na $X \times Y$ upravo topologija generirana bilo kojom od metrika d_1, d_2 ili d_∞.

OPREZ: Skupovi oblika $U \times V$, $U \in \mathcal{T}_X$ i $V \in \mathcal{T}_Y$, *nisu jedini* otvoreni skupovi u $X \times Y$!

Produkt

Ravnina $\mathbb{R}^2$ je produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s topologijom koju definira bilo koja od metrika d_1, d_2 ili d_∞ iz primjera 6.4, a preslikavanje u $\mathbb{R}^2$, npr. „krivulju" $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ zadanu s $f(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, smatramo neprekidnom ako su koordinatne funkcije $t \mapsto x(t)$ i $t \mapsto y(t)$ neprekidne. To želimo poopćiti na produkt proizvoljnih topoloških prostora.

Definicija 12.1

Neka su X i Y topološki prostori s topologijama $\mathscr{T}_X$ odnosno $\mathscr{T}_Y$. *Produktna topologija* na Kartezijevom produktu $X \times Y$ je topologija koju definira baza $\mathscr{B} = \{U \times V : U \in \mathscr{T}_X,\ V \in \mathscr{T}_Y\}$.

- Primijetimo da ako su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori, onda je produktna topologija na $X \times Y$ upravo topologija generirana bilo kojom od metrika d_1, d_2 ili d_∞.

OPREZ: Skupovi oblika $U \times V$, $U \in \mathscr{T}_X$ i $V \in \mathscr{T}_Y$, *nisu jedini* otvoreni skupovi u $X \times Y$!

Produkt

Ravnina $\mathbb{R}^2$ je produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s topologijom koju definira bilo koja od metrika d_1, d_2 ili d_∞ iz primjera 6.4, a preslikavanje u $\mathbb{R}^2$, npr. „krivulju" $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ zadanu s $f(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, smatramo neprekidnom ako su koordinatne funkcije $t \mapsto x(t)$ i $t \mapsto y(t)$ neprekidne. To želimo poopćiti na produkt proizvoljnih topoloških prostora.

Definicija 12.1

Neka su X i Y topološki prostori s topologijama $\mathcal{T}_X$ odnosno $\mathcal{T}_Y$. *Produktna topologija* na Kartezijevom produktu $X \times Y$ je topologija koju definira baza $\mathcal{B} = \{U \times V : U \in \mathcal{T}_X,\ V \in \mathcal{T}_Y\}$.

- Primijetimo da ako su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori, onda je produktna topologija na $X \times Y$ upravo topologija generirana bilo kojom od metrika d_1, d_2 ili d_∞.

OPREZ: Skupovi oblika $U \times V$, $U \in \mathcal{T}_X$ i $V \in \mathcal{T}_Y$, *nisu jedini* otvoreni skupovi u $X \times Y$!

Osnovno o produktu

Osnovne činjenice o produktu dane su sljedećim teoremom:

Teorem 12.2

(*i*) *Za točku* $(x, y) \in X \times Y$ *i svaki otvoren skup* $W \subseteq X \times Y$ *t.d. je* $(x, y) \in W$, *postoje otvoreni skupovi* $U \subseteq X$ *oko* x *i* $V \subseteq Y$ *oko* y *takvi da je* $(x, y) \in U \times V \subseteq W$.

(*ii*) *Projekcije* $p_X : X \times Y \to X$ *i* $p_Y : X \times Y \to Y$ *su neprekidne.*

Dokaz: Obje tvrdnje slijede neposredno iz definicije produktne topologije. $\square$

Jasno je kako se definira produktna topologija na produktu konačnog broja topoloških prostora.

Osnovno o produktu

Osnovne činjenice o produktu dane su sljedećim teoremom:

Teorem 12.2

(*i*) *Za točku* $(x, y) \in X \times Y$ *i svaki otvoren skup* $W \subseteq X \times Y$ *t.d. je* $(x, y) \in W$, *postoje otvoreni skupovi* $U \subseteq X$ *oko* x *i* $V \subseteq Y$ *oko* y *takvi da je* $(x, y) \in U \times V \subseteq W$.

(*ii*) *Projekcije* $p_X : X \times Y \to X$ *i* $p_Y : X \times Y \to Y$ *su neprekidne.*

Dokaz: Obje tvrdnje slijede neposredno iz definicije produktne topologije. □

Jasno je kako se definira produktna topologija na produktu konačnog broja topoloških prostora.

Osnovno o produktu

Osnovne činjenice o produktu dane su sljedećim teoremom:

Teorem 12.2

(*i*) *Za točku* $(x, y) \in X \times Y$ *i svaki otvoren skup* $W \subseteq X \times Y$ *t.d. je* $(x, y) \in W$, *postoje otvoreni skupovi* $U \subseteq X$ *oko* x *i* $V \subseteq Y$ *oko* y *takvi da je* $(x, y) \in U \times V \subseteq W$.

(*ii*) *Projekcije* $p_X : X \times Y \to X$ *i* $p_Y : X \times Y \to Y$ *su neprekidne.*

Dokaz: Obje tvrdnje slijede neposredno iz definicije produktne topologije. $\square$

Jasno je kako se definira produktna topologija na produktu konačnog broja topoloških prostora.

Osnovno o produktu

Osnovne činjenice o produktu dane su sljedećim teoremom:

Teorem 12.2

(*i*) *Za točku* $(x, y) \in X \times Y$ *i svaki otvoren skup* $W \subseteq X \times Y$ *t.d. je* $(x, y) \in W$, *postoje otvoreni skupovi* $U \subseteq X$ *oko* x *i* $V \subseteq Y$ *oko* y *takvi da je* $(x, y) \in U \times V \subseteq W$.

(*ii*) *Projekcije* $p_X : X \times Y \to X$ *i* $p_Y : X \times Y \to Y$ *su neprekidne.*

Dokaz: Obje tvrdnje slijede neposredno iz definicije produktne topologije. $\square$

Jasno je kako se definira produktna topologija na produktu konačnog broja topoloških prostora.

Neprekidnost preslikavanja u produkt

Preslikavanje $f\colon Z \to X \times Y$ skupa Z u produkt $X \times Y$ definirano je parom *koordinatnih preslikavanja* $f_X\colon Z \to X$ i $f_Y\colon Z \to Y$, pa pišemo $f = (f_X, f_Y)\colon Z \to X \times Y$, tj. $f(z) = \big(f_X(z), f_Y(z)\big)$.

Osnovno svojstvo produktne topologije, i razlog zašto je definirana kako je definirana definicijom 12.1, je sljedeći teorem:

Teorem 12.3

Preslikavanje $f = (f_X, f_Y)\colon Z \to X \times Y$ je neprekidno ako i samo ako su koordinatna preslikavanja f_X i f_Y neprekidna.

Dokaz: $\Leftarrow$ Neka je $U \times V \subseteq$ bazni otvoren skup u produktu $X \times Y$, gdje su U i V otvoreni skupovi u X odnosno Y.
Tada je $f^{-1}(U \times V) = f_X^{-1}(U) \cap f_Y^{-1}(V)$ otvoren podskup od Z jer su f_X i f_Y neprekidna preslikavanja, pa je preslikavanje f neprekidno.

$\Rightarrow$ Ako je f neprekidno onda su i kompozicije $f_X = p_X \circ f$ i $f_Y = p_Y \circ f$ neprekidne.

Neprekidnost preslikavanja u produkt

Preslikavanje $f\colon Z \to X \times Y$ skupa Z u produkt $X \times Y$ definirano je parom *koordinatnih preslikavanja* $f_X\colon Z \to X$ i $f_Y\colon Z \to Y$, pa pišemo $f = (f_X, f_Y)\colon Z \to X \times Y$, tj. $f(z) = \big(f_X(z), f_Y(z)\big)$.

Osnovno svojstvo produktne topologije, i razlog zašto je definirana kako je definirana definicijom 12.1, je sljedeći teorem:

Teorem 12.3

Preslikavanje $f = (f_X, f_Y)\colon Z \to X \times Y$ je neprekidno ako i samo ako su koordinatna preslikavanja f_X i f_Y neprekidna.

Dokaz: $\Leftarrow$ Neka je $U \times V \subseteq$ bazni otvoren skup u produktu $X \times Y$, gdje su U i V otvoreni skupovi u X odnosno Y.
Tada je $f^{-1}(U \times V) = f_X^{-1}(U) \cap f_Y^{-1}(V)$ otvoren podskup od Z jer su f_X i f_Y neprekidna preslikavanja, pa je preslikavanje f neprekidno.

$\Rightarrow$ Ako je f neprekidno onda su i kompozicije $f_X = p_X \circ f$ i $f_Y = p_Y \circ f$ neprekidne.

Neprekidnost preslikavanja u produkt

Preslikavanje $f\colon Z \to X \times Y$ skupa Z u produkt $X \times Y$ definirano je parom *koordinatnih preslikavanja* $f_X\colon Z \to X$ i $f_Y\colon Z \to Y$, pa pišemo $f = (f_X, f_Y)\colon Z \to X \times Y$, tj. $f(z) = \big(f_X(z), f_Y(z)\big)$.

Osnovno svojstvo produktne topologije, i razlog zašto je definirana kako je definirana definicijom 12.1, je sljedeći teorem:

Teorem 12.3

Preslikavanje $f = (f_X, f_Y)\colon Z \to X \times Y$ je neprekidno ako i samo ako su koordinatna preslikavanja f_X i f_Y neprekidna.

Dokaz: $\Leftarrow$ Neka je $U \times V \subseteq$ bazni otvoren skup u produktu $X \times Y$, gdje su U i V otvoreni skupovi u X odnosno Y. Tada je $f^{-1}(U \times V) = f_X^{-1}(U) \cap f_Y^{-1}(V)$ otvoren podskup od Z jer su f_X i f_Y neprekidna preslikavanja, pa je preslikavanje f neprekidno.

$\Rightarrow$ Ako je f neprekidno onda su i kompozicije $f_X = p_X \circ f$ i $f_Y = p_Y \circ f$ neprekidne.

Neprekidnost preslikavanja u produkt

Preslikavanje $f\colon Z \to X \times Y$ skupa Z u produkt $X \times Y$ definirano je parom *koordinatnih preslikavanja* $f_X\colon Z \to X$ i $f_Y\colon Z \to Y$, pa pišemo $f = (f_X, f_Y)\colon Z \to X \times Y$, tj. $f(z) = \big(f_X(z), f_Y(z)\big)$.

Osnovno svojstvo produktne topologije, i razlog zašto je definirana kako je definirana definicijom 12.1, je sljedeći teorem:

Teorem 12.3

Preslikavanje $f = (f_X, f_Y)\colon Z \to X \times Y$ je neprekidno ako i samo ako su koordinatna preslikavanja f_X i f_Y neprekidna.

Dokaz: $\Leftarrow$ Neka je $U \times V \subseteq$ bazni otvoren skup u produktu $X \times Y$, gdje su U i V otvoreni skupovi u X odnosno Y.

Tada je $f^{-1}(U \times V) = f_X^{-1}(U) \cap f_Y^{-1}(V)$ otvoren podskup od Z jer su f_X i f_Y neprekidna preslikavanja, pa je preslikavanje f neprekidno.

$\Rightarrow$ Ako je f neprekidno onda su i kompozicije $f_X = p_X \circ f$ i $f_Y = p_Y \circ f$ neprekidne.

Neprekidnost preslikavanja u produkt

Preslikavanje $f\colon Z \to X \times Y$ skupa Z u produkt $X \times Y$ definirano je parom *koordinatnih preslikavanja* $f_X\colon Z \to X$ i $f_Y\colon Z \to Y$, pa pišemo $f = (f_X, f_Y)\colon Z \to X \times Y$, tj. $f(z) = \big(f_X(z), f_Y(z)\big)$.

Osnovno svojstvo produktne topologije, i razlog zašto je definirana kako je definirana definicijom 12.1, je sljedeći teorem:

Teorem 12.3

Preslikavanje $f = (f_X, f_Y)\colon Z \to X \times Y$ je neprekidno ako i samo ako su koordinatna preslikavanja f_X i f_Y neprekidna.

Dokaz: $\Leftarrow$ Neka je $U \times V \subseteq$ bazni otvoren skup u produktu $X \times Y$, gdje su U i V otvoreni skupovi u X odnosno Y.
Tada je $f^{-1}(U \times V) = f_X^{-1}(U) \cap f_Y^{-1}(V)$ otvoren podskup od Z jer su f_X i f_Y neprekidna preslikavanja, pa je preslikavanje f neprekidno.

$\Rightarrow$ Ako je f neprekidno onda su i kompozicije $f_X = p_X \circ f$ i $f_Y = p_Y \circ f$ neprekidne.

Neprekidnost preslikavanja u produkt

Preslikavanje $f\colon Z \to X \times Y$ skupa Z u produkt $X \times Y$ definirano je parom *koordinatnih preslikavanja* $f_X\colon Z \to X$ i $f_Y\colon Z \to Y$, pa pišemo $f = (f_X, f_Y)\colon Z \to X \times Y$, tj. $f(z) = \big(f_X(z), f_Y(z)\big)$.

Osnovno svojstvo produktne topologije, i razlog zašto je definirana kako je definirana definicijom 12.1, je sljedeći teorem:

Teorem 12.3

Preslikavanje $f = (f_X, f_Y)\colon Z \to X \times Y$ je neprekidno ako i samo ako su koordinatna preslikavanja f_X i f_Y neprekidna.

Dokaz: $\boxed{\Leftarrow}$ Neka je $U \times V \subseteq$ bazni otvoren skup u produktu $X \times Y$, gdje su U i V otvoreni skupovi u X odnosno Y.
Tada je $f^{-1}(U \times V) = f_X^{-1}(U) \cap f_Y^{-1}(V)$ otvoren podskup od Z jer su f_X i f_Y neprekidna preslikavanja, pa je preslikavanje f neprekidno.

$\boxed{\Rightarrow}$ Ako je f neprekidno onda su i kompozicije $f_X = p_X \circ f$ i $f_Y = p_Y \circ f$ neprekidne. $\square$

Homeomorfizam

Topološke prostore koje možemo jedan iz drugog dobiti neprekidnim deformacijama bez trganja i lijepljenja — ne razlikujemo. Točnije

Definicija 13.1

Neprekidno preslikavanje $f\colon X \to Y$ je *homeomorfizam* ako postoji neprekidno preslikavanje $g\colon Y \to X$ t.d. je $g \circ f = \mathbb{1}_X$ i $f \circ g = \mathbb{1}_Y$, a za topološke prostore kažemo da su *homeomorfni* ili *topološki ekvivalentni* ako postoji barem jedan homeomorfizam s X na Y.

Rabit ćemo i sljedeće oznake: $X \cong Y$, $f\colon X \xrightarrow{\cong} Y$

Lako se vidi: $f\colon X \to Y$ je homeomorfizam akko je f neprekidna bijekcija takva da je i inverzno preslikavanje $f^{-1}\colon Y \to X$ neprekidno.

Ekvivalentno, homeomorfizam je bijekcija f takva da je U otvoren ako i samo ako je $f(U)$ otvoren. Drugim riječima, homeomorfizam je bijekcija koja čuva topološku strukturu.

Homeomorfizam

Topološke prostore koje možemo jedan iz drugog dobiti neprekidnim deformacijama bez trganja i lijepljenja — ne razlikujemo. Točnije

Definicija 13.1

Neprekidno preslikavanje $f\colon X \to Y$ je *homeomorfizam* ako postoji neprekidno preslikavanje $g\colon Y \to X$ t.d. je $g \circ f = \mathbb{1}_X$ i $f \circ g = \mathbb{1}_Y$, a za topološke prostore kažemo da su *homeomorfni* ili *topološki ekvivalentni* ako postoji barem jedan homeomorfizam s X na Y.

Rabit ćemo i sljedeće oznake: $X \cong Y$, $f\colon X \xrightarrow{\cong} Y$

Lako se vidi: $f\colon X \to Y$ je homeomorfizam akko je f neprekidna bijekcija takva da je i inverzno preslikavanje $f^{-1}\colon Y \to X$ neprekidno.

Ekvivalentno, homeomorfizam je bijekcija f takva da je U otvoren ako i samo ako je $f(U)$ otvoren. Drugim riječima, homeomorfizam je bijekcija koja čuva topološku strukturu.

Homeomorfizam

Topološke prostore koje možemo jedan iz drugog dobiti neprekidnim deformacijama bez trganja i lijepljenja — ne razlikujemo. Točnije

Definicija 13.1

Neprekidno preslikavanje $f\colon X \to Y$ je *homeomorfizam* ako postoji neprekidno preslikavanje $g\colon Y \to X$ t.d. je $g \circ f = \mathbb{1}_X$ i $f \circ g = \mathbb{1}_Y$, a za topološke prostore kažemo da su *homeomorfni* ili *topološki ekvivalentni* ako postoji barem jedan homeomorfizam s X na Y.

Rabit ćemo i sljedeće oznake: $X \cong Y$, $f\colon X \xrightarrow{\cong} Y$

Lako se vidi: $f\colon X \to Y$ je homeomorfizam akko je f neprekidna bijekcija takva da je i inverzno preslikavanje $f^{-1}\colon Y \to X$ neprekidno.

Ekvivalentno, homeomorfizam je bijekcija f takva da je U otvoren ako i samo ako je $f(U)$ otvoren. Drugim riječima, homeomorfizam je bijekcija koja čuva topološku strukturu.

Homeomorfizam

Topološke prostore koje možemo jedan iz drugog dobiti neprekidnim deformacijama bez trganja i lijepljenja — ne razlikujemo. Točnije

Definicija 13.1

Neprekidno preslikavanje $f\colon X \to Y$ je *homeomorfizam* ako postoji neprekidno preslikavanje $g\colon Y \to X$ t.d. je $g \circ f = \mathbb{1}_X$ i $f \circ g = \mathbb{1}_Y$, a za topološke prostore kažemo da su *homeomorfni* ili *topološki ekvivalentni* ako postoji barem jedan homeomorfizam s X na Y.

Rabit ćemo i sljedeće oznake: $X \cong Y$, $f\colon X \xrightarrow{\cong} Y$

Lako se vidi: $f\colon X \to Y$ je homeomorfizam akko je f neprekidna bijekcija takva da je i inverzno preslikavanje $f^{-1}\colon Y \to X$ neprekidno.

Ekvivalentno, homeomorfizam je bijekcija f takva da je U otvoren ako i samo ako je $f(U)$ otvoren. Drugim riječima, homeomorfizam je bijekcija koja čuva topološku strukturu.

Homeomorfizam

Topološke prostore koje možemo jedan iz drugog dobiti neprekidnim deformacijama bez trganja i lijepljenja — ne razlikujemo. Točnije

Definicija 13.1

Neprekidno preslikavanje $f\colon X \to Y$ je *homeomorfizam* ako postoji neprekidno preslikavanje $g\colon Y \to X$ t.d. je $g \circ f = \mathbb{1}_X$ i $f \circ g = \mathbb{1}_Y$, a za topološke prostore kažemo da su *homeomorfni* ili *topološki ekvivalentni* ako postoji barem jedan homeomorfizam s X na Y.

Rabit ćemo i sljedeće oznake: $X \cong Y$, $f\colon X \xrightarrow{\cong} Y$

Lako se vidi: $f\colon X \to Y$ je homeomorfizam akko je f neprekidna bijekcija takva da je i inverzno preslikavanje $f^{-1}\colon Y \to X$ neprekidno.

Ekvivalentno, homeomorfizam je bijekcija f takva da je U otvoren ako i samo ako je $f(U)$ otvoren. Drugim riječima, homeomorfizam je bijekcija koja čuva topološku strukturu.

Primjeri

(a) Svaka dva otvorena intervala realnih brojeva su homeomorfna.

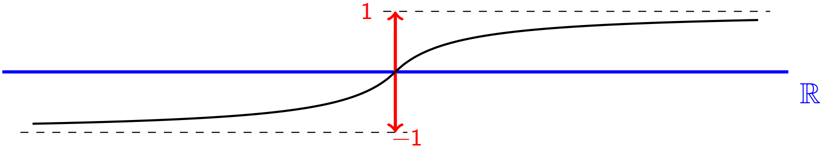
(b) Svaki otvoren interval i $\mathbb{R}$ su homeomorfni. Npr. $x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ je homeomorfizam $\mathbb{R} \to \langle -1, 1\rangle$ (inverz je $y \mapsto \frac{y}{1-|y|}$).

(c)

Primjeri

(a) Svaka dva otvorena intervala realnih brojeva su homeomorfna.

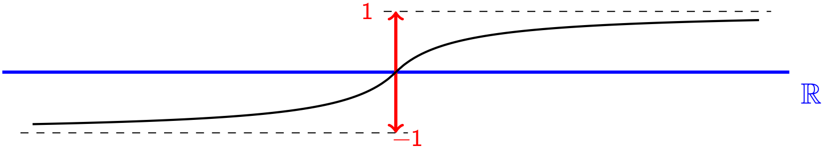
(b) Svaki otvoren interval i $\mathbb{R}$ su homeomorfni. Npr. $x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ je homeomorfizam $\mathbb{R} \to \langle -1, 1\rangle$ (inverz je $y \mapsto \frac{y}{1-|y|}$).

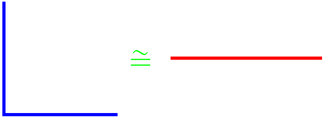


Primjeri

(a) Svaka dva otvorena intervala realnih brojeva su homeomorfna.

(b) Svaki otvoren interval i $\mathbb{R}$ su homeomorfni. Npr. $x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ je homeomorfizam $\mathbb{R} \to \langle -1, 1\rangle$ (inverz je $y \mapsto \frac{y}{1-|y|}$).

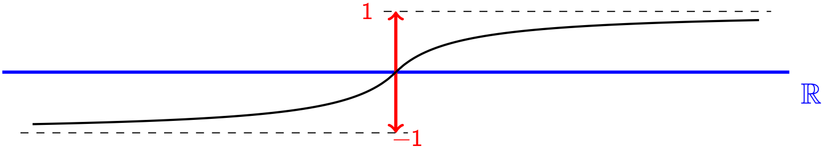


(c) 

Primjeri

(a) Svaka dva otvorena intervala realnih brojeva su homeomorfna.

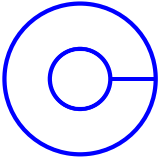
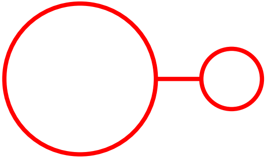
(b) Svaki otvoren interval i $\mathbb{R}$ su homeomorfni. Npr. $x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ je homeomorfizam $\mathbb{R} \to \langle -1, 1\rangle$ (inverz je $y \mapsto \frac{y}{1-|y|}$).



(c)

Primjeri

Jesu li ovi prostori homeomorfni?

(d)  $\cong$  (iako se deformacija ne može izvesti u ravnini)

(dvije kružnice spojene segmentom)

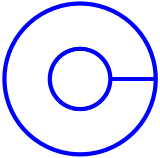
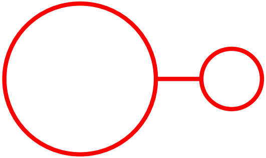
(e)

Jesu li ovi prostori homeomorfni?

A mogu li se u $\mathbb{E}^3$ deformirati jedan u drugog?

Primjeri

Jesu li ovi prostori homeomorfni?

(*d*)  $\cong$  (iako se deformacija ne može izvesti u ravnini)

(dvije kružnice spojene segmentom)

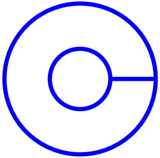
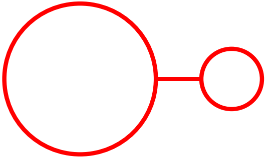
(*e*)

Jesu li ovi prostori homeomorfni?

A mogu li se u $\mathbb{E}^3$ deformirati jedan u drugi?

Primjeri

Jesu li ovi prostori homeomorfni?

(d)  $\cong$  (iako se deformacija ne može izvesti u ravnini)

(dvije kružnice spojene segmentom)

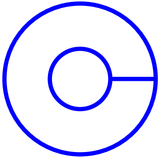
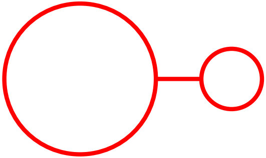
(e)  $\cong$  $\cong$ 

Jesu li ovi prostori homeomorfni?

A mogu li se u $\mathbb{E}^3$ deformirati jedan u drugog?

Primjeri

Jesu li ovi prostori homeomorfni?

(d)  $\cong$  (iako se deformacija ne može izvesti u ravnini)

(dvije kružnice spojene segmentom)

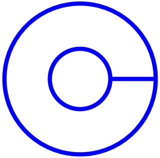
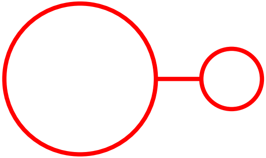
(e)  $\cong$  $\cong$ 

Jesu li ovi prostori homeomorfni?

A mogu li se u $\mathbb{E}^3$ deformirati jedan u drugog?

Primjeri

Jesu li ovi prostori homeomorfni?

(d)  $\cong$  (iako se deformacija ne može izvesti u ravnini)

(dvije kružnice spojene segmentom)

(e)  $\cong$  $\cong$ 

Jesu li ovi prostori homeomorfni?

A mogu li se u $\mathbb{E}^3$ deformirati jedan u drugog?

Homeomorfizam s grafom

Teorem 13.2

Neka je $f\colon X \to Y$ neprekidno preslikavanje topoloških prostora. Tada je graf $\Gamma_f = \big\{\big(x, f(x)\big) : x \in X\big\}$ kao potprostor produkta $X \times Y$, dakle s relativnom topologijom, homeomorfan prostoru X.

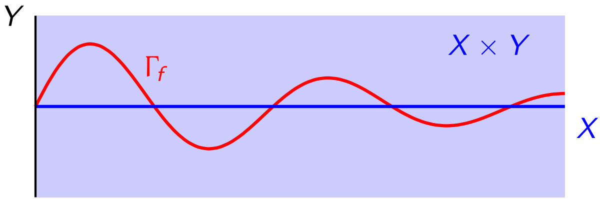
Dokaz: Preslikavanje $x \mapsto \big(x, f(x)\big)$ i restrikcija projekcije p_X na Γ_f su međusobno inverzna neprekidna preslikavanja. $\square$

Homeomorfizam s grafom

Teorem 13.2

Neka je $f\colon X \to Y$ neprekidno preslikavanje topoloških prostora. Tada je graf $\Gamma_f = \big\{\big(x, f(x)\big) : x \in X\big\}$ kao potprostor produkta $X \times Y$, dakle s relativnom topologijom, homeomorfan prostoru X.

Dokaz: Preslikavanje $x \mapsto \big(x, f(x)\big)$ i restrikcija projekcije p_X na Γ_f su međusobno inverzna neprekidna preslikavanja. $\square$



Topološka svojstva

Ako je σ neko svojstvo koje ima smisla za sve topološke prostore, i takvo je da ukoliko neki prostor ima to svojstvo onda ga imaju i svi njemu homeomorfni prostori, onda kažemo da je σ *topološko svojstvo*.

Naprimjer, „prostor se sastoji od 13 točaka" je topološko svojstvo, ali „prostor je omeđen" nije topološko svojstvo.

Biti „otvoren" također nije topološko svojstvo: skup realnih brojeva većih od 0 a manjih od 1 je otvoren u $\mathbb{R}$ ali nije otvoren u $\mathbb{C}$.

Topološka svojstva

Ako je σ neko svojstvo koje ima smisla za sve topološke prostore, i takvo je da ukoliko neki prostor ima to svojstvo onda ga imaju i svi njemu homeomorfni prostori, onda kažemo da je σ *topološko svojstvo*.

Naprimjer, „prostor se sastoji od 13 točaka” je topološko svojstvo,

ali „prostor je omeđen” nije topološko svojstvo.

Biti „otvoren” također nije topološko svojstvo: skup realnih brojeva većih od 0 a manjih od 1 je otvoren u $\mathbb{R}$ ali nije otvoren u $\mathbb{C}$.

Topološka svojstva

Ako je σ neko svojstvo koje ima smisla za sve topološke prostore, i takvo je da ukoliko neki prostor ima to svojstvo onda ga imaju i svi njemu homeomorfni prostori, onda kažemo da je σ *topološko svojstvo*.

Naprimjer, „prostor se sastoji od 13 točaka" je topološko svojstvo, ali „prostor je omeđen" nije topološko svojstvo.

Biti „otvoren" također nije topološko svojstvo: skup realnih brojeva većih od 0 a manjih od 1 je otvoren u $\mathbb{R}$ ali nije otvoren u $\mathbb{C}$.

Topološka svojstva

Ako je σ neko svojstvo koje ima smisla za sve topološke prostore, i takvo je da ukoliko neki prostor ima to svojstvo onda ga imaju i svi njemu homeomorfni prostori, onda kažemo da je σ *topološko svojstvo*.

Naprimjer, „prostor se sastoji od 13 točaka” je topološko svojstvo, ali „prostor je omeđen” nije topološko svojstvo.

Biti „otvoren” također nije topološko svojstvo: skup realnih brojeva većih od 0 a manjih od 1 je otvoren u $\mathbb{R}$ ali nije otvoren u $\mathbb{C}$.

Zatvoreni skupovi

Definicija 14.1

Za podskup F topološkog prostora X kažemo da je zatvoren ako je njegov komplement $X \setminus F$ otvoren.

Primjer 14.2 (Zatvoreni i ne-zatvoreni podskupovi od $\mathbb{R}$)

Zatvoreni skupovi

Definicija 14.1

Za podskup F topološkog prostora X kažemo da je zatvoren ako je njegov komplement $X \setminus F$ otvoren.

Primjer 14.2 (Zatvoreni i ne-zatvoreni podskupovi od $\mathbb{R}$)

Segment, tj. *zatvoren interval* $[a, b]$ je zatvoren u $\mathbb{R}$;

$[a, \infty\rangle$ je zatvoren u $\mathbb{R}$;

ali $\langle a, b\rangle$, $[a, b\rangle$, $\langle a, b]$, $\langle a, \infty\rangle$ *nisu* zatvoreni u $\mathbb{R}$;

ali $\langle -\infty, +\infty\rangle$ je zatvoren u $\mathbb{R}$; a i $\emptyset$ kao podskup od $\mathbb{R}$ je zatvoren;

$\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ su zatvoreni u $\mathbb{R}$;

ali $\mathbb{Q}$ i njegov komplement $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nisu zatvoreni u $\mathbb{R}$.

Zatvoreni skupovi

Definicija 14.1

Za podskup F topološkog prostora X kažemo da je zatvoren ako je njegov komplement $X \setminus F$ otvoren.

Primjer 14.2 (Zatvoreni i ne-zatvoreni podskupovi od $\mathbb{R}$)

Segment, tj. *zatvoren interval* $[a, b]$ je zatvoren u $\mathbb{R}$;
$[a, \infty\rangle$ je zatvoren u $\mathbb{R}$;
ali $\langle a, b\rangle$, $[a, b\rangle$, $\langle a, b]$, $\langle a, \infty\rangle$ *nisu* zatvoreni u $\mathbb{R}$;
ali $\langle -\infty, +\infty\rangle$ je zatvoren u $\mathbb{R}$; a i $\emptyset$ kao podskup od $\mathbb{R}$ je zatvoren;
$\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ su zatvoreni u $\mathbb{R}$;
ali $\mathbb{Q}$ i njegov komplement $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nisu zatvoreni u $\mathbb{R}$.

Zatvoreni skupovi

Definicija 14.1

*Za podskup F topološkog prostora X kažemo da je **zatvoren** ako je njegov komplement $X \setminus F$ otvoren.*

Primjer 14.2 (Zatvoreni i ne-zatvoreni podskupovi od $\mathbb{R}$)

Segment, tj. *zatvoren interval* $[a, b]$ je zatvoren u $\mathbb{R}$;
$[a, \infty\rangle$ je zatvoren u $\mathbb{R}$;
ali $\langle a, b\rangle$, $[a, b\rangle$, $\langle a, b]$, $\langle a, \infty\rangle$ *nisu* zatvoreni u $\mathbb{R}$;
ali $\langle -\infty, +\infty\rangle$ je zatvoren u $\mathbb{R}$; a i $\emptyset$ kao podskup od $\mathbb{R}$ je zatvoren;
$\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ su zatvoreni u $\mathbb{R}$;
ali $\mathbb{Q}$ i njegov komplement $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nisu zatvoreni u $\mathbb{R}$.

Zatvoreni skupovi

Definicija 14.1

Za podskup F topološkog prostora X kažemo da je zatvoren ako je njegov komplement $X \setminus F$ otvoren.

Primjer 14.2 (Zatvoreni i ne-zatvoreni podskupovi od $\mathbb{R}$)

Segment, tj. *zatvoren interval* $[a, b]$ je zatvoren u $\mathbb{R}$;
$[a, \infty\rangle$ je zatvoren u $\mathbb{R}$;
ali $\langle a, b\rangle$, $[a, b\rangle$, $\langle a, b]$, $\langle a, \infty\rangle$ *nisu* zatvoreni u $\mathbb{R}$;
ali $\langle -\infty, +\infty\rangle$ je zatvoren u $\mathbb{R}$; a i $\emptyset$ kao podskup od $\mathbb{R}$ je zatvoren;
$\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ su zatvoreni u $\mathbb{R}$;
ali $\mathbb{Q}$ i njegov komplement $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nisu zatvoreni u $\mathbb{R}$.

Zatvoreni skupovi

Definicija 14.1

Za podskup F topološkog prostora X kažemo da je zatvoren ako je njegov komplement $X \setminus F$ otvoren.

Primjer 14.2 (Zatvoreni i ne-zatvoreni podskupovi od $\mathbb{R}$)

Segment, tj. *zatvoren interval* $[a, b]$ je zatvoren u $\mathbb{R}$;
$[a, \infty\rangle$ je zatvoren u $\mathbb{R}$;
ali $\langle a, b\rangle$, $[a, b\rangle$, $\langle a, b]$, $\langle a, \infty\rangle$ *nisu* zatvoreni u $\mathbb{R}$;
ali $\langle -\infty, +\infty\rangle$ je zatvoren u $\mathbb{R}$; a i $\emptyset$ kao podskup od $\mathbb{R}$ je zatvoren;
$\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ su zatvoreni u $\mathbb{R}$;
ali $\mathbb{Q}$ i njegov komplement $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nisu zatvoreni u $\mathbb{R}$.

Zatvoreni skupovi

Definicija 14.1

Za podskup F topološkog prostora X kažemo da je zatvoren ako je njegov komplement $X \setminus F$ otvoren.

Primjer 14.2 (Zatvoreni i ne-zatvoreni podskupovi od $\mathbb{R}$)

Segment, tj. *zatvoren interval* $[a, b]$ je zatvoren u $\mathbb{R}$;
$[a, \infty\rangle$ je zatvoren u $\mathbb{R}$;
ali $\langle a, b\rangle$, $[a, b\rangle$, $\langle a, b]$, $\langle a, \infty\rangle$ *nisu* zatvoreni u $\mathbb{R}$;
ali $\langle -\infty, +\infty\rangle$ je zatvoren u $\mathbb{R}$; a i $\emptyset$ kao podskup od $\mathbb{R}$ je zatvoren;
$\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ su zatvoreni u $\mathbb{R}$;
ali $\mathbb{Q}$ i njegov komplement $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nisu zatvoreni u $\mathbb{R}$.

Zatvoreni skupovi

Definicija 14.1

Za podskup F topološkog prostora X kažemo da je zatvoren ako je njegov komplement $X \setminus F$ otvoren.

Primjer 14.2 (Zatvoreni i ne-zatvoreni podskupovi od $\mathbb{R}$)

Segment, tj. *zatvoren interval* $[a, b]$ je zatvoren u $\mathbb{R}$;
$[a, \infty\rangle$ je zatvoren u $\mathbb{R}$;
ali $\langle a, b\rangle$, $[a, b\rangle$, $\langle a, b]$, $\langle a, \infty\rangle$ *nisu* zatvoreni u $\mathbb{R}$;
ali $\langle -\infty, +\infty\rangle$ je zatvoren u $\mathbb{R}$; a i $\emptyset$ kao podskup od $\mathbb{R}$ je zatvoren;
$\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$ su zatvoreni u $\mathbb{R}$;
ali $\mathbb{Q}$ i njegov komplement $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nisu zatvoreni u $\mathbb{R}$.

Familija zatvorenih skupova

Kako su zatvoreni skupovi komplementi otvorenih, to, prema De Morganovim formulama, za familiju zatvorenih skupova vrijedi:

Propozicija 14.3

U svakom topološkom prostoru X

- *prazan skup $\emptyset$ i cijeli prostor X su zatvoreni;*
- *unija konačno mnogo zatvorenih skupova je zatvoren skup;*
- *presjek bilo koje familije zatvorenih skupova je zatvoren skup.*

Primjer 14.4

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ neka je $F_n = \left[\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right] \subseteq \mathbb{R}$ segment. Tada je unija $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = \langle 0, 2 \rangle$, što nije zatvoren skup u $\mathbb{R}$, iako su svi F_n zatvoreni.

Primjer 14.5

U diskretnom topološkom prostoru svaki je podskup zatvoren.

Familija zatvorenih skupova

Kako su zatvoreni skupovi komplementi otvorenih, to, prema De Morganovim formulama, za familiju zatvorenih skupova vrijedi:

Propozicija 14.3

U svakom topološkom prostoru X

- *prazan skup $\emptyset$ i cijeli prostor X su zatvoreni;*
- *unija konačno mnogo zatvorenih skupova je zatvoren skup;*
- *presjek bilo koje familije zatvorenih skupova je zatvoren skup.*

Primjer 14.4

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ neka je $F_n = \left[\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right] \subseteq \mathbb{R}$ segment. Tada je unija $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \langle 0, 2\rangle$, što nije zatvoren skup u $\mathbb{R}$, iako su svi F_n zatvoreni.

Primjer 14.5

U diskretnom topološkom prostoru svaki je podskup zatvoren.

Familija zatvorenih skupova

Kako su zatvoreni skupovi komplementi otvorenih, to, prema De Morganovim formulama, za familiju zatvorenih skupova vrijedi:

Propozicija 14.3

U svakom topološkom prostoru X

- *prazan skup $\emptyset$ i cijeli prostor X su zatvoreni;*
- *unija konačno mnogo zatvorenih skupova je zatvoren skup;*
- *presjek bilo koje familije zatvorenih skupova je zatvoren skup.*

Primjer 14.4

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ neka je $F_n = \left[\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right] \subseteq \mathbb{R}$ segment. Tada je unija $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = \langle 0, 2\rangle$, što nije zatvoren skup u $\mathbb{R}$, iako su svi F_n zatvoreni.

Primjer 14.5

U diskretnom topološkom prostoru svaki je podskup zatvoren.

Zatvoren u potprostoru. Neprekidnost

Osnovne činjenice o zatvorenim skupovima u potprostoru, kao i neprekidnost preslikavanja jezikom zatvorenih skupova, dana je ovom propozicijom:

Propozicija 14.6

Neka je A potprostor topološkog prostora X.

(i) *Podskup $F \subseteq A$ je zatvoren u A ako i samo ako postoji u X zatvoren podskup G takav da je $F = G \cap A$.*

(ii) *Ako je F zatvoren u A i A je zatvoren u X, onda je i F zatvoren u X.*

(iii) *Preslikavanje $f : X \to Y$ je neprekidno ako i samo ako je za svaki zatvoren podskup $F \subseteq Y$ praslika $f^{-1}(F)$ zatvoren podskup od X.*

Zatvoren u potprostoru. Neprekidnost

Osnovne činjenice o zatvorenim skupovima u potprostoru, kao i neprekidnost preslikavanja jezikom zatvorenih skupova, dana je ovom propozicijom:

Propozicija 14.6

Neka je A potprostor topološkog prostora X.

(i) *Podskup $F \subseteq A$ je zatvoren u A ako i samo ako postoji u X zatvoren podskup G takav da je $F = G \cap A$.*

(ii) *Ako je F zatvoren u A i A je zatvoren u X, onda je i F zatvoren u X.*

(iii) *Preslikavanje $f: X \to Y$ je neprekidno ako i samo ako je za svaki zatvoren podskup $F \subseteq Y$, praslika $f^{-1}(F)$ zatvoren podskup od X.*

Zatvoren u potprostoru. Neprekidnost

Osnovne činjenice o zatvorenim skupovima u potprostoru, kao i neprekidnost preslikavanja jezikom zatvorenih skupova, dana je ovom propozicijom:

Propozicija 14.6

Neka je A potprostor topološkog prostora X.

(i) *Podskup $F \subseteq A$ je zatvoren u A ako i samo ako postoji u X zatvoren podskup G takav da je $F = G \cap A$.*

(ii) *Ako je F zatvoren u A i A je zatvoren u X, onda je i F zatvoren u X.*

(iii) *Preslikavanje $f \colon X \to Y$ je neprekidno ako i samo ako je za svaki zatvoren podskup $F \subseteq Y$, praslika $f^{-1}(F)$ zatvoren podskup od X.*

Zatvoren u potprostoru. Neprekidnost

Osnovne činjenice o zatvorenim skupovima u potprostoru, kao i neprekidnost preslikavanja jezikom zatvorenih skupova, dana je ovom propozicijom:

Propozicija 14.6

Neka je A potprostor topološkog prostora X.

(i) *Podskup $F \subseteq A$ je zatvoren u A ako i samo ako postoji u X zatvoren podskup G takav da je $F = G \cap A$.*

(ii) *Ako je F zatvoren u A i A je zatvoren u X, onda je i F zatvoren u X.*

(iii) *Preslikavanje $f : X \to Y$ je neprekidno ako i samo ako je za svaki zatvoren podskup $F \subseteq Y$, praslika $f^{-1}(F)$ zatvoren podskup od X.*

Lema o lijepljenju za zatvorene skupove

Za razliku od neprekidnosti na uniji otvorenih skupova, teorem 11.4, analogan teorem vrijedi samo za konačne unije zatvorenih skupova.

Teorem 14.7 (Lema o lijepljenju za zatvorene skupove)

Neka je $X = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, pri čemu su A_k zatvoreni podskupovi od X, a $f\colon X \to Y$ preslikavanje takvo da su restrikcije $f|_{A_k}\colon A_k \to Y$ neprekidne za sve $k = 1, \ldots, n$.
Tada je i preslikavanje f neprekidno.

Dokaz: Neka je $G \subseteq Y$ zatvoren skup. Za svaki k skup $(f|_{A_k})^{-1}(G)$ je zatvoren u A_k, pa je onda zatvoren i u X, jer je A_k zatvoren u X, a $f^{-1}(G) = (f|_{A_1})^{-1}(G) \cup \cdots \cup (f|_{A_n})^{-1}(G)$, pa je i on zatvoren u X. □

- Tvrdnja teorema ne vrijedi ako se radi o uniji beskonačne familije zatvorenih skupova.

Lema o lijepljenju za zatvorene skupove

Za razliku od neprekidnosti na uniji otvorenih skupova, teorem 11.4, analogan teorem vrijedi samo za konačne unije zatvorenih skupova.

Teorem 14.7 (Lema o lijepljenju za zatvorene skupove)

Neka je $X = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, pri čemu su A_k zatvoreni podskupovi od X, a $f : X \to Y$ preslikavanje takvo da su restrikcije $f|_{A_k} : A_k \to Y$ neprekidne za sve $k = 1, \ldots, n$.
Tada je i preslikavanje f neprekidno.

Dokaz: Neka je $G \subseteq Y$ zatvoren skup. Za svaki k skup $(f|_{A_k})^{-1}(G)$ je zatvoren u A_k, pa je onda zatvoren i u X, jer je A_k zatvoren u X, a $f^{-1}(G) = (f|_{A_1})^{-1}(G) \cup \cdots \cup (f|_{A_n})^{-1}(G)$, pa je i on zatvoren u X. $\square$

- Tvrdnja teorema ne vrijedi ako se radi o uniji beskonačne familije zatvorenih skupova.

Lema o lijepljenju za zatvorene skupove

Za razliku od neprekidnosti na uniji otvorenih skupova, teorem 11.4, analogan teorem vrijedi samo za konačne unije zatvorenih skupova.

Teorem 14.7 (Lema o lijepljenju za zatvorene skupove)

Neka je $X = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, pri čemu su A_k zatvoreni podskupovi od X, a $f\colon X \to Y$ preslikavanje takvo da su restrikcije $f|_{A_k}\colon A_k \to Y$ neprekidne za sve $k = 1, \ldots, n$.
Tada je i preslikavanje f neprekidno.

Dokaz: Neka je $G \subseteq Y$ zatvoren skup. Za svaki k skup $(f|_{A_k})^{-1}(G)$ je zatvoren u A_k, pa je onda zatvoren i u X, jer je A_k zatvoren u X, a $f^{-1}(G) = (f|_{A_1})^{-1}(G) \cup \cdots \cup (f|_{A_n})^{-1}(G)$, pa je i on zatvoren u X. □

- Tvrdnja teorema ne vrijedi ako se radi o uniji beskonačne familije zatvorenih skupova.

Lema o lijepljenju za zatvorene skupove

Za razliku od neprekidnosti na uniji otvorenih skupova, teorem 11.4, analogan teorem vrijedi samo za konačne unije zatvorenih skupova.

Teorem 14.7 (Lema o lijepljenju za zatvorene skupove)

Neka je $X = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, pri čemu su A_k zatvoreni podskupovi od X, a $f\colon X \to Y$ preslikavanje takvo da su restrikcije $f|_{A_k}\colon A_k \to Y$ neprekidne za sve $k = 1, \ldots, n$.
Tada je i preslikavanje f neprekidno.

Dokaz: Neka je $G \subseteq Y$ zatvoren skup. Za svaki k skup $(f|_{A_k})^{-1}(G)$ je zatvoren u A_k, pa je onda zatvoren i u X, jer je A_k zatvoren u X, a $f^{-1}(G) = (f|_{A_1})^{-1}(G) \cup \cdots \cup (f|_{A_n})^{-1}(G)$, pa je i on zatvoren u X. $\square$

- Tvrdnja teorema ne vrijedi ako se radi o uniji beskonačne familije zatvorenih skupova.

Lema o lijepljenju za zatvorene skupove

Za razliku od neprekidnosti na uniji otvorenih skupova, teorem 11.4, analogan teorem vrijedi samo za konačne unije zatvorenih skupova.

Teorem 14.7 (Lema o lijepljenju za zatvorene skupove)

Neka je $X = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, pri čemu su A_k zatvoreni podskupovi od X, a $f : X \to Y$ preslikavanje takvo da su restrikcije $f|_{A_k} : A_k \to Y$ neprekidne za sve $k = 1, \ldots, n$.
Tada je i preslikavanje f neprekidno.

Dokaz: Neka je $G \subseteq Y$ zatvoren skup. Za svaki k skup $(f|_{A_k})^{-1}(G)$ je zatvoren u A_k, pa je onda zatvoren i u X, jer je A_k zatvoren u X, a $f^{-1}(G) = (f|_{A_1})^{-1}(G) \cup \cdots \cup (f|_{A_n})^{-1}(G)$, pa je i on zatvoren u X. $\square$

- Tvrdnja teorema ne vrijedi ako se radi o uniji beskonačne familije zatvorenih skupova.

Gomilište

Definicija 14.8

Neka je A podskup topološkog prostora X. Za točku $x \in X$ kažemo da je *gomilište skupa* A ako svaka okolina U točke x sadrži barem jednu točku skupa A koja je različita od točke x.
Skup svih gomilišta skupa A označivat ćemo A^d.

engleski nazivi: *limit point, cluster point, accumulation point*

Uoči da gomilište može, ali i ne mora pripadati skupu.

Napomena 14.9

Kako bismo ustanovili je li neka točka x gomilište skupa A, dovoljno je zahtjev iz definicije provjeriti za one okoline točke x koje su elementi baze topologije na X.

To za metričke prostore znači da je dovoljno da za svaki $r > 0$, kugla $K(x; r)$ sadrži barem jednu točku skupa A različitu od x.

Gomilište

Definicija 14.8

Neka je A podskup topološkog prostora X. Za točku $x \in X$ kažemo da je *gomilište skupa* A ako svaka okolina U točke x sadrži barem jednu točku skupa A koja je različita od točke x.
Skup svih gomilišta skupa A označivat ćemo A^d.

engleski nazivi: *limit point, cluster point, accumulation point*

Uoči da gomilište može, ali i ne mora pripadati skupu.

Napomena 14.9

Kako bismo ustanovili je li neka točka x gomilište skupa A, dovoljno je zahtjev iz definicije provjeriti za one okoline točke x koje su elementi baze topologije na X.

To za metričke prostore znači da je dovoljno da za svaki $r > 0$, kugla $K(x; r)$ sadrži barem jednu točku skupa A različitu od x.

Primjeri

Primjer 14.10

- U $\mathbb{R}$ su točke a i b gomilišta i od $\langle a, b\rangle$ i od $[a, b]$. Zapravo, *svaka* točka segmenta $[a, b]$ (i nikoja druga) je gomilište svakog od „intervala" $\langle a, b\rangle$, $\langle a, b]$, $[a, b\rangle$ i $[a, b]$.
- Točka 0 *nije* gomilište skupa $\{0\} \cup [2, 3] \subseteq \mathbb{R}$.
- Svaki realan broj je gomilište skupa $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.
- U $\mathbb{R}_\ell$, tj. u $\mathbb{R}$ s odozdo graničnom topologijom, b nije gomilište intervala $\langle a, b\rangle$ i $\langle a, b]$, dok a je!

OPREZ: Ako je $(x_n)_n$ niz u prostoru X, treba razlikovati *gomilište niza* od *gomilišta skupa* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, tj. *skupa vrijednosti* toga niza. Primjer: Svaki konstantan niz ima jedno gomilište, ali njegov skup vrijednosti nema niti jedno gomilište.

Primjeri

Primjer 14.10

- U $\mathbb{R}$ su točke a i b gomilišta i od $\langle a, b\rangle$ i od $[a, b]$. Zapravo, *svaka* točka segmenta $[a, b]$ (i nikoja druga) je gomilište svakog od „intervala” $\langle a, b\rangle$, $\langle a, b]$, $[a, b\rangle$ i $[a, b]$.
- Točka 0 *nije* gomilište skupa $\{0\} \cup [2, 3] \subseteq \mathbb{R}$.
- Svaki realan broj je gomilište skupa $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.
- U $\mathbb{R}_\ell$, tj. u $\mathbb{R}$ s odozdo graničnom topologijom, b nije gomilište intervala $\langle a, b\rangle$ i $\langle a, b]$, dok a je!

OPREZ: Ako je $(x_n)_n$ niz u prostoru X, treba razlikovati *gomilište niza* od *gomilišta skupa* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, tj. *skupa vrijednosti* toga niza. Primjer: Svaki konstantan niz ima jedno gomilište, ali njegov skup vrijednosti nema niti jedno gomilište.

Primjeri

Primjer 14.10

- U $\mathbb{R}$ su točke a i b gomilišta i od $\langle a, b\rangle$ i od $[a, b]$. Zapravo, *svaka* točka segmenta $[a, b]$ (i nikoja druga) je gomilište svakog od „intervala" $\langle a, b\rangle$, $\langle a, b]$, $[a, b\rangle$ i $[a, b]$.
- Točka 0 *nije* gomilište skupa $\{0\} \cup [2, 3] \subseteq \mathbb{R}$.
- Svaki realan broj je gomilište skupa $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.
- U $\mathbb{R}_\ell$, tj. u $\mathbb{R}$ s odozdo graničnom topologijom, b nije gomilište intervala $\langle a, b\rangle$ i $\langle a, b]$, dok a je!

OPREZ: Ako je $(x_n)_n$ niz u prostoru X, treba razlikovati *gomilište niza* od *gomilišta skupa* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, tj. *skupa vrijednosti* toga niza. Primjer: Svaki konstantan niz ima jedno gomilište, ali njegov skup vrijednosti nema niti jedno gomilište.

Primjeri

Primjer 14.10

- U $\mathbb{R}$ su točke a i b gomilišta i od $\langle a, b\rangle$ i od $[a, b]$. Zapravo, *svaka* točka segmenta $[a, b]$ (i nikoja druga) je gomilište svakog od „intervala" $\langle a, b\rangle$, $\langle a, b]$, $[a, b\rangle$ i $[a, b]$.
- Točka 0 *nije* gomilište skupa $\{0\} \cup [2, 3] \subseteq \mathbb{R}$.
- Svaki realan broj je gomilište skupa $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.
- U $\mathbb{R}_\ell$, tj. u $\mathbb{R}$ s odozdo graničnom topologijom, b nije gomilište intervala $\langle a, b\rangle$ i $\langle a, b]$, dok a je!

OPREZ: Ako je $(x_n)_n$ niz u prostoru X, treba razlikovati *gomilište niza* od *gomilišta skupa* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, tj. *skupa vrijednosti* toga niza.
Primjer: Svaki konstantan niz ima jedno gomilište, ali njegov skup vrijednosti nema niti jedno gomilište.

Primjeri

Primjer 14.10

- U $\mathbb{R}$ su točke a i b gomilišta i od $\langle a, b\rangle$ i od $[a, b]$. Zapravo, *svaka* točka segmenta $[a, b]$ (i nikoja druga) je gomilište svakog od „intervala" $\langle a, b\rangle$, $\langle a, b]$, $[a, b\rangle$ i $[a, b]$.
- Točka 0 *nije* gomilište skupa $\{0\} \cup [2, 3] \subseteq \mathbb{R}$.
- Svaki realan broj je gomilište skupa $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.
- U $\mathbb{R}_\ell$, tj. u $\mathbb{R}$ s odozdo graničnom topologijom, b nije gomilište intervala $\langle a, b\rangle$ i $\langle a, b]$, dok a je!

OPREZ: Ako je $(x_n)_n$ niz u prostoru X, treba razlikovati *gomilište niza* od *gomilišta skupa* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, tj. *skupa vrijednosti* toga niza.
Primjer: Svaki konstantan niz ima jedno gomilište, ali njegov skup vrijednosti nema niti jedno gomilište.

Zatvorenje skupa

Definicija 14.11

Neka je A podskup topološkog prostora X. Presjek svih zatvorenih skupova koji sadrže A naziva se *zatvorenje* skupa A, oznaka $\overline{A}$ ili $\mathrm{Cl}\,A$. Drugim riječima, $\overline{A}$ je najmanji zatvoren skup koji sadrži A.

Primjer 14.12

Zatvorenje skupa

Definicija 14.11

Neka je A podskup topološkog prostora X. Presjek svih zatvorenih skupova koji sadrže A naziva se *zatvorenje* skupa A, oznaka $\overline{A}$ ili $\mathrm{Cl}\,A$. Drugim riječima, $\overline{A}$ je najmanji zatvoren skup koji sadrži A.

Primjer 14.12

- U $\mathbb{R}$ sa standardnom, tj. euklidskom topologijom je $\overline{\langle a, b\rangle} = [a, b]$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\overline{\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}} = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$
- ali s diskretnom topologijom je $\overline{A} = A$ za svaki $A \subseteq \mathbb{R}$.
- U $\mathbb{R}_\ell$ je $\overline{\langle a, b]} = [a, b]$, ali je $\overline{[a, b\rangle} = [a, b\rangle = \overline{\langle a, b\rangle}$.

Zatvorenje skupa

Definicija 14.11

Neka je A podskup topološkog prostora X. Presjek svih zatvorenih skupova koji sadrže A naziva se *zatvorenje* skupa A, oznaka $\overline{A}$ ili $\mathrm{Cl}\, A$. Drugim riječima, $\overline{A}$ je najmanji zatvoren skup koji sadrži A.

Primjer 14.12

- U $\mathbb{R}$ sa standardnom, tj. euklidskom topologijom je $\overline{\langle a, b\rangle} = [a, b]$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\overline{\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}} = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$
- ali s diskretnom topologijom je $\overline{A} = A$ za svaki $A \subseteq \mathbb{R}$.
- U $\mathbb{R}_\ell$ je $\overline{\langle a, b]} = [a, b]$, ali je $\overline{[a, b\rangle} = [a, b\rangle = \overline{\langle a, b\rangle}$.

Zatvorenje skupa

Definicija 14.11

Neka je A podskup topološkog prostora X. Presjek svih zatvorenih skupova koji sadrže A naziva se *zatvorenje* skupa A, oznaka $\overline{A}$ ili $\mathrm{Cl}\, A$. Drugim riječima, $\overline{A}$ je najmanji zatvoren skup koji sadrži A.

Primjer 14.12

- U $\mathbb{R}$ sa standardnom, tj. euklidskom topologijom je $\overline{\langle a, b\rangle} = [a, b]$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\overline{\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}} = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$
- ali s diskretnom topologijom je $\overline{A} = A$ za svaki $A \subseteq \mathbb{R}$.
- U $\mathbb{R}_\ell$ je $\overline{\langle a, b]} = [a, b]$, ali je $\overline{[a, b\rangle} = [a, b\rangle = \overline{\langle a, b\rangle}$.

Zatvorenje kugli u metričkim prostorima

Zatvorenje kugli $K(x;r) = \{x' \in \mathbb{R}^n : d(x', x) < r\}$ u $\mathbb{R}^n$ je jednostavno:

$$\overline{K(x;r)} = \{x' \in \mathbb{R}^n : d(x', x) \leqslant r\},$$

i to za svaku od metrika d_1, d_2 i d_∞.

Stoga je lako pomisliti da tako vrijedi i općenito. Ali:

Primjer 14.13

ZATO OPREZ!

Zatvorenje kugli u metričkim prostorima

Zatvorenje kugli $K(x;r) = \{x' \in \mathbb{R}^n : d(x',x) < r\}$ u $\mathbb{R}^n$ je jednostavno:

$$\overline{K(x;r)} = \{x' \in \mathbb{R}^n : d(x',x) \leqslant r\},$$

i to za svaku od metrika d_1, d_2 i d_∞.

Stoga je lako pomisliti da tako vrijedi i općenito. Ali:

Primjer 14.13

- Zatvorenje kugle $K(x;1)$ u diskretnom metričkom prostoru (X,δ) jednako je $\{x\}$, dok je $\{x' \in X : \delta(x',x) \leqslant 1\} = X$.
- Zatvorenje „kugle” $K(1;1)$ u potprostoru
$$X = [0,1] \cup [2,3] \subseteq \mathbb{R}$$
je $[0,1]$, dok je $\{x \in X : |x-1| \leqslant 1\} = [0,1] \cup \{2\}$.

ZATO OPREZ!

Zatvorenje kugli u metričkim prostorima

Zatvorenje kugli $K(x;r) = \{x' \in \mathbb{R}^n : d(x',x) < r\}$ u $\mathbb{R}^n$ je jednostavno:

$$\overline{K(x;r)} = \{x' \in \mathbb{R}^n : d(x',x) \leqslant r\},$$

i to za svaku od metrika d_1, d_2 i d_∞.

Stoga je lako pomisliti da tako vrijedi i općenito. Ali:

Primjer 14.13

- Zatvorenje kugle $K(x;1)$ u diskretnom metričkom prostoru (X, δ) jednako je $\{x\}$, dok je $\{x' \in X : \delta(x',x) \leqslant 1\} = X$.
- Zatvorenje „kugle" $K(1;1)$ u potprostoru
$$X = [0,1] \cup [2,3] \subseteq \mathbb{R}$$
je $[0,1]$, dok je $\{x \in X : |x-1| \leqslant 1\} = [0,1] \cup \{2\}$.

ZATO OPREZ!

Zatvorenje kugli u metričkim prostorima

Zatvorenje kugli $K(x;r) = \{x' \in \mathbb{R}^n : d(x',x) < r\}$ u $\mathbb{R}^n$ je jednostavno:

$$\overline{K(x;r)} = \{x' \in \mathbb{R}^n : d(x',x) \leqslant r\},$$

i to za svaku od metrika d_1, d_2 i d_∞.

Stoga je lako pomisliti da tako vrijedi i općenito. Ali:

Primjer 14.13

- Zatvorenje kugle $K(x;1)$ u diskretnom metričkom prostoru (X,δ) jednako je $\{x\}$, dok je $\{x' \in X : \delta(x',x) \leqslant 1\} = X$.
- Zatvorenje „kugle” $K(1;1)$ u potprostoru
$$X = [0,1] \cup [2,3] \subseteq \mathbb{R}$$
je $[0,1]$, dok je $\{x \in X : |x-1| \leqslant 1\} = [0,1] \cup \{2\}$.

ZATO OPREZ !

Još o zatvorenju kugli u metričkim prostorima

Ipak, jedna od inkluzija vrijedi uvijek:

Propozicija 14.14

U svakom metričkom prostoru X je $\overline{K(a;r)} \subseteq \{x : d(x,a) \leqslant r\}$.

Dokaz: Prema korolaru 6.28 je funkcija $\rho\colon X \to \mathbb{R}$ definirana s $\rho(x) := d(x,a)$ neprekidna, a kako je skup $[0,r] \subseteq \mathbb{R}$ zatvoren, zbog neprekidnosti je i skup $\{x : d(x,a) \leqslant r\} = \rho^{-1}([0,r])$ zatvoren, a jer sadrži $K(a;r) = \rho^{-1}([0,r\rangle)$, sadrži i $\overline{K(a;r)}$. $\square$

Alternativni dokaz: Za $d(x,a) > r$ je kugla $K = K(x; d(x,a) - r)$ otvoren skup koji ne siječe $K(a;r)$, pa $x \notin \overline{K(a;r)}$ prema teoremu 14.17, ili zbog činjenice da je skup $X \setminus K$ zatvoren, sadrži $K(a;r)$ pa sadrži i $\overline{K(a;r)}$, ali ne sadrži točku x.

Još o zatvorenju kugli u metričkim prostorima

Ipak, jedna od inkluzija vrijedi uvijek:

Propozicija 14.14

U svakom metričkom prostoru X je $\overline{K(a;r)} \subseteq \{x : d(x,a) \leqslant r\}$.

Dokaz: Prema korolaru 6.28 je funkcija $\rho \colon X \to \mathbb{R}$ definirana s $\rho(x) := d(x,a)$ neprekidna, a kako je skup $[0,r] \subseteq \mathbb{R}$ zatvoren, zbog neprekidnosti je i skup $\{x : d(x,a) \leqslant r\} = \rho^{-1}\big([0,r]\big)$ zatvoren, a jer sadrži $K(a;r) = \rho^{-1}\big([0,r\rangle\big)$, sadrži i $\overline{K(a;r)}$. $\square$

Alternativni dokaz: Za $d(x,a) > r$ je kugla $K = K\big(x; d(x,a) - r\big)$ otvoren skup koji ne siječe $K(a;r)$, pa $x \notin \overline{K(a;r)}$ prema teoremu 14.17, ili zbog činjenice da je skup $X \setminus K$ zatvoren, sadrži $K(a;r)$ pa sadrži i $\overline{K(a;r)}$, ali ne sadrži točku x.

Još o zatvorenju kugli u metričkim prostorima

Ipak, jedna od inkluzija vrijedi uvijek:

Propozicija 14.14

U svakom metričkom prostoru X je $\overline{K(a;r)} \subseteq \{x : d(x,a) \leqslant r\}$.

Dokaz: Prema korolaru 6.28 je funkcija $\rho\colon X \to \mathbb{R}$ definirana s $\rho(x) := d(x,a)$ neprekidna, a kako je skup $[0,r] \subseteq \mathbb{R}$ zatvoren, zbog neprekidnosti je i skup $\{x : d(x,a) \leqslant r\} = \rho^{-1}\big([0,r]\big)$ zatvoren, a jer sadrži $K(a;r) = \rho^{-1}\big([0,r\rangle\big)$, sadrži i $\overline{K(a;r)}$. $\square$

Alternativni dokaz: Za $d(x,a) > r$ je kugla $K = K\big(x; d(x,a) - r\big)$ otvoren skup koji ne siječe $K(a;r)$, pa $x \notin \overline{K(a;r)}$ prema teoremu 14.17, ili zbog činjenice da je skup $X \setminus K$ zatvoren, sadrži $K(a;r)$ pa sadrži i $\overline{K(a;r)}$, ali ne sadrži točku x.

Zatvorenje u potprostoru

Zatvorenje nekog skupa ovisi o tome u kojem prostoru skup promatramo.

Primjer 14.15

- Zatvorenje intervala $\langle 0, 1\rangle$ u $\mathbb{R}$ je $[0, 1]$, ali
- zatvorenje istog intervala $\langle 0,1\rangle$ u potprostoru $\langle 0, \infty\rangle \subseteq \mathbb{R}$ je $\langle 0, 1]$.
- Zatvorenje skupa $\mathbb{Q}$ u $\mathbb{R}$ je $\mathbb{R}$, ali
- zatvorenje skupa $\mathbb{Q}$ u potprostoru $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ je $\mathbb{Q}$.

DOGOVOR: Kada je $A \subseteq Y \subseteq X$ rabit ćemo oznake $\mathrm{Cl}_X A$, $\mathrm{Cl}_Y A$ i sl. kako bi bilo jasno u kojem se prostoru vrši zatvorenje. Dogovorno ćemo oznaku $\overline{A}$ rabiti *isključivo* kada se radi o zatvorenju s obzirom na čitav prostor. Dakle, $\overline{A} = \mathrm{Cl}_X A$. Uvijek!

Propozicija 14.16

Za $A \subseteq Y \subseteq X$ je $\mathrm{Cl}_Y A = \overline{A} \cap Y$, tj. $\mathrm{Cl}_Y A = (\mathrm{Cl}_X A) \cap Y$.

Zatvorenje u potprostoru

Zatvorenje nekog skupa ovisi o tome u kojem prostoru skup promatramo.

Primjer 14.15

- Zatvorenje intervala $\langle 0, 1\rangle$ u $\mathbb{R}$ je $[0, 1]$, ali
- zatvorenje istog intervala $\langle 0,1\rangle$ u potprostoru $\langle 0, \infty\rangle \subseteq \mathbb{R}$ je $\langle 0, 1]$.
- Zatvorenje skupa $\mathbb{Q}$ u $\mathbb{R}$ je $\mathbb{R}$, ali
- zatvorenje skupa $\mathbb{Q}$ u potprostoru $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ je $\mathbb{Q}$.

DOGOVOR: Kada je $A \subseteq Y \subseteq X$ rabit ćemo oznake $\mathrm{Cl}_X\, A$, $\mathrm{Cl}_Y\, A$ i sl. kako bi bilo jasno u kojem se prostoru vrši zatvorenje. Dogovorno ćemo oznaku $\overline{A}$ rabiti *isključivo* kada se radi o zatvorenju s obzirom na čitav prostor. Dakle, $\overline{A} = \mathrm{Cl}_X\, A$. Uvijek!

Propozicija 14.16

Za $A \subseteq Y \subseteq X$ je $\mathrm{Cl}_Y\, A = \overline{A} \cap Y$, tj. $\mathrm{Cl}_Y\, A = (\mathrm{Cl}_X\, A) \cap Y$.

Zatvorenje u potprostoru

Zatvorenje nekog skupa ovisi o tome u kojem prostoru skup promatramo.

Primjer 14.15

- Zatvorenje intervala $\langle 0,1\rangle$ u $\mathbb{R}$ je $[0,1]$, ali
- zatvorenje istog intervala $\langle 0,1\rangle$ u potprostoru $\langle 0,\infty\rangle \subseteq \mathbb{R}$ je $\langle 0,1]$.
- Zatvorenje skupa $\mathbb{Q}$ u $\mathbb{R}$ je $\mathbb{R}$, ali
- zatvorenje skupa $\mathbb{Q}$ u potprostoru $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ je $\mathbb{Q}$.

DOGOVOR: Kada je $A \subseteq Y \subseteq X$ rabit ćemo oznake $\mathrm{Cl}_X A$, $\mathrm{Cl}_Y A$ i sl. kako bi bilo jasno u kojem se prostoru vrši zatvorenje. Dogovorno ćemo oznaku $\overline{A}$ rabiti *isključivo* kada se radi o zatvorenju s obzirom na čitav prostor. Dakle, $\overline{A} = \mathrm{Cl}_X A$. Uvijek!

Propozicija 14.16

Za $A \subseteq Y \subseteq X$ je $\mathrm{Cl}_Y A = \overline{A} \cap Y$, tj. $\mathrm{Cl}_Y A = (\mathrm{Cl}_X A) \cap Y$.

Zatvorenje u potprostoru

Zatvorenje nekog skupa ovisi o tome u kojem prostoru skup promatramo.

Primjer 14.15

- Zatvorenje intervala $\langle 0, 1\rangle$ u $\mathbb{R}$ je $[0, 1]$, ali
- zatvorenje istog intervala $\langle 0,1\rangle$ u potprostoru $\langle 0, \infty\rangle \subseteq \mathbb{R}$ je $\langle 0, 1]$.
- Zatvorenje skupa $\mathbb{Q}$ u $\mathbb{R}$ je $\mathbb{R}$, ali
- zatvorenje skupa $\mathbb{Q}$ u potprostoru $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ je $\mathbb{Q}$.

DOGOVOR: Kada je $A \subseteq Y \subseteq X$ rabit ćemo oznake $\mathrm{Cl}_X A$, $\mathrm{Cl}_Y A$ i sl. kako bi bilo jasno u kojem se prostoru vrši zatvorenje. Dogovorno ćemo oznaku $\overline{A}$ rabiti *isključivo* kada se radi o zatvorenju s obzirom na čitav prostor. Dakle, $\overline{A} = \mathrm{Cl}_X A$. Uvijek!

Propozicija 14.16

Za $A \subseteq Y \subseteq X$ je $\mathrm{Cl}_Y A = \overline{A} \cap Y$, tj. $\mathrm{Cl}_Y A = (\mathrm{Cl}_X A) \cap Y$.

Zatvorenje u potprostoru

Zatvorenje nekog skupa ovisi o tome u kojem prostoru skup promatramo.

Primjer 14.15

- Zatvorenje intervala $\langle 0,1\rangle$ u $\mathbb{R}$ je $[0,1]$, ali
- zatvorenje istog intervala $\langle 0,1\rangle$ u potprostoru $\langle 0,\infty\rangle \subseteq \mathbb{R}$ je $\langle 0,1]$.
- Zatvorenje skupa $\mathbb{Q}$ u $\mathbb{R}$ je $\mathbb{R}$, ali
- zatvorenje skupa $\mathbb{Q}$ u potprostoru $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ je $\mathbb{Q}$.

DOGOVOR: Kada je $A \subseteq Y \subseteq X$ rabit ćemo oznake $\mathrm{Cl}_X A$, $\mathrm{Cl}_Y A$ i sl. kako bi bilo jasno u kojem se prostoru vrši zatvorenje. Dogovorno ćemo oznaku $\overline{A}$ rabiti *isključivo* kada se radi o zatvorenju s obzirom na čitav prostor. Dakle, $\overline{A} = \mathrm{Cl}_X A$. Uvijek!

Propozicija 14.16

Za $A \subseteq Y \subseteq X$ je $\mathrm{Cl}_Y A = \overline{A} \cap Y$, tj. $\mathrm{Cl}_Y A = (\mathrm{Cl}_X A) \cap Y$.

Zatvorenje u potprostoru

Zatvorenje nekog skupa ovisi o tome u kojem prostoru skup promatramo.

Primjer 14.15

- Zatvorenje intervala $\langle 0, 1\rangle$ u $\mathbb{R}$ je $[0, 1]$, ali
- zatvorenje istog intervala $\langle 0,1\rangle$ u potprostoru $\langle 0, \infty\rangle \subseteq \mathbb{R}$ je $\langle 0, 1]$.
- Zatvorenje skupa $\mathbb{Q}$ u $\mathbb{R}$ je $\mathbb{R}$, ali
- zatvorenje skupa $\mathbb{Q}$ u potprostoru $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ je $\mathbb{Q}$.

DOGOVOR: Kada je $A \subseteq Y \subseteq X$ rabit ćemo oznake $\mathrm{Cl}_X A$, $\mathrm{Cl}_Y A$ i sl. kako bi bilo jasno u kojem se prostoru vrši zatvorenje. Dogovorno ćemo oznaku $\overline{A}$ rabiti *isključivo* kada se radi o zatvorenju s obzirom na čitav prostor. Dakle, $\overline{A} \equiv \mathrm{Cl}_X A$. Uvijek !

Propozicija 14.16

Za $A \subseteq Y \subseteq X$ je $\mathrm{Cl}_Y A = \overline{A} \cap Y$, tj. $\mathrm{Cl}_Y A = (\mathrm{Cl}_X A) \cap Y$.

Zatvorenje u potprostoru

Zatvorenje nekog skupa ovisi o tome u kojem prostoru skup promatramo.

Primjer 14.15

- Zatvorenje intervala $\langle 0,1\rangle$ u $\mathbb{R}$ je $[0,1]$, ali
- zatvorenje istog intervala $\langle 0,1\rangle$ u potprostoru $\langle 0,\infty\rangle \subseteq \mathbb{R}$ je $\langle 0,1]$.
- Zatvorenje skupa $\mathbb{Q}$ u $\mathbb{R}$ je $\mathbb{R}$, ali
- zatvorenje skupa $\mathbb{Q}$ u potprostoru $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ je $\mathbb{Q}$.

DOGOVOR: Kada je $A \subseteq Y \subseteq X$ rabit ćemo oznake $\mathrm{Cl}_X\, A$, $\mathrm{Cl}_Y\, A$ i sl. kako bi bilo jasno u kojem se prostoru vrši zatvorenje. Dogovorno ćemo oznaku $\overline{A}$ rabiti *isključivo* kada se radi o zatvorenju s obzirom na čitav prostor. Dakle, $\overline{A} \equiv \mathrm{Cl}_X\, A$. Uvijek !

Propozicija 14.16

Za $A \subseteq Y \subseteq X$ je $\mathrm{Cl}_Y\, A = \overline{A} \cap Y$, tj. $\mathrm{Cl}_Y\, A = (\mathrm{Cl}_X\, A) \cap Y$.

Zatvorenje i supremum

Evo jedne korisne karakterizacije zatvorenja:

Teorem 14.17

Točka x pripada zatvorenju skupa A, tj. $x \in \overline{A}$, ako i samo ako svaka okolina točke x siječe A.

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka je $x \in \overline{A}$ i pretpostavimo da postoji okolina $U \ni x$ koja ne siječe A. Tada je $X \setminus U$ zatvoren skup koji sadrži A i ne sadrži x, pa $x \notin \overline{A}$. $\Rightarrow\Leftarrow$

$\Leftarrow$ Neka je $x \in X$ takva točka da svaka okolina $U \ni x$ siječe A, i pretpostavimo da $x \notin \overline{A}$. To znači da postoji zatvoren skup $F \subseteq X$ t.d. je $A \subseteq F$ i $x \notin F$. No tada je $X \setminus F$ otvoren skup koji sadrži točku x a ne siječe A. $\Rightarrow\Leftarrow$ $\square$

Posljedica 14.18

Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ neprazan odozgo omeđen skup. Tada je $\sup A \in \overline{A}$.

Zatvorenje i supremum

Evo jedne korisne karakterizacije zatvorenja:

Teorem 14.17

Točka x pripada zatvorenju skupa A, tj. $x \in \overline{A}$, ako i samo ako svaka okolina točke x siječe A.

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $x \in \overline{A}$ i pretpostavimo da postoji okolina $U \ni x$ koja ne siječe A. Tada je $X \setminus U$ zatvoren skup koji sadrži A i ne sadrži x, pa $x \notin \overline{A}$. $\Rightarrow\Leftarrow$

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka je $x \in X$ takva točka da svaka okolina $U \ni x$ siječe A, i pretpostavimo da $x \notin \overline{A}$. To znači da postoji zatvoren skup $F \subseteq X$ t.d. je $A \subseteq F$ i $x \notin F$. No tada je $X \setminus F$ otvoren skup koji sadrži točku x a ne siječe A. $\Rightarrow\Leftarrow$ $\square$

Posljedica 14.18

Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ neprazan odozgo omeđen skup. Tada je $\sup A \in \overline{A}$.

Zatvorenje i supremum

Evo jedne korisne karakterizacije zatvorenja:

Teorem 14.17

Točka x pripada zatvorenju skupa A, tj. $x \in \overline{A}$, ako i samo ako svaka okolina točke x siječe A.

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $x \in \overline{A}$ i pretpostavimo da postoji okolina $U \ni x$ koja ne siječe A. Tada je $X \setminus U$ zatvoren skup koji sadrži A i ne sadrži x, pa $x \notin \overline{A}$. $\Rightarrow\!\!\!\times\!\!\!\Leftarrow$

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka je $x \in X$ takva točka da svaka okolina $U \ni x$ siječe A, i pretpostavimo da $x \notin \overline{A}$. To znači da postoji zatvoren skup $F \subseteq X$ t.d. je $A \subseteq F$ i $x \notin F$. No tada je $X \setminus F$ otvoren skup koji sadrži točku x a ne siječe A. $\Rightarrow\!\!\!\times\!\!\!\Leftarrow$ $\square$

Posljedica 14.18

Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ neprazan odozgo omeđen skup. Tada je $\sup A \in \overline{A}$.

Zatvorenje i supremum

Evo jedne korisne karakterizacije zatvorenja:

Teorem 14.17

Točka x pripada zatvorenju skupa A, tj. $x \in \overline{A}$, ako i samo ako svaka okolina točke x siječe A.

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $x \in \overline{A}$ i pretpostavimo da postoji okolina $U \ni x$ koja ne siječe A. Tada je $X \setminus U$ zatvoren skup koji sadrži A i ne sadrži x, pa $x \notin \overline{A}$. $\Rightarrow\!\Leftarrow$

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka je $x \in X$ takva točka da svaka okolina $U \ni x$ siječe A, i pretpostavimo da $x \notin \overline{A}$. To znači da postoji zatvoren skup $F \subseteq X$ t.d. je $A \subseteq F$ i $x \notin F$. No tada je $X \setminus F$ otvoren skup koji sadrži točku x a ne siječe A. $\Rightarrow\!\Leftarrow$ $\square$

Posljedica 14.18

Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ neprazan odozgo omeđen skup. Tada je $\sup A \in \overline{A}$.

Zatvorenje i supremum

Evo jedne korisne karakterizacije zatvorenja:

Teorem 14.17

Točka x pripada zatvorenju skupa A, tj. $x \in \overline{A}$, ako i samo ako svaka okolina točke x siječe A.

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka je $x \in \overline{A}$ i pretpostavimo da postoji okolina $U \ni x$ koja ne siječe A. Tada je $X \setminus U$ zatvoren skup koji sadrži A i ne sadrži x, pa $x \notin \overline{A}$. $\Rightarrow\!\Leftarrow$

$\Leftarrow$ Neka je $x \in X$ takva točka da svaka okolina $U \ni x$ siječe A, i pretpostavimo da $x \notin \overline{A}$. To znači da postoji zatvoren skup $F \subseteq X$ t.d. je $A \subseteq F$ i $x \notin F$. No tada je $X \setminus F$ otvoren skup koji sadrži točku x a ne siječe A. $\Rightarrow\!\Leftarrow$ $\square$

Posljedica 14.18

Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ neprazan odozgo omeđen skup. Tada je $\sup A \in \overline{A}$.

Zatvorenje u metričkim prostorima

Sljedeća karakterizacija zatvorenja u metričkim prostorima potkrepljuje intuiciju.

Teorem 14.19

Neka je A podskup metričkog prostora (X, d). Točka x pripada zatvorenju $\overline{A}$ ako i samo ako je $d(x, A) = 0$.

Dokaz: $\Rightarrow$ Ako je $x \in \overline{A}$ onda prema teoremu 14.17 svaka okolina točke x siječe skup A. Specijalno, za svaki $\varepsilon > 0$ je $K(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, tj. postoji $a \in A$ t.d. je $d(a, x) < \varepsilon$, pa je $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(a, x) = 0$.
$\Leftarrow$ Ako je $d(x, A) = 0$ onda u svakoj kugli $K(x; r)$ postoje točke skupa A, pa je $x \in \overline{A}$, prema teoremu 14.17. $\square$

Zatvorenje u metričkim prostorima

Sljedeća karakterizacija zatvorenja u metričkim prostorima potkrepljuje intuiciju.

Teorem 14.19

Neka je A podskup metričkog prostora (X, d). Točka x pripada zatvorenju $\overline{A}$ ako i samo ako je $d(x, A) = 0$.

Dokaz: $\Rightarrow$ Ako je $x \in \overline{A}$ onda prema teoremu 14.17 svaka okolina točke x siječe skup A. Specijalno, za svaki $\varepsilon > 0$ je $K(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, tj. postoji $a \in A$ t.d. je $d(a, x) < \varepsilon$, pa je $d(x, A) = \inf_{a\in A} d(a, x) = 0$.

$\Leftarrow$ Ako je $d(x, A) = 0$ onda u svakoj kugli $K(x; r)$ postoje točke skupa A, pa je $x \in \overline{A}$, prema teoremu 14.17. $\square$

Zatvorenje u metričkim prostorima

Sljedeća karakterizacija zatvorenja u metričkim prostorima potkrepljuje intuiciju.

Teorem 14.19

Neka je A podskup metričkog prostora (X, d). Točka x pripada zatvorenju $\overline{A}$ ako i samo ako je $d(x, A) = 0$.

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Ako je $x \in \overline{A}$ onda prema teoremu 14.17 svaka okolina točke x siječe skup A. Specijalno, za svaki $\varepsilon > 0$ je $K(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, tj. postoji $a \in A$ t.d. je $d(a, x) < \varepsilon$, pa je $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(a, x) = 0$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Ako je $d(x, A) = 0$ onda u svakoj kugli $K(x; r)$ postoje točke skupa A, pa je $x \in \overline{A}$, prema teoremu 14.17. $\square$

Svojstva zatvorenja

Osnovna svojstva zatvorenja opisana su sljedećim teoremom:

Teorem 14.20

Neka je X topološki prostor, A i B proizvoljni podskupovi.

(i) $\overline{A}$ *je zatvoren i* $A \subseteq \overline{A}$;

(ii) A *je zatvoren ako i samo ako je* $\overline{A} = A$;

(iii) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, *tj.* $\mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}\,A) = \mathrm{Cl}\,A$;

(iv) *ako je* $A \subseteq B$ *onda je* $\overline{A} \subseteq \overline{B}$;

(v) $\overline{A} = A \cup A^d$.

Dokaz: Jedina netrivijalna tvrdnja je (v). Neka je $x \in \overline{A}$ i neka je $U \ni x$ proizvoljna okolina. Prema teoremu 14.17 je $U \cap A \neq \emptyset$, pa ili je $x \in A$ ili U sadrži točku iz A različitu od x, te je $x \in A^d$. Obratno, ili je $x \in A^d$ pa svaka okolina od x sadrži točku iz A (čak različitu od x), te je po teoremu 14.17 $x \in \overline{A}$, ili je $x \in A \subseteq \overline{A}$. □

Svojstva zatvorenja

Osnovna svojstva zatvorenja opisana su sljedećim teoremom:

Teorem 14.20

Neka je X topološki prostor, A i B proizvoljni podskupovi.

(i) $\overline{A}$ *je zatvoren i* $A \subseteq \overline{A}$;

(ii) A *je zatvoren ako i samo ako je* $\overline{A} = A$;

(iii) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, *tj.* $\mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}\, A) = \mathrm{Cl}\, A$;

(iv) *ako je* $A \subseteq B$ *onda je* $\overline{A} \subseteq \overline{B}$;

(v) $\overline{A} = A \cup A^d$.

Dokaz: Jedina netrivijalna tvrdnja je (v). Neka je $x \in \overline{A}$ i neka je $U \ni x$ proizvoljna okolina. Prema teoremu 14.17 je $U \cap A \neq \emptyset$, pa ili je $x \in A$ ili U sadrži točku iz A različitu od x, te je $x \in A^d$. Obratno, ili je $x \in A^d$ pa svaka okolina od x sadrži točku iz A (čak različitu od x), te je po teoremu 14.17 $x \in \overline{A}$, ili je $x \in A \subseteq \overline{A}$. $\square$

Svojstva zatvorenja

Osnovna svojstva zatvorenja opisana su sljedećim teoremom:

Teorem 14.20

Neka je X topološki prostor, A i B proizvoljni podskupovi.

(i) $\overline{A}$ *je zatvoren i* $A \subseteq \overline{A}$;

(ii) A *je zatvoren ako i samo ako je* $\overline{A} = A$;

(iii) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, *tj.* $\operatorname{Cl}(\operatorname{Cl} A) = \operatorname{Cl} A$;

(iv) *ako je* $A \subseteq B$ *onda je* $\overline{A} \subseteq \overline{B}$;

(v) $\overline{A} = A \cup A^d$.

Dokaz: Jedina netrivijalna tvrdnja je (v). Neka je $x \in \overline{A}$ i neka je $U \ni x$ proizvoljna okolina. Prema teoremu 14.17 je $U \cap A \neq \emptyset$, pa ili je $x \in A$ ili U sadrži točku iz A različitu od x, te je $x \in A^d$. Obratno, ili je $x \in A^d$ pa svaka okolina od x sadrži točku iz A (čak različitu od x), te je po teoremu 14.17 $x \in \overline{A}$, ili je $x \in A \subseteq \overline{A}$. $\square$

Svojstva zatvorenja

Osnovna svojstva zatvorenja opisana su sljedećim teoremom:

Teorem 14.20

Neka je X topološki prostor, A i B proizvoljni podskupovi.

(*i*) $\overline{A}$ *je zatvoren i* $A \subseteq \overline{A}$*;*

(*ii*) A *je zatvoren ako i samo ako je* $\overline{A} = A$*;*

(*iii*) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$*, tj.* $\mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}\, A) = \mathrm{Cl}\, A$*;*

(*iv*) *ako je* $A \subseteq B$ *onda je* $\overline{A} \subseteq \overline{B}$*;*

(*v*) $\overline{A} = A \cup A^d$*.*

Dokaz: Jedina netrivijalna tvrdnja je (v). Neka je $x \in \overline{A}$ i neka je $U \ni x$ proizvoljna okolina. Prema teoremu 14.17 je $U \cap A \neq \emptyset$, pa ili je $x \in A$ ili U sadrži točku iz A različitu od x, te je $x \in A^d$. Obratno, ili je $x \in A^d$ pa svaka okolina od x sadrži točku iz A (čak različitu od x), te je po teoremu 14.17 $x \in \overline{A}$, ili je $x \in A \subseteq \overline{A}$. □

Svojstva zatvorenja

Osnovna svojstva zatvorenja opisana su sljedećim teoremom:

Teorem 14.20

Neka je X topološki prostor, A i B proizvoljni podskupovi.

- (i) $\overline{A}$ *je zatvoren i* $A \subseteq \overline{A}$;
- (ii) A *je zatvoren ako i samo ako je* $\overline{A} = A$;
- (iii) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, *tj.* $\mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}\,A) = \mathrm{Cl}\,A$;
- (iv) *ako je* $A \subseteq B$ *onda je* $\overline{A} \subseteq \overline{B}$;
- (v) $\overline{A} = A \cup A^d$.

Dokaz: Jedina netrivijalna tvrdnja je (v). Neka je $x \in \overline{A}$ i neka je $U \ni x$ proizvoljna okolina. Prema teoremu 14.17 je $U \cap A \neq \emptyset$, pa ili je $x \in A$ ili U sadrži točku iz A različitu od x, te je $x \in A^d$. Obratno, ili je $x \in A^d$ pa svaka okolina od x sadrži točku iz A (čak različitu od x), te je po teoremu 14.17 $x \in \overline{A}$, ili je $x \in A \subseteq \overline{A}$. □

Svojstva zatvorenja

Osnovna svojstva zatvorenja opisana su sljedećim teoremom:

Teorem 14.20

Neka je X topološki prostor, A i B proizvoljni podskupovi.

(*i*) $\overline{A}$ *je zatvoren i* $A \subseteq \overline{A}$;

(*ii*) A *je zatvoren ako i samo ako je* $\overline{A} = A$;

(*iii*) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, *tj.* $\mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}\, A) = \mathrm{Cl}\, A$;

(*iv*) *ako je* $A \subseteq B$ *onda je* $\overline{A} \subseteq \overline{B}$;

(*v*) $\overline{A} = A \cup A^d$.

Dokaz: Jedina netrivijalna tvrdnja je (v). Neka je $x \in \overline{A}$ i neka je $U \ni x$ proizvoljna okolina. Prema teoremu 14.17 je $U \cap A \neq \emptyset$, pa ili je $x \in A$ ili U sadrži točku iz A različitu od x, te je $x \in A^d$.
Obratno, ili je $x \in A^d$ pa svaka okolina od x sadrži točku iz A (čak različitu od x), te je po teoremu 14.17 $x \in \overline{A}$, ili je $x \in A \subseteq \overline{A}$. □

Svojstva zatvorenja

Osnovna svojstva zatvorenja opisana su sljedećim teoremom:

Teorem 14.20

Neka je X topološki prostor, A i B proizvoljni podskupovi.

(i) $\overline{A}$ *je zatvoren i* $A \subseteq \overline{A}$;

(ii) A *je zatvoren ako i samo ako je* $\overline{A} = A$;

(iii) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, *tj.* $\operatorname{Cl}(\operatorname{Cl} A) = \operatorname{Cl} A$;

(iv) *ako je* $A \subseteq B$ *onda je* $\overline{A} \subseteq \overline{B}$;

(v) $\overline{A} = A \cup A^d$.

Dokaz: Jedina netrivijalna tvrdnja je (v). Neka je $x \in \overline{A}$ i neka je $U \ni x$ proizvoljna okolina. Prema teoremu 14.17 je $U \cap A \neq \emptyset$, pa ili je $x \in A$ ili U sadrži točku iz A različitu od x, te je $x \in A^d$. Obratno, ili je $x \in A^d$ pa svaka okolina od x sadrži točku iz A (čak različitu od x), te je po teoremu 14.17 $x \in \overline{A}$, ili je $x \in A \subseteq \overline{A}$. $\square$

Zatvorenje unije i presjeka

Ponašanje zatvorenja prema uniji opisano je sljedećim teoremom:

Teorem 14.21

Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ podskupovi topološkog prostora X. Tada je

$$\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A}_1 \cup \cdots \cup \overline{A}_n .$$

Za proizvoljnu familiju $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ podskupova od X vrijedi samo

$$\bigcup_\alpha \overline{A}_\alpha \subseteq \overline{\bigcup_\alpha A_\alpha} .$$

□

a ponašanje prema presjeku ovim:

Teorem 14.22

Za proizvoljnu familiju $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ podskupova od X vrijedi

$$\overline{\bigcap_\alpha A_\alpha} \subseteq \bigcap_\alpha \overline{A}_\alpha .$$

Jednakost ne vrijedi niti za zatvorenje konačnih presjeka. □

Zatvorenje unije i presjeka

Ponašanje zatvorenja prema uniji opisano je sljedećim teoremom:

Teorem 14.21

Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ podskupovi topološkog prostora X. Tada je

$$\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A}_1 \cup \cdots \cup \overline{A}_n.$$

Za proizvoljnu familiju $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ podskupova od X vrijedi samo

$$\bigcup_\alpha \overline{A}_\alpha \subseteq \overline{\bigcup_\alpha A_\alpha}\,. \qquad \square$$

a ponašanje prema presjeku ovim:

Teorem 14.22

Za proizvoljnu familiju $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ podskupova od X vrijedi

$$\overline{\bigcap_\alpha A_\alpha} \subseteq \bigcap_\alpha \overline{A}_\alpha\,.$$

Jednakost ne vrijedi niti za zatvorenje konačnih presjeka. $\square$

Zatvorenje unije i presjeka

Ponašanje zatvorenja prema uniji opisano je sljedećim teoremom:

Teorem 14.21

Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ podskupovi topološkog prostora X. Tada je

$$\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A}_1 \cup \cdots \cup \overline{A}_n .$$

Za proizvoljnu familiju $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ podskupova od X vrijedi samo

$$\bigcup_\alpha \overline{A}_\alpha \subseteq \overline{\bigcup_\alpha A_\alpha} . \qquad \square$$

a ponašanje prema presjeku ovim:

Teorem 14.22

Za proizvoljnu familiju $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ podskupova od X vrijedi

$$\overline{\bigcap_\alpha A_\alpha} \subseteq \bigcap_\alpha \overline{A}_\alpha .$$

Jednakost ne vrijedi niti za zatvorenje konačnih presjeka. $\square$

Zatvorenje unije i presjeka

Ponašanje zatvorenja prema uniji opisano je sljedećim teoremom:

Teorem 14.21

Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ podskupovi topološkog prostora X. Tada je

$$\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A}_1 \cup \cdots \cup \overline{A}_n .$$

Za proizvoljnu familiju $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ podskupova od X vrijedi samo

$$\bigcup_\alpha \overline{A}_\alpha \subseteq \overline{\bigcup_\alpha A_\alpha} .$$

□

a ponašanje prema presjeku ovim:

Teorem 14.22

Za proizvoljnu familiju $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ podskupova od X vrijedi

$$\overline{\bigcap_\alpha A_\alpha} \subseteq \bigcap_\alpha \overline{A}_\alpha .$$

Jednakost ne vrijedi niti za zatvorenje konačnih presjeka. □

Zatvorenje i neprekidnost

Često je korisna sljedeća karakterizacija neprekidnosti:

Teorem 14.23

Preslikavanje $f : X \to Y$ je neprekidno ako i samo ako za svaki podskup $A \subseteq X$ vrijedi $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka je $x \in \overline{A}$ i $V \ni f(x)$ otvoren skup. Kako je f neprekidno, postoji okolina $U \ni x$ t.d. je $f(U) \subseteq V$. Zbog $x \in \overline{A}$ je $U \cap A \neq \emptyset$ (teorem 14.17), pa je $V \cap f(A) \neq \emptyset$, znači $f(x) \in \overline{f(A)}$.

$\Leftarrow$ Neka je $x \in X$ i $V \ni f(x)$ otvoren skup. Označimo $A := f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$. Tvrdnja: $x \notin \overline{A}$. Inače bi bilo $f(x) \in f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} = \overline{f(f^{-1}(Y \setminus V))} \subseteq \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V$ $\Rightarrow\Leftarrow$.
Dakle,
$x \in U := X \setminus \overline{A} = X \setminus \overline{(X \setminus f^{-1}(V))} \subseteq X \setminus (X \setminus f^{-1}(V)) = f^{-1}(V)$,
pa je $f(U) \subseteq V$, tj. f je neprekidna u x. $\square$

Zatvorenje i neprekidnost

Često je korisna sljedeća karakterizacija neprekidnosti:

Teorem 14.23

Preslikavanje $f\colon X \to Y$ je neprekidno ako i samo ako za svaki podskup $A \subseteq X$ vrijedi $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka je $x \in \overline{A}$ i $V \ni f(x)$ otvoren skup. Kako je f neprekidno, postoji okolina $U \ni x$ t.d. je $f(U) \subseteq V$. Zbog $x \in \overline{A}$ je $U \cap A \neq \emptyset$ (teorem 14.17), pa je $V \cap f(A) \neq \emptyset$, znači $f(x) \in \overline{f(A)}$.

$\Leftarrow$ Neka je $x \in X$ i $V \ni f(x)$ otvoren skup. Označimo $A := f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$. Tvrdnja: $x \notin \overline{A}$. Inače bi bilo $f(x) \in f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} = \overline{f(f^{-1}(Y \setminus V))} \subseteq \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V$ $\Rightarrow\Leftarrow$.

Dakle,

$x \in U := X \setminus \overline{A} = X \setminus \overline{(X \setminus f^{-1}(V))} \subseteq X \setminus (X \setminus f^{-1}(V)) = f^{-1}(V)$, pa je $f(U) \subseteq V$, tj. f je neprekidna u x. $\square$

Zatvorenje i neprekidnost

Često je korisna sljedeća karakterizacija neprekidnosti:

Teorem 14.23

Preslikavanje $f\colon X \to Y$ je neprekidno ako i samo ako za svaki podskup $A \subseteq X$ vrijedi $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka je $x \in \overline{A}$ i $V \ni f(x)$ otvoren skup. Kako je f neprekidno, postoji okolina $U \ni x$ t.d. je $f(U) \subseteq V$. Zbog $x \in \overline{A}$ je $U \cap A \neq \emptyset$ (teorem 14.17), pa je $V \cap f(A) \neq \emptyset$, znači $f(x) \in \overline{f(A)}$.

$\Leftarrow$ Neka je $x \in X$ i $V \ni f(x)$ otvoren skup. Označimo $A := f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$. Tvrdnja: $x \notin \overline{A}$. Inače bi bilo $f(x) \in f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} = \overline{f(f^{-1}(Y \setminus V))} \subseteq \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V \Rightarrow\Leftarrow$.
Dakle,
$x \in U := X \setminus \overline{A} = X \setminus \overline{(X \setminus f^{-1}(V))} \subseteq X \setminus (X \setminus f^{-1}(V)) = f^{-1}(V)$,
pa je $f(U) \subseteq V$, tj. f je neprekidna u x. $\square$

Zatvorenje i neprekidnost

Često je korisna sljedeća karakterizacija neprekidnosti:

Teorem 14.23

Preslikavanje $f\colon X \to Y$ je neprekidno ako i samo ako za svaki podskup $A \subseteq X$ vrijedi $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka je $x \in \overline{A}$ i $V \ni f(x)$ otvoren skup. Kako je f neprekidno, postoji okolina $U \ni x$ t.d. je $f(U) \subseteq V$. Zbog $x \in \overline{A}$ je $U \cap A \neq \emptyset$ (teorem 14.17), pa je $V \cap f(A) \neq \emptyset$, znači $f(x) \in \overline{f(A)}$.

$\Leftarrow$ Neka je $x \in X$ i $V \ni f(x)$ otvoren skup. Označimo $A := f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$. Tvrdnja: $x \notin \overline{A}$. Inače bi bilo $f(x) \in f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} = \overline{f(f^{-1}(Y \setminus V))} \subseteq \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V$ $\Rightarrow\Leftarrow$.
Dakle,
$x \in U := X \setminus \overline{A} = X \setminus \overline{(X \setminus f^{-1}(V))} \subseteq X \setminus (X \setminus f^{-1}(V)) = f^{-1}(V)$,
pa je $f(U) \subseteq V$, tj. f je neprekidna u x. $\square$

Zatvorenje i neprekidnost

Često je korisna sljedeća karakterizacija neprekidnosti:

Teorem 14.23

Preslikavanje $f\colon X \to Y$ je neprekidno ako i samo ako za svaki podskup $A \subseteq X$ vrijedi $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka je $x \in \overline{A}$ i $V \ni f(x)$ otvoren skup. Kako je f neprekidno, postoji okolina $U \ni x$ t.d. je $f(U) \subseteq V$. Zbog $x \in \overline{A}$ je $U \cap A \neq \emptyset$ (teorem 14.17), pa je $V \cap f(A) \neq \emptyset$, znači $f(x) \in \overline{f(A)}$.

$\Leftarrow$ Neka je $x \in X$ i $V \ni f(x)$ otvoren skup. Označimo $A := f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$. Tvrdnja: $x \notin \overline{A}$. Inače bi bilo $f(x) \in f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} = \overline{f(f^{-1}(Y \setminus V))} \subseteq \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V \Rightarrow\Leftarrow$.

Dakle,

$x \in U := X \setminus \overline{A} = X \setminus \overline{(X \setminus f^{-1}(V))} \subseteq X \setminus (X \setminus f^{-1}(V)) = f^{-1}(V)$,

pa je $f(U) \subseteq V$, tj. f je neprekidna u x. $\square$

Zatvorenje i neprekidnost

Često je korisna sljedeća karakterizacija neprekidnosti:

Teorem 14.23

Preslikavanje $f\colon X \to Y$ je neprekidno ako i samo ako za svaki podskup $A \subseteq X$ vrijedi $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $x \in \overline{A}$ i $V \ni f(x)$ otvoren skup. Kako je f neprekidno, postoji okolina $U \ni x$ t.d. je $f(U) \subseteq V$. Zbog $x \in \overline{A}$ je $U \cap A \neq \emptyset$ (teorem 14.17), pa je $V \cap f(A) \neq \emptyset$, znači $f(x) \in \overline{f(A)}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka je $x \in X$ i $V \ni f(x)$ otvoren skup. Označimo $A := f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$. Tvrdnja: $x \notin \overline{A}$. Inače bi bilo $f(x) \in f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} = \overline{f\big(f^{-1}(Y \setminus V)\big)} \subseteq \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V$ $\Rightarrow\!\Leftarrow$.

Dakle,
$x \in U := X \setminus \overline{A} = X \setminus \overline{(X \setminus f^{-1}(V))} \subseteq X \setminus (X \setminus f^{-1}(V)) = f^{-1}(V)$,
pa je $f(U) \subseteq V$, tj. f je neprekidna u x. $\square$

Zatvorenje i neprekidnost

Često je korisna sljedeća karakterizacija neprekidnosti:

Teorem 14.23

Preslikavanje $f\colon X \to Y$ je neprekidno ako i samo ako za svaki podskup $A \subseteq X$ vrijedi $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka je $x \in \overline{A}$ i $V \ni f(x)$ otvoren skup. Kako je f neprekidno, postoji okolina $U \ni x$ t.d. je $f(U) \subseteq V$. Zbog $\underline{x \in \overline{A}}$ je $U \cap A \neq \emptyset$ (teorem 14.17), pa je $V \cap f(A) \neq \emptyset$, znači $f(x) \in \overline{f(A)}$.

$\Leftarrow$ Neka je $x \in X$ i $V \ni f(x)$ otvoren skup. Označimo $A := f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$. Tvrdnja: $x \notin \overline{A}$. Inače bi bilo $f(x) \in f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} = \overline{f\big(f^{-1}(Y \setminus V)\big)} \subseteq \overline{Y \setminus V} = Y \setminus V \Rightarrow\!\Leftarrow$.
Dakle,
$x \in U := X \setminus \overline{A} = X \setminus \overline{\big(X \setminus f^{-1}(V)\big)} \subseteq X \setminus \big(X \setminus f^{-1}(V)\big) = f^{-1}(V)$,
pa je $f(U) \subseteq V$, tj. f je neprekidna u x. $\square$

Gusti skupovi

Vidjeli smo, teorem 1.4, da između svaka dva različita realna broja postoji barem jedan racionalan broj, tj. da je $\mathbb{Q}$ *gust* na $\mathbb{R}$.
Općenita definicija je sljedeća:

Definicija 14.24

Za podskup A topološkog prostora X kažemo da je *gust* ili *svuda gust* na X ako je $X = \overline{A}$.

Propozicija 14.25

Podskup A je gust na X akko svaki neprazan otvoren skup siječe A.

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $U \subseteq X$ otvoren skup. U je okolina svake svoje točke, pa, jer je A gust na X, $U \cap A \neq \emptyset$ (teorem 14.17).
$\boxed{\Leftarrow}$ Ako svaki otvoren skup siječe A, onda za svaki $x \in X$ i svaku okolinu $U \ni x$ je $U \cap A \neq \emptyset$, pa je po teoremu 14.17 $x \in \overline{A}$, tj. $\overline{A} = X$. $\square$

Gusti skupovi

Vidjeli smo, teorem 1.4, da između svaka dva različita realna broja postoji barem jedan racionalan broj, tj. da je $\mathbb{Q}$ *gust* na $\mathbb{R}$.
Općenita definicija je sljedeća:

Definicija 14.24

Za podskup A topološkog prostora X kažemo da je *gust* ili *svuda gust* na X ako je $X = \overline{A}$.

Propozicija 14.25

Podskup A je gust na X akko svaki neprazan otvoren skup siječe A.

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka je $U \subseteq X$ otvoren skup. U je okolina svake svoje točke, pa, jer je A gust na X, $U \cap A \neq \emptyset$ (teorem 14.17).
$\Leftarrow$ Ako svaki otvoren skup siječe A, onda za svaki $x \in X$ i svaku okolinu $U \ni x$ je $U \cap A \neq \emptyset$, pa je po teoremu 14.17 $x \in \overline{A}$, tj. $\overline{A} = X$. $\square$

Gusti skupovi

Vidjeli smo, teorem 1.4, da između svaka dva različita realna broja postoji barem jedan racionalan broj, tj. da je $\mathbb{Q}$ *gust* na $\mathbb{R}$.
Općenita definicija je sljedeća:

Definicija 14.24

Za podskup A topološkog prostora X kažemo da je *gust* ili *svuda gust* na X ako je $X = \overline{A}$.

Propozicija 14.25

Podskup A je gust na X akko svaki neprazan otvoren skup siječe A.

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka je $U \subseteq X$ otvoren skup. U je okolina svake svoje točke, pa, jer je A gust na X, $U \cap A \neq \emptyset$ (teorem 14.17).
$\Leftarrow$ Ako svaki otvoren skup siječe A, onda za svaki $x \in X$ i svaku okolinu $U \ni x$ je $U \cap A \neq \emptyset$, pa je po teoremu 14.17 $x \in \overline{A}$, tj. $\overline{A} = X$. $\square$

Gusti skupovi

Vidjeli smo, teorem 1.4, da između svaka dva različita realna broja postoji barem jedan racionalan broj, tj. da je $\mathbb{Q}$ *gust* na $\mathbb{R}$.
Općenita definicija je sljedeća:

Definicija 14.24

Za podskup A topološkog prostora X kažemo da je *gust* ili *svuda gust* na X ako je $X = \overline{A}$.

Propozicija 14.25

Podskup A je gust na X akko svaki neprazan otvoren skup siječe A.

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $U \subseteq X$ otvoren skup. U je okolina svake svoje točke, pa, jer je A gust na X, $U \cap A \neq \emptyset$ (teorem 14.17).

$\boxed{\Leftarrow}$ Ako svaki otvoren skup siječe A, onda za svaki $x \in X$ i svaku okolinu $U \ni x$ je $U \cap A \neq \emptyset$, pa je po teoremu 14.17 $x \in \overline{A}$, tj. $\overline{A} = X$. $\square$

Gusti skupovi

Vidjeli smo, teorem 1.4, da između svaka dva različita realna broja postoji barem jedan racionalan broj, tj. da je $\mathbb{Q}$ *gust* na $\mathbb{R}$. Općenita definicija je sljedeća:

Definicija 14.24

Za podskup A topološkog prostora X kažemo da je *gust* ili *svuda gust* na X ako je $X = \overline{A}$.

Propozicija 14.25

Podskup A je gust na X akko svaki neprazan otvoren skup siječe A.

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $U \subseteq X$ otvoren skup. U je okolina svake svoje točke, pa, jer je A gust na X, $U \cap A \neq \emptyset$ (teorem 14.17).

$\boxed{\Leftarrow}$ Ako svaki otvoren skup siječe A, onda za svaki $x \in X$ i svaku okolinu $U \ni x$ je $U \cap A \neq \emptyset$, pa je po teoremu 14.17 $x \in \overline{A}$, tj. $\overline{A} = X$. □

Interior (nutrina)

Dualno zatvorenju je interior:

Definicija 14.26

Interior ili *nutrina* skupa A u topološkom prostoru X je unija svih otvorenih skupova sadržanih u A, oznaka $\operatorname{Int} A$.
To je, dakle, najveći otvoren podskup od X koji je sadržan u A.

Primjer 14.27

Interior (nutrina)

Dualno zatvorenju je interior:

Definicija 14.26

Interior ili *nutrina* skupa A u topološkom prostoru X je unija svih otvorenih skupova sadržanih u A, oznaka $\operatorname{Int} A$.

To je, dakle, najveći otvoren podskup od X koji je sadržan u A.

Primjer 14.27

- $\operatorname{Int}[a, b]$ u $\mathbb{R}$ je $\langle a, b\rangle$;
- $\operatorname{Int}[a, b]$ u $\langle -\infty, b]$ je $\langle a, b]$;
- $\operatorname{Int} \mathbb{Q}$ u $\mathbb{R}$ je $\emptyset$, a $\operatorname{Int} \mathbb{Q}$ u $\mathbb{Q}$ je $\mathbb{Q}$.

Interior (nutrina)

Dualno zatvorenju je interior:

Definicija 14.26

Interior ili *nutrina* skupa A u topološkom prostoru X je unija svih otvorenih skupova sadržanih u A, oznaka $\operatorname{Int} A$.

To je, dakle, najveći otvoren podskup od X koji je sadržan u A.

Primjer 14.27

- $\operatorname{Int}[a, b]$ u $\mathbb{R}$ je $\langle a, b \rangle$;
- $\operatorname{Int}[a, b]$ u $\langle -\infty, b]$ je $\langle a, b]$;
- $\operatorname{Int} \mathbb{Q}$ u $\mathbb{R}$ je $\emptyset$, a $\operatorname{Int} \mathbb{Q}$ u $\mathbb{Q}$ je $\mathbb{Q}$.

Interior (nutrina)

Dualno zatvorenju je interior:

Definicija 14.26

Interior ili *nutrina* skupa A u topološkom prostoru X je unija svih otvorenih skupova sadržanih u A, oznaka $\operatorname{Int} A$.
To je, dakle, najveći otvoren podskup od X koji je sadržan u A.

Primjer 14.27

- $\operatorname{Int}[a, b]$ u $\mathbb{R}$ je $\langle a, b\rangle$;
- $\operatorname{Int}[a, b]$ u $\langle -\infty, b]$ je $\langle a, b]$;
- $\operatorname{Int} \mathbb{Q}$ u $\mathbb{R}$ je $\emptyset$, a $\operatorname{Int} \mathbb{Q}$ u $\mathbb{Q}$ je $\mathbb{Q}$.

Nigdje gusti skupovi

Definicija 14.28

Za skup A u topološkom prostoru X kažemo da je *nigdje gust* ako je $X \setminus \overline{A}$ gust u X.

Posljedica 14.29

Zatvoren skup je nigdje gust akko je njegov komplement gust. □

Primjer 14.30

Propozicija 14.31

A je nigdje gust u X ako i samo ako je $\operatorname{Int} \overline{A} = \emptyset$.

Dokaz: $\operatorname{Int} \overline{A} = \emptyset \iff$ svaki neprazan otvoren skup siječe $X \setminus \overline{A}$

$\iff X \setminus \overline{A}$ je gust u X prema propoziciji 14.25. □

Nigdje gusti skupovi

Definicija 14.28

Za skup A u topološkom prostoru X kažemo da je *nigdje gust* ako je $X \setminus \overline{A}$ gust u X.

Posljedica 14.29

Zatvoren skup je nigdje gust akko je njegov komplement gust. □

Primjer 14.30

Propozicija 14.31

A je nigdje gust u X ako i samo ako je $\operatorname{Int} \overline{A} = \emptyset$.

Dokaz: $\operatorname{Int} \overline{A} = \emptyset \iff$ svaki neprazan otvoren skup siječe $X \setminus \overline{A}$

$\iff X \setminus \overline{A}$ je gust u X prema propoziciji 14.25. □

Nigdje gusti skupovi

Definicija 14.28

Za skup A u topološkom prostoru X kažemo da je *nigdje gust* ako je $X \setminus \overline{A}$ gust u X.

Posljedica 14.29

Zatvoren skup je nigdje gust akko je njegov komplement gust. □

Primjer 14.30

- $\mathbb{N}$ je nigdje gust u $\mathbb{R}$.
- $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ je nigdje gust u $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$.

Propozicija 14.31

A je nigdje gust u X ako i samo ako je $\operatorname{Int} \overline{A} = \emptyset$.

Dokaz: $\operatorname{Int} \overline{A} = \emptyset \iff$ svaki neprazan otvoren skup siječe $X \setminus \overline{A}$

$\iff X \setminus \overline{A}$ je gust u X prema propoziciji 14.25. □

Nigdje gusti skupovi

Definicija 14.28

Za skup A u topološkom prostoru X kažemo da je *nigdje gust* ako je $X \setminus \overline{A}$ gust u X.

Posljedica 14.29

Zatvoren skup je nigdje gust akko je njegov komplement gust. $\square$

Primjer 14.30

- $\mathbb{N}$ je nigdje gust u $\mathbb{R}$.
- $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ je nigdje gust u $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$.

Propozicija 14.31

A je nigdje gust u X ako i samo ako je $\operatorname{Int} \overline{A} = \emptyset$.

Dokaz: $\operatorname{Int} \overline{A} = \emptyset \iff$ svaki neprazan otvoren skup siječe $X \setminus \overline{A}$

$\iff X \setminus \overline{A}$ je gust u X prema propoziciji 14.25. $\square$

Nigdje gusti skupovi

Definicija 14.28

Za skup A u topološkom prostoru X kažemo da je *nigdje gust* ako je $X \setminus \overline{A}$ gust u X.

Posljedica 14.29

Zatvoren skup je nigdje gust akko je njegov komplement gust. $\square$

Primjer 14.30

- $\mathbb{N}$ je nigdje gust u $\mathbb{R}$.
- $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ je nigdje gust u $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$.

Propozicija 14.31

A je nigdje gust u X ako i samo ako je $\operatorname{Int} \overline{A} = \emptyset$.

Dokaz: $\operatorname{Int} \overline{A} = \emptyset \iff$ svaki neprazan otvoren skup siječe $X \setminus \overline{A}$

$\iff X \setminus \overline{A}$ je gust u X prema propoziciji 14.25.

Nigdje gusti skupovi

Definicija 14.28

Za skup A u topološkom prostoru X kažemo da je *nigdje gust* ako je $X \setminus \overline{A}$ gust u X.

Posljedica 14.29

Zatvoren skup je nigdje gust akko je njegov komplement gust. $\square$

Primjer 14.30

- $\mathbb{N}$ je nigdje gust u $\mathbb{R}$.
- $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ je nigdje gust u $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$.

Propozicija 14.31

A je nigdje gust u X ako i samo ako je $\operatorname{Int} \overline{A} = \emptyset$.

Dokaz: $\operatorname{Int} \overline{A} = \emptyset \iff$ svaki neprazan otvoren skup siječe $X \setminus \overline{A}$

$\iff X \setminus \overline{A}$ je gust u X prema propoziciji 14.25. $\square$

Rub

Skup točaka koje su „blizu" skupa i njegovog komplementa je rub. Točnije

Definicija 14.32

Rub ili *granica* skupa A u topološkom prostoru X je skup $\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$, oznaka ∂A ili $\operatorname{Fr} A$ ili $\operatorname{Bd} A$.

Primijeti da je uvijek $\partial A = \partial(X \setminus A)$ i $\partial X = \emptyset$.

Primjer 14.33

Propozicija 14.34

Točka $x \in X$ pripada rubu skupa A ako i samo ako svaka njezina okolina siječe A i $X \setminus A$. □

Rub

Skup točaka koje su „blizu" skupa i njegovog komplementa je rub. Točnije

Definicija 14.32

Rub ili *granica* skupa A u topološkom prostoru X je skup $\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$, oznaka ∂A ili $\operatorname{Fr} A$ ili $\operatorname{Bd} A$.

Primijeti da je uvijek $\partial A = \partial(X \setminus A)$ i $\partial X = \emptyset$.

Primjer 14.33

Propozicija 14.34

Točka $x \in X$ pripada rubu skupa A ako i samo ako svaka njezina okolina siječe A i $X \setminus A$. □

Rub

Skup točaka koje su „blizu" skupa i njegovog komplementa je rub. Točnije

Definicija 14.32

Rub ili *granica* skupa A u topološkom prostoru X je skup $\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$, oznaka ∂A ili $\operatorname{Fr} A$ ili $\operatorname{Bd} A$.

Primijeti da je uvijek $\partial A = \partial(X \setminus A)$ i $\partial X = \emptyset$.

Primjer 14.33

- U $\mathbb{R}$ je $\partial\langle a, b] = \{a, b\}$, $\partial\langle 0, \infty\rangle = \{0\}$, $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$, $\partial\mathbb{N} = \mathbb{N}$.
- U $\mathbb{R}^n$ je $\partial K(x; r) = \{y : d(x, y) = r\}$ za svaku od metrika d_1, d_2 i d_∞.

Propozicija 14.34

Točka $x \in X$ pripada rubu skupa A ako i samo ako svaka njezina okolina siječe A i $X \setminus A$.

Rub

Skup točaka koje su „blizu" skupa i njegovog komplementa je rub. Točnije

Definicija 14.32

Rub ili *granica* skupa A u topološkom prostoru X je skup $\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$, oznaka ∂A ili $\operatorname{Fr} A$ ili $\operatorname{Bd} A$.

Primijeti da je uvijek $\partial A = \partial(X \setminus A)$ i $\partial X = \emptyset$.

Primjer 14.33

- U $\mathbb{R}$ je $\partial\langle a, b] = \{a, b\}$, $\partial\langle 0, \infty\rangle = \{0\}$, $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$, $\partial\mathbb{N} = \mathbb{N}$.
- U $\mathbb{R}^n$ je $\partial K(x; r) = \{y : d(x, y) = r\}$ za svaku od metrika d_1, d_2 i d_∞.

Propozicija 14.34

Točka $x \in X$ pripada rubu skupa A ako i samo ako svaka njezina okolina siječe A i $X \setminus A$.

Rub

Skup točaka koje su „blizu" skupa i njegovog komplementa je rub. Točnije

Definicija 14.32

Rub ili *granica* skupa A u topološkom prostoru X je skup $\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$, oznaka ∂A ili $\operatorname{Fr} A$ ili $\operatorname{Bd} A$.

Primijeti da je uvijek $\partial A = \partial(X \setminus A)$ i $\partial X = \emptyset$.

Primjer 14.33

- U $\mathbb{R}$ je $\partial\langle a, b] = \{a, b\}$, $\partial\langle 0, \infty\rangle = \{0\}$, $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$, $\partial\mathbb{N} = \mathbb{N}$.
- U $\mathbb{R}^n$ je $\partial K(x; r) = \{y : d(x, y) = r\}$ za svaku od metrika d_1, d_2 i d_∞.

Propozicija 14.34

Točka $x \in X$ pripada rubu skupa A ako i samo ako svaka njezina okolina siječe A i $X \setminus A$. $\square$

Konvergencija u metričkim prostorima

Konvergencija se u metričkim prostorima definira kao i u $\mathbb{R}$ odnosno $\mathbb{E}^n$, s time da se, umjesto euklidske metrike koristi metrika u promatranom metričkom prostoru.

Definicija 15.1

Kažemo da je niz $(x_n)_n$ u metričkom prostoru (X, d) *konvergentan* ili da *konvergira* ako postoji točka $x^* \in X$ takva da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geqslant n_0$ vrijedi $d(x_n, x^*) < \varepsilon$.

$$\exists x^* \in X \text{ t.d. } \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.d. } (n \geqslant n_0 \Rightarrow d(x_n, x^*) < \varepsilon)$$

Točka x^* naziva se *limes niza* i označava $x^* = \lim x_n$ ili $\lim_{n\to\infty} x_n$, i kaže se da niz (x_n) konvergira k x^*.

Činjenicu da niz $(x_n)_n$ konvergira k x^* možemo pomoću kugala izreći ovako: Za svaku otvorenu kuglu $K(x^*; \varepsilon)$ oko točke x^* postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geqslant n_0$ vrijedi $x_n \in K(x^*; \varepsilon)$. Drugim riječima, za svaki $\varepsilon > 0$, svi se članovi niza, osim možda njih konačno mnogo, nalaze u ε-kugli oko x^*.

Konvergencija u metričkim prostorima

Konvergencija se u metričkim prostorima definira kao i u $\mathbb{R}$ odnosno $\mathbb{E}^n$, s time da se, umjesto euklidske metrike koristi metrika u promatranom metričkom prostoru.

Definicija 15.1

Kažemo da je niz $(x_n)_n$ u metričkom prostoru (X, d) *konvergentan* ili da *konvergira* ako postoji točka $x^* \in X$ takva da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geqslant n_0$ vrijedi $d(x_n, x^*) < \varepsilon$.

$$\exists x^* \in X \text{ t.d. } \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.d. } (n \geqslant n_0 \Rightarrow d(x_n, x^*) < \varepsilon)$$

Točka x^* naziva se *limes niza* i označava $x^* = \lim x_n$ ili $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, i kaže se da niz (x_n) konvergira k x^*.

Činjenicu da niz $(x_n)_n$ konvergira k x^* možemo pomoću kugala izreći ovako: Za svaku otvorenu kuglu $K(x^*; \varepsilon)$ oko točke x^* postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geqslant n_0$ vrijedi $x_n \in K(x^*; \varepsilon)$. Drugim riječima, za svaki $\varepsilon > 0$, svi se članovi niza, osim možda njih konačno mnogo, nalaze u ε-kugli oko x^*.

Konvergencija u metričkim prostorima

Konvergencija se u metričkim prostorima definira kao i u $\mathbb{R}$ odnosno $\mathbb{E}^n$, s time da se, umjesto euklidske metrike koristi metrika u promatranom metričkom prostoru.

Definicija 15.1

Kažemo da je niz $(x_n)_n$ u metričkom prostoru (X, d) *konvergentan* ili da *konvergira* ako postoji točka $x^* \in X$ takva da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geqslant n_0$ vrijedi $d(x_n, x^*) < \varepsilon$.

$$\exists x^* \in X \text{ t.d. } \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.d. } (n \geqslant n_0 \Rightarrow d(x_n, x^*) < \varepsilon)$$

Točka x^* naziva se *limes niza* i označava $x^* = \lim x_n$ ili $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, i kaže se da niz (x_n) konvergira k x^*.

Činjenicu da niz $(x_n)_n$ konvergira k x^* možemo pomoću kugala izreći ovako: Za svaku otvorenu kuglu $K(x^*; \varepsilon)$ oko točke x^* postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geqslant n_0$ vrijedi $x_n \in K(x^*; \varepsilon)$. Drugim riječima, za svaki $\varepsilon > 0$, svi se članovi niza, osim možda njih konačno mnogo, nalaze u ε-kugli oko x^*.

Konvergencija u metričkim prostorima

Konvergencija se u metričkim prostorima definira kao i u $\mathbb{R}$ odnosno $\mathbb{E}^n$, s time da se, umjesto euklidske metrike koristi metrika u promatranom metričkom prostoru.

Definicija 15.1

Kažemo da je niz $(x_n)_n$ u metričkom prostoru (X, d) *konvergentan* ili da *konvergira* ako postoji točka $x^* \in X$ takva da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geqslant n_0$ vrijedi $d(x_n, x^*) < \varepsilon$.

$$\exists x^* \in X \text{ t.d. } \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.d. } (n \geqslant n_0 \Rightarrow d(x_n, x^*) < \varepsilon)$$

Točka x^* naziva se *limes niza* i označava $x^* = \lim x_n$ ili $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, i kaže se da niz (x_n) konvergira k x^*.

Činjenicu da niz $(x_n)_n$ konvergira k x^* možemo pomoću kugala izreći ovako: Za svaku otvorenu kuglu $K(x^*; \varepsilon)$ oko točke x^* postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geqslant n_0$ vrijedi $x_n \in K(x^*; \varepsilon)$.

Drugim riječima, za svaki $\varepsilon > 0$, svi se članovi niza, osim možda njih konačno mnogo, nalaze u ε-kugli oko x^*.

Konvergencija u metričkim prostorima

Konvergencija se u metričkim prostorima definira kao i u $\mathbb{R}$ odnosno $\mathbb{E}^n$, s time da se, umjesto euklidske metrike koristi metrika u promatranom metričkom prostoru.

Definicija 15.1

Kažemo da je niz $(x_n)_n$ u metričkom prostoru (X, d) *konvergentan* ili da *konvergira* ako postoji točka $x^* \in X$ takva da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geqslant n_0$ vrijedi $d(x_n, x^*) < \varepsilon$.

$$\exists x^* \in X \text{ t.d. } \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.d. } (n \geqslant n_0 \Rightarrow d(x_n, x^*) < \varepsilon)$$

Točka x^* naziva se *limes niza* i označava $x^* = \lim x_n$ ili $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, i kaže se da niz (x_n) konvergira k x^*.

Činjenicu da niz $(x_n)_n$ konvergira k x^* možemo pomoću kugala izreći ovako: Za svaku otvorenu kuglu $K(x^*; \varepsilon)$ oko točke x^* postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geqslant n_0$ vrijedi $x_n \in K(x^*; \varepsilon)$. Drugim riječima, za svaki $\varepsilon > 0$, svi se članovi niza, osim možda njih konačno mnogo, nalaze u ε-kugli oko x^*.

Konvergencija u produktu

Kao i kod neprekidnosti, konvergencija u produktu se svodi na konvergenciju po koordinatama. Točnije,

Teorem 15.2

Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori. Niz $\big((x_n, y_n)\big)_n$ u $X \times Y$ konvergira ako i samo ako kovergiraju koordinatni nizovi $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$, i tada vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = \big(\lim\limits_{n\to\infty} x_n, \lim\limits_{n\to\infty} y_n\big)$. □

Konvergencija u topološkim prostorima

Konvergencija se u topološkim prostorima definira kao i u metričkim, s time da se, kao i kod neprekidnosti, otvorene kugle zamijene otvorenim skupovima.

Definicija 15.3

Za niz $(x_n)_n$ u topološkom prostoru X kažemo da je *konvergentan* ili da *konvergira* ako postoji točka $x^* \in X$ takva da za svaki otvoren skup $U \subseteq X$ koji sadrži x^* postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geqslant n_0$ vrijedi $x_n \in U$.

Postoji međutim jedan problem.

Primjer 15.4

Neka je X indiskretan topološki prostor, tj. jedini otvoreni skupovi u X su $\emptyset$ i cijeli X.

Konvergencija u topološkim prostorima

Konvergencija se u topološkim prostorima definira kao i u metričkim, s time da se, kao i kod neprekidnosti, otvorene kugle zamijene otvorenim skupovima.

Definicija 15.3

Za niz $(x_n)_n$ u topološkom prostoru X kažemo da je *konvergentan* ili da *konvergira* ako postoji točka $x^* \in X$ takva da za svaki otvoren skup $U \subseteq X$ koji sadrži x^* postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geqslant n_0$ vrijedi $x_n \in U$.

Postoji međutim jedan problem.

Primjer 15.4

Neka je X indiskretan topološki prostor, tj. jedini otvoreni skupovi u X su $\emptyset$ i cijeli X.

Konvergencija u topološkim prostorima

Konvergencija se u topološkim prostorima definira kao i u metričkim, s time da se, kao i kod neprekidnosti, otvorene kugle zamijene otvorenim skupovima.

Definicija 15.3

Za niz $(x_n)_n$ u topološkom prostoru X kažemo da je *konvergentan* ili da *konvergira* ako postoji točka $x^* \in X$ takva da za svaki otvoren skup $U \subseteq X$ koji sadrži x^* postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geqslant n_0$ vrijedi $x_n \in U$.

Postoji međutim jedan problem.

Primjer 15.4

Neka je X indiskretan topološki prostor, tj. jedini otvoreni skupovi u X su $\emptyset$ i cijeli X. Tada bilo koji niz $(x_n)_n$ u X konvergira *svakoj* točki iz X.

Konvergencija u topološkim prostorima

Konvergencija se u topološkim prostorima definira kao i u metričkim, s time da se, kao i kod neprekidnosti, otvorene kugle zamijene otvorenim skupovima.

Definicija 15.3

Za niz $(x_n)_n$ u topološkom prostoru X kažemo da je *konvergentan* ili da *konvergira* ako postoji točka $x^* \in X$ takva da za svaki otvoren skup $U \subseteq X$ koji sadrži x^* postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geqslant n_0$ vrijedi $x_n \in U$.

Postoji međutim jedan problem.

Primjer 15.4

Neka je X indiskretan topološki prostor, tj. jedini otvoreni skupovi u X su $\emptyset$ i cijeli X. Tada bilo koji niz $(x_n)_n$ u X konvergira *svakoj* točki iz X.

Jedinstvenost limesa u metričkim prostorima

U metričkim prostorima s limesom niza nemamo problema kao u indiskretnom prostoru. Vrijedi naime sljedeća propozicija:

Propozicija 15.5

Limes konvergentnog niza u metričkom prostoru je jedinstven.

Dokaz: Pretpostavimo da su x^* i $\hat{x}$ dva različita limesa niza $(x_n)_n$. Tada za $\varepsilon = \frac{d(x^*, \hat{x})}{2}$ postoje prirodni brojevi n^* i $\hat{n}$ takvi da za $n \geqslant n^*$ vrijedi $x_n \in K(x^*; \varepsilon)$ a za $n \geqslant \hat{n}$ vrijedi $x_n \in K(\hat{x}; \varepsilon)$, pa bi za dovoljno velike n članovi x_n morali biti u obje kugle, što je nemoguće jer su one disjunktne. $\square$

Zato ćemo često na topološki prostor staviti dodatni zahtjev koji će osigurati jedinstvenost limesa.

Jedinstvenost limesa u metričkim prostorima

U metričkim prostorima s limesom niza nemamo problema kao u indiskretnom prostoru. Vrijedi naime sljedeća propozicija:

Propozicija 15.5

Limes konvergentnog niza u metričkom prostoru je jedinstven.

Dokaz: Pretpostavimo da su x^* i $\hat{x}$ dva različita limesa niza $(x_n)_n$. Tada za $\varepsilon = \frac{d(x^*, \hat{x})}{2}$ postoje prirodni brojevi n^* i $\hat{n}$ takvi da za $n \geqslant n^*$ vrijedi $x_n \in K(x^*; \varepsilon)$ a za $n \geqslant \hat{n}$ vrijedi $x_n \in K(\hat{x}; \varepsilon)$, pa bi za dovoljno velike n članovi x_n morali biti u obje kugle, što je nemoguće jer su one disjunktne. $\square$

Zato ćemo često na topološki prostor staviti dodatni zahtjev koji će osigurati jedinstvenost limesa.

Jedinstvenost limesa u metričkim prostorima

U metričkim prostorima s limesom niza nemamo problema kao u indiskretnom prostoru. Vrijedi naime sljedeća propozicija:

Propozicija 15.5

Limes konvergentnog niza u metričkom prostoru je jedinstven.

Dokaz: Pretpostavimo da su x^* i $\hat{x}$ dva različita limesa niza $(x_n)_n$.
Tada za $\varepsilon = \frac{d(x^*, \hat{x})}{2}$ postoje prirodni brojevi n^* i $\hat{n}$ takvi da za $n \geqslant n^*$ vrijedi $x_n \in K(x^*; \varepsilon)$ a za $n \geqslant \hat{n}$ vrijedi $x_n \in K(\hat{x}; \varepsilon)$, pa bi za dovoljno velike n članovi x_n morali biti u obje kugle, što je nemoguće jer su one disjunktne. □

Zato ćemo često na topološki prostor staviti dodatni zahtjev koji će osigurati jedinstvenost limesa.

Jedinstvenost limesa u metričkim prostorima

U metričkim prostorima s limesom niza nemamo problema kao u indiskretnom prostoru. Vrijedi naime sljedeća propozicija:

Propozicija 15.5

Limes konvergentnog niza u metričkom prostoru je jedinstven.

Dokaz: Pretpostavimo da su x^* i $\hat{x}$ dva različita limesa niza $(x_n)_n$. Tada za $\varepsilon = \frac{d(x^*, \hat{x})}{2}$ postoje prirodni brojevi n^* i $\hat{n}$ takvi da za $n \geqslant n^*$ vrijedi $x_n \in K(x^*; \varepsilon)$ a za $n \geqslant \hat{n}$ vrijedi $x_n \in K(\hat{x}; \varepsilon)$, pa bi za dovoljno velike n članovi x_n morali biti u obje kugle, što je nemoguće jer su one disjunktne. $\square$

Zato ćemo često na topološki prostor staviti dodatni zahtjev koji će osigurati jedinstvenost limesa.

Jedinstvenost limesa u metričkim prostorima

U metričkim prostorima s limesom niza nemamo problema kao u indiskretnom prostoru. Vrijedi naime sljedeća propozicija:

Propozicija 15.5

Limes konvergentnog niza u metričkom prostoru je jedinstven.

Dokaz: Pretpostavimo da su x^* i $\hat{x}$ dva različita limesa niza $(x_n)_n$. Tada za $\varepsilon = \frac{d(x^*, \hat{x})}{2}$ postoje prirodni brojevi n^* i $\hat{n}$ takvi da za $n \geqslant n^*$ vrijedi $x_n \in K(x^*; \varepsilon)$ a za $n \geqslant \hat{n}$ vrijedi $x_n \in K(\hat{x}; \varepsilon)$, pa bi za dovoljno velike n članovi x_n morali biti u obje kugle, što je nemoguće jer su one disjunktne. □

Zato ćemo često na topološki prostor staviti dodatni zahtjev koji će osigurati jedinstvenost limesa.

Jedinstvenost limesa u metričkim prostorima

U metričkim prostorima s limesom niza nemamo problema kao u indiskretnom prostoru. Vrijedi naime sljedeća propozicija:

Propozicija 15.5

Limes konvergentnog niza u metričkom prostoru je jedinstven.

Dokaz: Pretpostavimo da su x^* i $\hat{x}$ dva različita limesa niza $(x_n)_n$. Tada za $\varepsilon = \frac{d(x^*, \hat{x})}{2}$ postoje prirodni brojevi n^* i $\hat{n}$ takvi da za $n \geqslant n^*$ vrijedi $x_n \in K(x^*; \varepsilon)$ a za $n \geqslant \hat{n}$ vrijedi $x_n \in K(\hat{x}; \varepsilon)$, pa bi za dovoljno velike n članovi x_n morali biti u obje kugle, što je nemoguće jer su one disjunktne. $\square$

Zato ćemo često na topološki prostor staviti dodatni zahtjev koji će osigurati jedinstvenost limesa.

Hausdorffovo svojstvo

Definicija 15.6

Za topološki prostor kažemo da je *Hausdorffov*, ili da ima *Hausdorffovo svojstvo*, ili da je *T_2-prostor*, ako za svake dvije različite točke x i y postoje disjunktni otvoreni skupovi $U \ni x$ i $V \ni y$.

Primjer 15.7

- $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^n$ s bilo kojom od metrika d_1, d_2 i d_∞, su Hausdorffovi;
- svaki metrički prostor je Hausdorffov.

Propozicija 15.8

Limes konvergentnog niza u Hausdorffovom prostoru je jedinstven.

Dokaz: Kao dokaz prethodne propozicije 15.5 — treba samo kugle zamijeniti disjunktnim otvorenim skupovima. □

Hausdorffovo svojstvo

Definicija 15.6

Za topološki prostor kažemo da je *Hausdorffov*, ili da ima *Hausdorffovo svojstvo*, ili da je *T_2-prostor*, ako za svake dvije različite točke x i y postoje disjunktni otvoreni skupovi $U \ni x$ i $V \ni y$.

Primjer 15.7

- $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^n$ s bilo kojom od metrika d_1, d_2 i d_∞, su Hausdorffovi;
- svaki metrički prostor je Hausdorffov.

Propozicija 15.8

Limes konvergentnog niza u Hausdorffovom prostoru je jedinstven.

Dokaz: Kao dokaz prethodne propozicije 15.5 — treba samo kugle zamijeniti disjunktnim otvorenim skupovima. □

Hausdorffovo svojstvo

Definicija 15.6

Za topološki prostor kažemo da je *Hausdorffov*, ili da ima *Hausdorffovo svojstvo*, ili da je *T_2-prostor*, ako za svake dvije različite točke x i y postoje disjunktni otvoreni skupovi $U \ni x$ i $V \ni y$.

Primjer 15.7

- $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^n$ s bilo kojom od metrika d_1, d_2 i d_∞, su Hausdorffovi;
- svaki metrički prostor je Hausdorffov.

Propozicija 15.8

Limes konvergentnog niza u Hausdorffovom prostoru je jedinstven.

Dokaz: Kao dokaz prethodne propozicije 15.5 — treba samo kugle zamijeniti disjunktnim otvorenim skupovima. □

Hausdorffovo svojstvo

Definicija 15.6

Za topološki prostor kažemo da je *Hausdorffov*, ili da ima *Hausdorffovo svojstvo*, ili da je *T_2-prostor*, ako za svake dvije različite točke x i y postoje disjunktni otvoreni skupovi $U \ni x$ i $V \ni y$.

Primjer 15.7

- $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^n$ s bilo kojom od metrika d_1, d_2 i d_∞, su Hausdorffovi;
- svaki metrički prostor je Hausdorffov.

Propozicija 15.8

Limes konvergentnog niza u Hausdorffovom prostoru je jedinstven.

Dokaz: Kao dokaz prethodne propozicije 15.5 — treba samo kugle zamijeniti disjunktnim otvorenim skupovima. $\square$

Osnovna svojstva Hausdorffovih prostora

Lako se dokazuje sljedeća propozicija:

Propozicija 15.9

(*i*) *Jednočlani podskupovi Hausdorffova prostora su zatvoreni.*

(*ii*) *Svaki potprostor Hausdorffova prostora je Hausdorffov.*

(*iii*) *Produkt dvaju Hausdorffovih prostora je Hausdorffov.*

(*iv*) *Hausdorffovo svojstvo je topološko svojstvo.*

Definicija 15.10

Za topološki prostor kažemo da je *T_1-prostor* ako su jednotočkovni podskupovi zatvoreni.

Propozicija 15.9 (*i*) pokazuje da je svaki Hausdorffov prostor T_1-prostor.

Osnovna svojstva Hausdorffovih prostora

Lako se dokazuje sljedeća propozicija:

Propozicija 15.9

(i) *Jednočlani podskupovi Hausdorffova prostora su zatvoreni.*

(ii) *Svaki potprostor Hausdorffova prostora je Hausdorffov.*

(iii) *Produkt dvaju Hausdorffovih prostora je Hausdorffov.*

(iv) *Hausdorffovo svojstvo je topološko svojstvo.*

Definicija 15.10

Za topološki prostor kažemo da je *T_1-prostor* ako su jednotočkovni podskupovi zatvoreni.

Ekvivalentno, za svake dvije različite točke x i y postoje otvoreni skupovi $U \ni x$ i $V \ni y$ takvi da $y \notin U$ i $x \notin V$.

Propozicija 15.9 (i) pokazuje da je svaki Hausdorffov prostor T_1-prostor.

Osnovna svojstva Hausdorffovih prostora

Lako se dokazuje sljedeća propozicija:

Propozicija 15.9

(*i*) *Jednočlani podskupovi Hausdorffova prostora su zatvoreni.*

(*ii*) *Svaki potprostor Hausdorffova prostora je Hausdorffov.*

(*iii*) *Produkt dvaju Hausdorffovih prostora je Hausdorffov.*

(*iv*) *Hausdorffovo svojstvo je topološko svojstvo.*

Definicija 15.10

Za topološki prostor kažemo da je *T_1-prostor* ako su jednotočkovni podskupovi zatvoreni.

Ekvivalentno, za svake dvije različite točke x i y postoje otvoreni skupovi $U \ni x$ i $V \ni y$ takvi da $y \notin U$ i $x \notin V$.

Propozicija 15.9 (*i*) pokazuje da je svaki Hausdorffov prostor T_1-prostor.

Osnovna svojstva Hausdorffovih prostora

Lako se dokazuje sljedeća propozicija:

Propozicija 15.9

(i) *Jednočlani podskupovi Hausdorffova prostora su zatvoreni.*

(ii) *Svaki potprostor Hausdorffova prostora je Hausdorffov.*

(iii) *Produkt dvaju Hausdorffovih prostora je Hausdorffov.*

(iv) *Hausdorffovo svojstvo je topološko svojstvo.*

Definicija 15.10

Za topološki prostor kažemo da je *T_1-prostor* ako su jednotočkovni podskupovi zatvoreni.

Ekvivalentno, za svake dvije različite točke x i y postoje otvoreni skupovi $U \ni x$ i $V \ni y$ takvi da $y \notin U$ i $x \notin V$.

Propozicija 15.9 (i) pokazuje da je svaki Hausdorffov prostor T_1-prostor.

Regularnost i normalnost

Hausdorffovo i T_1-svojstvo su samo dva u čitavoj hijerarhiji separacijskih svojstava.

Definicija 15.11

Za T_1-prostor kažemo da je *regularan* ako za svaku točku x i zatvoren skup F koji ju ne sadrži, postoje disjunktni otvoreni skupovi $U \ni x$ i $V \supseteq F$.

Definicija 15.12

Za T_1-prostor kažemo da je *normalan* ako za svaka dva disjunktna zatvorena skupa A i B postoje disjunktni otvoreni skupovi $U \supseteq A$ i $V \supseteq B$.

- Vrijedi: metrički $\Longrightarrow$ normalan $\Longrightarrow$ regularan $\Longrightarrow$ Hausdorffov $\Longrightarrow$ T_1

Regularnost i normalnost

Hausdorffovo i T_1-svojstvo su samo dva u čitavoj hijerarhiji separacijskih svojstava.

Definicija 15.11

Za T_1-prostor kažemo da je *regularan* ako za svaku točku x i zatvoren skup F koji ju ne sadrži, postoje disjunktni otvoreni skupovi $U \ni x$ i $V \supseteq F$.

Definicija 15.12

Za T_1-prostor kažemo da je *normalan* ako za svaka dva disjunktna zatvorena skupa A i B postoje disjunktni otvoreni skupovi $U \supseteq A$ i $V \supseteq B$.

- Vrijedi: metrički $\Longrightarrow$ normalan $\Longrightarrow$ regularan $\Longrightarrow$ Hausdorffov $\Longrightarrow$ T_1

Regularnost i normalnost

Hausdorffovo i T_1-svojstvo su samo dva u čitavoj hijerarhiji separacijskih svojstava.

Definicija 15.11

Za T_1-prostor kažemo da je *regularan* ako za svaku točku x i zatvoren skup F koji ju ne sadrži, postoje disjunktni otvoreni skupovi $U \ni x$ i $V \supseteq F$.

Definicija 15.12

Za T_1-prostor kažemo da je *normalan* ako za svaka dva disjunktna zatvorena skupa A i B postoje disjunktni otvoreni skupovi $U \supseteq A$ i $V \supseteq B$.

- Vrijedi: metrički $\Longrightarrow$ normalan $\Longrightarrow$ regularan $\Longrightarrow$ Hausdorffov $\Longrightarrow$ T_1

4 KOMPAKTNI PROSTORI

- Motivacija i definicija
- Kompaktnost segmenta
- Svojstva kompaktnih prostora i neprekidnih funkcija na njima
- Kompaktnost potprostora i produkta
- Kompaktnost u $\mathbb{R}^n$

Motivacija

Kolegij smo započeli diskusijom o omeđenosti neprekidne realne funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Cilj nam je dokazati ovu tvrdnju kao i njena poopćenja.

Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ proizvoljan skup a $f : A \to \mathbb{R}$ neka funkcija. Je li ona omeđena, tj. postoji li pozitivan broj K t.d. je $|f(x)| \leqslant K$ za sve $x \in A$?

1. korak: Ako je skup A konačan, $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, odgovor je DA, možemo npr. uzeti $K = \max\{|f(a_1)|, \ldots, |f(a_n)|\}$.
2. korak: Općenitije, neka je $A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ konačna unija skupova takvih da je f omeđena na svakom od njih, tj. postoje pozitivni brojevi $K_1, \ldots, K_n$ takvi da je $|f(x)| \leqslant K_j$ za sve $x \in A_j$ i sve $j = 1, \ldots, n$. Uzmemo li $K = \max\{K_1, \ldots, K_n\}$ bit će $|f(x)| \leqslant K$ za sve $x \in A$.

Primjer 16.1

Promotrimo funkciju $f : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$ definiranu s $f(x) = \frac{1}{x}$. Za svaki $K > 0$ postoji $x \in \langle 0, 1\rangle$ t.d. je $f(x) > K$. Dakle, f nije omeđena iako je ona čak neprekidna.

Motivacija

Kolegij smo započeli diskusijom o omeđenosti neprekidne realne funkcije $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Cilj nam je dokazati ovu tvrdnju kao i njena poopćenja.

Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ proizvoljan skup a $f\colon A \to \mathbb{R}$ neka funkcija. Je li ona omeđena, tj. postoji li pozitivan broj K t.d. je $|f(x)| \leqslant K$ za sve $x \in A$?

1. korak: Ako je skup A konačan, $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, odgovor je DA, možemo npr. uzeti $K = \max\{|f(a_1)|, \ldots, |f(a_n)|\}$.
2. korak: Općenitije, neka je $A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ konačna unija skupova takvih da je f omeđena na svakom od njih, tj. postoje pozitivni brojevi $K_1, \ldots, K_n$ takvi da je $|f(x)| \leqslant K_j$ za sve $x \in A_j$ i sve $j = 1, \ldots, n$. Uzmemo li $K = \max\{K_1, \ldots, K_n\}$ bit će $|f(x)| \leqslant K$ za sve $x \in A$.

Primjer 16.1

Promotrimo funkciju $f\colon \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$ definiranu s $f(x) = \frac{1}{x}$. Za svaki $K > 0$ postoji $x \in \langle 0, 1\rangle$ t.d. je $f(x) > K$. Dakle, f nije omeđena iako je ona čak neprekidna.

Motivacija

Kolegij smo započeli diskusijom o omeđenosti neprekidne realne funkcije $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Cilj nam je dokazati ovu tvrdnju kao i njena poopćenja.

Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ proizvoljan skup a $f\colon A \to \mathbb{R}$ neka funkcija. Je li ona omeđena, tj. postoji li pozitivan broj K t.d. je $|f(x)| \leqslant K$ za sve $x \in A$?

1. korak: Ako je skup A konačan, $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, odgovor je DA, možemo npr. uzeti $K = \max\{|f(a_1)|, \dots, |f(a_n)|\}$.
2. korak: Općenitije, neka je $A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ konačna unija skupova takvih da je f omeđena na svakom od njih, tj. postoje pozitivni brojevi $K_1, \dots, K_n$ takvi da je $|f(x)| \leqslant K_j$ za sve $x \in A_j$ i sve $j = 1, \dots, n$. Uzmemo li $K = \max\{K_1, \dots, K_n\}$ bit će $|f(x)| \leqslant K$ za sve $x \in A$.

Primjer 16.1

Promotrimo funkciju $f\colon \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$ definiranu s $f(x) = \frac{1}{x}$. Za svaki $K > 0$ postoji $x \in \langle 0,1\rangle$ t.d. je $f(x) > K$. Dakle, f nije omeđena iako je ona čak neprekidna.

Motivacija

Kolegij smo započeli diskusijom o omeđenosti neprekidne realne funkcije $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Cilj nam je dokazati ovu tvrdnju kao i njena poopćenja.

Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ proizvoljan skup a $f\colon A \to \mathbb{R}$ neka funkcija. Je li ona omeđena, tj. postoji li pozitivan broj K t.d. je $|f(x)| \leqslant K$ za sve $x \in A$?

1. korak: Ako je skup A konačan, $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, odgovor je DA, možemo npr. uzeti $K = \max\{|f(a_1)|, \dots, |f(a_n)|\}$.
2. korak: Općenitije, neka je $A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ konačna unija skupova takvih da je f omeđena na svakom od njih, tj. postoje pozitivni brojevi $K_1, \dots, K_n$ takvi da je $|f(x)| \leqslant K_j$ za sve $x \in A_j$ i sve $j = 1, \dots, n$. Uzmemo li $K = \max\{K_1, \dots, K_n\}$ bit će $|f(x)| \leqslant K$ za sve $x \in A$.

Primjer 16.1

Promotrimo funkciju $f\colon \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$ definiranu s $f(x) = \frac{1}{x}$. Za svaki $K > 0$ postoji $x \in \langle 0,1\rangle$ t.d. je $f(x) > K$. Dakle, f nije omeđena iako je ona čak neprekidna.

Motivacija

Kolegij smo započeli diskusijom o omeđenosti neprekidne realne funkcije $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Cilj nam je dokazati ovu tvrdnju kao i njena poopćenja.

Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ proizvoljan skup a $f\colon A \to \mathbb{R}$ neka funkcija. Je li ona omeđena, tj. postoji li pozitivan broj K t.d. je $|f(x)| \leqslant K$ za sve $x \in A$?

1. korak: Ako je skup A konačan, $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, odgovor je DA, možemo npr. uzeti $K = \max\{|f(a_1)|, \dots, |f(a_n)|\}$.
2. korak: Općenitije, neka je $A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ konačna unija skupova takvih da je f omeđena na svakom od njih, tj. postoje pozitivni brojevi $K_1, \dots, K_n$ takvi da je $|f(x)| \leqslant K_j$ za sve $x \in A_j$ i sve $j = 1, \dots, n$. Uzmemo li $K = \max\{K_1, \dots, K_n\}$ bit će $|f(x)| \leqslant K$ za sve $x \in A$.

Primjer 16.1

Promotrimo funkciju $f\colon \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$ definiranu s $f(x) = \frac{1}{x}$. Za svaki $K > 0$ postoji $x \in \langle 0,1\rangle$ t.d. je $f(x) > K$. Dakle, f nije omeđena iako je ona čak neprekidna.

Lokalna omeđenost neprekidnih preslikavanja

3. korak: Ipak, ima neke koristi od neprekidnosti.

Teorem 16.2

Svako je neprekidno preslikavanje $f : X \to Y$ topološkog prostora X u metrički prostor Y lokalno omeđeno, tj. za svaku točku $x \in X$ postoji okolina $U \ni x$ takva da je $f(U)$ omeđen podskup od Y.

Dokaz: Za $x \in X$ i npr. $\varepsilon = 1$, zbog neprekidnosti preslikavanja f, postoji okolina $U \ni x$ takva da je $f(U) \subseteq K(f(x); 1)$. □

Dakle, ako je $A \subseteq \mathbb{R}$ i $f : A \to \mathbb{R}$ je neprekidna funkcija, onda za svaku točku $a \in A$ postoji $\delta > 0$ t.d. za $\forall x \in A$ vrijedi $|f(x) - f(a)| < 1$ čim je $|x - a| < \delta$, tj. $|f(x)| < 1 + |f(a)|$ za sve $x \in K(a; \delta) = \langle a - \delta, a + \delta \rangle$, pa je f omeđene na δ-okolini točke a.

Važno je uočiti da δ ovisi o a, pa ćemo ga označiti s δ_a.
Dakle, za svaki $x \in A$ je $K_a = 1 + |f(a)|$ gornja međa za $|f(x)|$ na okolini $K(a; \delta_a) = \langle a - \delta_a, a + \delta_a \rangle$ točke a.

Lokalna omeđenost neprekidnih preslikavanja

3. korak: Ipak, ima neke koristi od neprekidnosti.

Teorem 16.2

Svako je neprekidno preslikavanje $f: X \to Y$ topološkog prostora X u metrički prostor Y lokalno omeđeno, tj. za svaku točku $x \in X$ postoji okolina $U \ni x$ takva da je $f(U)$ omeđen podskup od Y.

Dokaz: Za $x \in X$ i npr. $\varepsilon = 1$, zbog neprekidnosti preslikavanja f, postoji okolina $U \ni x$ takva da je $f(U) \subseteq K\big(f(x);1\big)$. $\square$

Dakle, ako je $A \subseteq \mathbb{R}$ i $f: A \to \mathbb{R}$ je neprekidna funkcija, onda za svaku točku $a \in A$ postoji $\delta > 0$ t.d. za $\forall x \in A$ vrijedi $|f(x) - f(a)| < 1$ čim je $|x - a| < \delta$, tj. $|f(x)| < 1 + |f(a)|$ za sve $x \in K(a;\delta) = \langle a - \delta, a + \delta\rangle$, pa je f omeđene na δ-okolini točke a.

Važno je uočiti da δ ovisi o a, pa ćemo ga označiti s δ_a.
Dakle, za svaki $x \in A$ je $K_a = 1 + |f(a)|$ gornja međa za $|f(x)|$ na okolini $K(a;\delta_a) = \langle a - \delta_a, a + \delta_a\rangle$ točke a.

Lokalna omeđenost neprekidnih preslikavanja

3. korak: Ipak, ima neke koristi od neprekidnosti.

Teorem 16.2

Svako je neprekidno preslikavanje $f : X \to Y$ topološkog prostora X u metrički prostor Y lokalno omeđeno, tj. za svaku točku $x \in X$ postoji okolina $U \ni x$ takva da je $f(U)$ omeđen podskup od Y.

Dokaz: Za $x \in X$ i npr. $\varepsilon = 1$, zbog neprekidnosti preslikavanja f, postoji okolina $U \ni x$ takva da je $f(U) \subseteq K\big(f(x); 1\big)$. $\square$

Dakle, ako je $A \subseteq \mathbb{R}$ i $f : A \to \mathbb{R}$ je neprekidna funkcija, onda za svaku točku $a \in A$ postoji $\delta > 0$ t.d. za $\forall x \in A$ vrijedi $|f(x) - f(a)| < 1$ čim je $|x - a| < \delta$, tj. $|f(x)| < 1 + |f(a)|$ za sve $x \in K(a; \delta) = \langle a - \delta, a + \delta \rangle$, pa je f omeđene na δ-okolini točke a.

Važno je uočiti da δ ovisi o a, pa ćemo ga označiti s δ_a.
Dakle, za svaki $x \in A$ je $K_a = 1 + |f(a)|$ gornja međa za $|f(x)|$ na okolini $K(a; \delta_a) = \langle a - \delta_a, a + \delta_a \rangle$ točke a.

Lokalna omeđenost neprekidnih preslikavanja

3. korak: Ipak, ima neke koristi od neprekidnosti.

Teorem 16.2

Svako je neprekidno preslikavanje $f\colon X \to Y$ topološkog prostora X u metrički prostor Y lokalno omeđeno, tj. za svaku točku $x \in X$ postoji okolina $U \ni x$ takva da je $f(U)$ omeđen podskup od Y.

Dokaz: Za $x \in X$ i npr. $\varepsilon = 1$, zbog neprekidnosti preslikavanja f, postoji okolina $U \ni x$ takva da je $f(U) \subseteq K\big(f(x); 1\big)$. □

Dakle, ako je $A \subseteq \mathbb{R}$ i $f\colon A \to \mathbb{R}$ je neprekidna funkcija, onda za svaku točku $a \in A$ postoji $\delta > 0$ t.d. za $\forall x \in A$ vrijedi $|f(x) - f(a)| < 1$ čim je $|x - a| < \delta$, tj. $|f(x)| < 1 + |f(a)|$ za sve $x \in K(a; \delta) = \langle a - \delta, a + \delta\rangle$, pa je f omeđene na δ-okolini točke a.

Važno je uočiti da δ ovisi o a, pa ćemo ga označiti s δ_a.

Dakle, za svaki $x \in A$ je $K_a = 1 + |f(a)|$ gornja međa za $|f(x)|$ na okolini $K(a; \delta_a) = \langle a - \delta_a, a + \delta_a\rangle$ točke a.

Lokalna omeđenost neprekidnih preslikavanja

3. korak: Ipak, ima neke koristi od neprekidnosti.

Teorem 16.2

Svako je neprekidno preslikavanje $f\colon X \to Y$ topološkog prostora X u metrički prostor Y lokalno omeđeno, tj. za svaku točku $x \in X$ postoji okolina $U \ni x$ takva da je $f(U)$ omeđen podskup od Y.

Dokaz: Za $x \in X$ i npr. $\varepsilon = 1$, zbog neprekidnosti preslikavanja f, postoji okolina $U \ni x$ takva da je $f(U) \subseteq K\big(f(x); 1\big)$. $\square$

Dakle, ako je $A \subseteq \mathbb{R}$ i $f\colon A \to \mathbb{R}$ je neprekidna funkcija, onda za svaku točku $a \in A$ postoji $\delta > 0$ t.d. za $\forall x \in A$ vrijedi $|f(x) - f(a)| < 1$ čim je $|x - a| < \delta$, tj. $|f(x)| < 1 + |f(a)|$ za sve $x \in K(a; \delta) = \langle a - \delta, a + \delta \rangle$, pa je f omeđene na δ-okolini točke a.

Važno je uočiti da δ ovisi o a, pa ćemo ga označiti s δ_a.
Dakle, za svaki $x \in A$ je $K_a = 1 + |f(a)|$ gornja međa za $|f(x)|$ na okolini $K(a; \delta_a) = \langle a - \delta_a, a + \delta_a \rangle$ točke a.

Slučaj kada je A pokriven s konačno mnogo δ_a-okolina

4. korak Na početku smo pitali postoji li $K > 0$ koji je veći od $|f(x)|$ za sve $x \in A$. Za svaki $a \in A$ postoji K_a koji je „dobar" na δ_a-okolini točke a, ali općenito ne možemo uzeti najveći od tih brojeva jer skup svih K_a ne mora biti omeđen.

Ali, ako je dovoljno konačno mnogo δ_a-okolina da pokriju skup A, onda će maksimum pripadnih konačno mnogo K_a biti veći od $|f(x)|$ za sve $x \in A$, kao što smo željeli.

Dakle, ako je od, u principu beskonačno mnogo, δ_a-okolina koje su pokrivale domenu A neprekidne funkcije f, dovoljno već konačno mnogo njih da pokriju A, onda će funkcija f biti omeđena.

Drugim riječima, ovakvo svojstvo skupa A, da se iz svake familije okolina koje pokrivaju A može izdvojiti konačna potfamilija koja pokriva A, omogućuje da se lokalno svojstvo, lokalna omeđenost neprekidne funkcije, proširi do globalnog svojstva na cijeli skup A.

Slučaj kada je A pokriven s konačno mnogo δ_a-okolina

4. korak Na početku smo pitali postoji li $K > 0$ koji je veći od $|f(x)|$ za sve $x \in A$. Za svaki $a \in A$ postoji K_a koji je „dobar” na δ_a-okolini točke a, ali općenito ne možemo uzeti najveći od tih brojeva jer skup svih K_a ne mora biti omeđen.

Ali, ako je dovoljno konačno mnogo δ_a-okolina da pokriju skup A, onda će maksimum pripadnih konačno mnogo K_a biti veći od $|f(x)|$ za sve $x \in A$, kao što smo željeli.

Dakle, ako je od, u principu beskonačno mnogo, δ_a-okolina koje su pokrivale domenu A neprekidne funkcije f, dovoljno već konačno mnogo njih da pokriju A, onda će funkcija f biti omeđena.

Drugim riječima, ovakvo svojstvo skupa A, da se iz svake familije okolina koje pokrivaju A može izdvojiti konačna potfamilija koja pokriva A, omogućuje da se lokalno svojstvo, lokalna omeđenost neprekidne funkcije, proširi do globalnog svojstva na cijeli skup A.

Slučaj kada je A pokriven s konačno mnogo δ_a-okolina

4. korak Na početku smo pitali postoji li $K > 0$ koji je veći od $|f(x)|$ za sve $x \in A$. Za svaki $a \in A$ postoji K_a koji je „dobar” na δ_a-okolini točke a, ali općenito ne možemo uzeti najveći od tih brojeva jer skup svih K_a ne mora biti omeđen.

Ali, ako je dovoljno konačno mnogo δ_a-okolina da pokriju skup A, onda će maksimum pripadnih konačno mnogo K_a biti veći od $|f(x)|$ za sve $x \in A$, kao što smo željeli.

Dakle, ako je od, u principu beskonačno mnogo, δ_a-okolina koje su pokrivale domenu A neprekidne funkcije f, dovoljno već konačno mnogo njih da pokriju A, onda će funkcija f biti omeđena.

Drugim riječima, ovakvo svojstvo skupa A, da se iz svake familije okolina koje pokrivaju A može izdvojiti konačna potfamilija koja pokriva A, omogućuje da se lokalno svojstvo, lokalna omeđenost neprekidne funkcije, proširi do globalnog svojstva na cijeli skup A.

Slučaj kada je A pokriven s konačno mnogo δ_a-okolina

4. korak Na početku smo pitali postoji li $K > 0$ koji je veći od $|f(x)|$ za sve $x \in A$. Za svaki $a \in A$ postoji K_a koji je „dobar" na δ_a-okolini točke a, ali općenito ne možemo uzeti najveći od tih brojeva jer skup svih K_a ne mora biti omeđen.

Ali, ako je dovoljno konačno mnogo δ_a-okolina da pokriju skup A, onda će maksimum pripadnih konačno mnogo K_a biti veći od $|f(x)|$ za sve $x \in A$, kao što smo željeli.

Dakle, ako je od, u principu beskonačno mnogo, δ_a-okolina koje su pokrivale domenu A neprekidne funkcije f, dovoljno već konačno mnogo njih da pokriju A, onda će funkcija f biti omeđena.

Drugim riječima, ovakvo svojstvo skupa A, da se iz svake familije okolina koje pokrivaju A može izdvojiti konačna potfamilija koja pokriva A, omogućuje da se lokalno svojstvo, lokalna omeđenost neprekidne funkcije, proširi do globalnog svojstva na cijeli skup A.

Definicija kompaktnosti

Definicija 16.3

Otvoren pokrivač podskupa A topološkog prostora X je familija $\mathscr{U}$ otvorenih podskupova od X takva da je $A \subseteq \bigcup_{U \in \mathscr{U}} U$.
Pritom A može biti i cijeli prostor X.

Potpokrivač pokrivača $\mathscr{U}$ je svaka potfamilija $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}$ koja je i sama pokrivač skupa A, tj. $A \subseteq \bigcup_{U \in \mathscr{V}} U$.

Potpokrivač $\mathscr{V}$ je *konačan* ako je familija $\mathscr{V}$ konačna.

Definicija 16.4

Topološki prostor je *kompaktan* ako svaki njegov otvoren pokrivač ima konačan potpokrivač.

OPREZ Definicija kompaktnosti ne kaže da je prostor X kompaktan ako ima konačan otvoren pokrivač (svaki ima jednočlan otvoren pokrivač, $\{X\}$), nego da svaki otvoren pokrivač od X ima konačan potpokrivač.

Definicija kompaktnosti

Definicija 16.3

Otvoren pokrivač podskupa A topološkog prostora X je familija $\mathcal{U}$ otvorenih podskupova od X takva da je $A \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$.
Pritom A može biti i cijeli prostor X.

Potpokrivač pokrivača $\mathcal{U}$ je svaka potfamilija $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ koja je i sama pokrivač skupa A, tj. $A \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{V}} U$.

Potpokrivač $\mathcal{V}$ je *konačan* ako je familija $\mathcal{V}$ konačna.

Definicija 16.4

Topološki prostor je *kompaktan* ako svaki njegov otvoren pokrivač ima konačan potpokrivač.

OPREZ Definicija kompaktnosti ne kaže da je prostor X kompaktan ako ima konačan otvoren pokrivač (svaki ima jednočlan otvoren pokrivač, $\{X\}$), nego da svaki otvoren pokrivač od X ima konačan potpokrivač.

Definicija kompaktnosti

Definicija 16.3

Otvoren pokrivač podskupa A topološkog prostora X je familija $\mathscr{U}$ otvorenih podskupova od X takva da je $A \subseteq \bigcup_{U \in \mathscr{U}} U$.
Pritom A može biti i cijeli prostor X.

Potpokrivač pokrivača $\mathscr{U}$ je svaka potfamilija $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}$ koja je i sama pokrivač skupa A, tj. $A \subseteq \bigcup_{U \in \mathscr{V}} U$.
Potpokrivač $\mathscr{V}$ je *konačan* ako je familija $\mathscr{V}$ konačna.

Definicija 16.4

Topološki prostor je *kompaktan* ako svaki njegov otvoren pokrivač ima konačan potpokrivač.

OPREZ Definicija kompaktnosti ne kaže da je prostor X kompaktan ako ima konačan otvoren pokrivač (svaki ima jednočlan otvoren pokrivač, $\{X\}$), nego da svaki otvoren pokrivač od X ima konačan potpokrivač.

Definicija kompaktnosti

Definicija 16.3

Otvoren pokrivač podskupa A topološkog prostora X je familija $\mathscr{U}$ otvorenih podskupova od X takva da je $A \subseteq \bigcup_{U \in \mathscr{U}} U$.
Pritom A može biti i cijeli prostor X.

Potpokrivač pokrivača $\mathscr{U}$ je svaka potfamilija $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}$ koja je i sama pokrivač skupa A, tj. $A \subseteq \bigcup_{U \in \mathscr{V}} U$.

Potpokrivač $\mathscr{V}$ je *konačan* ako je familija $\mathscr{V}$ konačna.

Definicija 16.4

Topološki prostor je *kompaktan* ako svaki njegov otvoren pokrivač ima konačan potpokrivač.

OPREZ Definicija kompaktnosti ne kaže da je prostor X kompaktan ako ima konačan otvoren pokrivač (svaki ima jednočlan otvoren pokrivač, $\{X\}$), nego da svaki otvoren pokrivač od X ima konačan potpokrivač.

Definicija kompaktnosti

Definicija 16.3

Otvoren pokrivač podskupa A topološkog prostora X je familija $\mathscr{U}$ otvorenih podskupova od X takva da je $A \subseteq \bigcup_{U \in \mathscr{U}} U$.
Pritom A može biti i cijeli prostor X.

Potpokrivač pokrivača $\mathscr{U}$ je svaka potfamilija $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}$ koja je i sama pokrivač skupa A, tj. $A \subseteq \bigcup_{U \in \mathscr{V}} U$.

Potpokrivač $\mathscr{V}$ je *konačan* ako je familija $\mathscr{V}$ konačna.

Definicija 16.4

Topološki prostor je *kompaktan* ako svaki njegov otvoren pokrivač ima konačan potpokrivač.

OPREZ Definicija kompaktnosti ne kaže da je prostor X kompaktan ako ima konačan otvoren pokrivač (svaki ima jednočlan otvoren pokrivač, $\{X\}$), nego da svaki otvoren pokrivač od X ima konačan potpokrivač.

Otvoren interval nije kompaktan

Primjer 16.5 (Otvoren interval $\langle 0, 1\rangle$ *nije* kompaktan)

Naravno da postoje otvoreni pokrivači intervala $\langle 0, 1\rangle$ koji imaju konačne potpokrivače. Ali postoje i oni koji nemaju. Naprimjer, familija $\mathscr{U} = \left\{\langle \frac{1}{n}, 1\rangle : n \in \mathbb{N}\right\}$ je otvoren pokrivač intervala $\langle 0, 1\rangle$ jer je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \langle \frac{1}{n}, 1\rangle = \langle 0, 1\rangle$, ali ne postoji konačna potfamilija od $\mathscr{U}$ koja je dovoljna da pokrije $\langle 0, 1\rangle$.

S druge strane, uskoro ćemo pokazati da je svaki zatvoren interval, tj. segment, kompaktan.

Diskusija kojom smo započeli i motivirali definiciju kompaktnosti pokazuje kako je svaka neprekidna realna funkcija s kompaktnom domenom, omeđena.

Otvoren interval nije kompaktan

Primjer 16.5 (Otvoren interval $\langle 0,1\rangle$ *nije* kompaktan)

Naravno da postoje otvoreni pokrivači intervala $\langle 0,1\rangle$ koji imaju konačne potpokrivače. Ali postoje i oni koji nemaju. Naprimjer, familija $\mathscr{U} = \left\{\langle \frac{1}{n}, 1\rangle : n \in \mathbb{N}\right\}$ je otvoren pokrivač intervala $\langle 0,1\rangle$ jer je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\langle \frac{1}{n}, 1\rangle = \langle 0,1\rangle$, ali ne postoji konačna potfamilija od $\mathscr{U}$ koja je dovoljna da pokrije $\langle 0,1\rangle$.

S druge strane, uskoro ćemo pokazati da je svaki zatvoren interval, tj. segment, kompaktan.

Diskusija kojom smo započeli i motivirali definiciju kompaktnosti pokazuje kako je svaka neprekidna realna funkcija s kompaktnom domenom, omeđena.

Otvoren interval nije kompaktan

Primjer 16.5 (Otvoren interval $\langle 0, 1\rangle$ *nije* kompaktan)

Naravno da postoje otvoreni pokrivači intervala $\langle 0, 1\rangle$ koji imaju konačne potpokrivače. Ali postoje i oni koji nemaju. Naprimjer, familija $\mathcal{U} = \left\{\langle \frac{1}{n}, 1\rangle : n \in \mathbb{N}\right\}$ je otvoren pokrivač intervala $\langle 0, 1\rangle$ jer je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\langle \frac{1}{n}, 1\rangle = \langle 0, 1\rangle$, ali ne postoji konačna potfamilija od $\mathcal{U}$ koja je dovoljna da pokrije $\langle 0, 1\rangle$.

S druge strane, uskoro ćemo pokazati da je svaki zatvoren interval, tj. segment, kompaktan.

Diskusija kojom smo započeli i motivirali definiciju kompaktnosti pokazuje kako je svaka neprekidna realna funkcija s kompaktnom domenom, omeđena.

Dva citata

Evo kako E. Hewitt komentira kompaktnost u članku *The role of compactness in analysis*, Amer. Math. Monthly, **67** (1960), 499–516 (u slobodnom prijevodu):

Kompaktnost je zamjena za konačnost, pogodna za proučavanje neprekidnosti. Mnoge tvrdnje o funkcijama $X \to Y$ su:

- istinite i trivijalne ako je skup X konačan;
- istinite za neprekidne funkcije ako je X kompaktan;
- neistinite ili vrlo teške za dokazati, čak i za neprekidne funkcije, ako X nije kompaktan.

A Herman Weyl, jedan od najpoznatijih matematičara 20. stoljeća, komentirajući kompaktne podskupove ravnine, kaže: Kada bi grad bio kompaktan, bio bi dovoljan konačan broj ma kako kratkovidnih policajaca, da održava red.

Dva citata

Evo kako E. Hewitt komentira kompaktnost u članku *The role of compactness in analysis*, Amer. Math. Monthly, **67** (1960), 499–516 (u slobodnom prijevodu):

Kompaktnost je zamjena za konačnost, pogodna za proučavanje neprekidnosti. Mnoge tvrdnje o funkcijama $X \to Y$ su:

- istinite i trivijalne ako je skup X konačan;
- istinite za neprekidne funkcije ako je X kompaktan;
- neistinite ili vrlo teške za dokazati, čak i za neprekidne funkcije, ako X nije kompaktan.

A Herman Weyl, jedan od najpoznatijih matematičara 20. stoljeća, komentirajući kompaktne podskupove ravnine, kaže: Kada bi grad bio kompaktan, bio bi dovoljan konačan broj ma kako kratkovidnih policajaca, da održava red.

Dva citata

Evo kako E. Hewitt komentira kompaktnost u članku *The role of compactness in analysis*, Amer. Math. Monthly, **67** (1960), 499–516 (u slobodnom prijevodu):

Kompaktnost je zamjena za konačnost, pogodna za proučavanje neprekidnosti. Mnoge tvrdnje o funkcijama $X \to Y$ su:

- istinite i trivijalne ako je skup X konačan;
- istinite za neprekidne funkcije ako je X kompaktan;
- neistinite ili vrlo teške za dokazati, čak i za neprekidne funkcije, ako X nije kompaktan.

A Herman Weyl, jedan od najpoznatijih matematičara 20. stoljeća, komentirajući kompaktne podskupove ravnine, kaže: Kada bi grad bio kompaktan, bio bi dovoljan konačan broj ma kako kratkovidnih policajaca, da održava red.

Segmenti su kompaktni

Teorem 17.1

Svaki segment $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ je kompaktan.

Postoje različiti dokazi ove prevažne i ne sasvim trivijalne činjenice. Prikazat ćemo dva dokaza.

1. dokaz: Neka je $\mathscr{U}$ proizvoljan pokrivač segmenta $[a, b]$ otvorenim podskupovima od $\mathbb{R}$, i neka je
$C = \{x \geqslant a : [a, x] \text{ je pokriven nekom konačnom potfamilijom od } \mathscr{U}\}$.
Trebamo pokazati da je $b \in C$. Primijetimo najprije da

$$\text{ako je } x \in C \text{ i } a \leqslant y \leqslant x, \text{ onda je i } y \in C. \qquad (*)$$

Nadalje, $C \neq \emptyset$, štoviše, postoji $\delta > 0$ t.d. je $[a, a + \delta\rangle \subseteq C$.
Zaista, postoji $U \in \mathscr{U}$ t.d. je $a \in U$, a kako je U otvoren, postoji $\delta > 0$ t.d. je $[a, a + \delta\rangle \subseteq U$, pa je i $[a, x] \subseteq U$ za sve $x \in [a, a + \delta\rangle$.
Znači, za svaki $x \in [a, a + \delta\rangle$ je $[a, x]$ pokriven jednočlanom familijom $\{U\}$, pa je $[a, a + \delta\rangle \subseteq C$.

Segmenti su kompaktni

Teorem 17.1

Svaki segment $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ *je kompaktan.*

Postoje različiti dokazi ove prevažne i ne sasvim trivijalne činjenice. Prikazat ćemo dva dokaza.

1. dokaz: Neka je $\mathscr{U}$ proizvoljan pokrivač segmenta $[a, b]$ otvorenim podskupovima od $\mathbb{R}$, i neka je
$C = \{x \geqslant a : [a, x]$ je pokriven nekom konačnom potfamilijom od $\mathscr{U}\}$.
Trebamo pokazati da je $b \in C$. Primijetimo najprije da

$$\text{ako je } x \in C \text{ i } a \leqslant y \leqslant x, \text{ onda je i } y \in C. \qquad (*)$$

Nadalje, $C \neq \emptyset$, štoviše, postoji $\delta > 0$ t.d. je $[a, a + \delta\rangle \subseteq C$.
Zaista, postoji $U \in \mathscr{U}$ t.d. je $a \in U$, a kako je U otvoren, postoji $\delta > 0$ t.d. je $[a, a + \delta\rangle \subseteq U$, pa je i $[a, x] \subseteq U$ za sve $x \in [a, a + \delta\rangle$.
Znači, za svaki $x \in [a, a + \delta\rangle$ je $[a, x]$ pokriven jednočlanom familijom $\{U\}$, pa je $[a, a + \delta\rangle \subseteq C$.

Segmenti su kompaktni

Teorem 17.1

Svaki segment $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ *je kompaktan.*

Postoje različiti dokazi ove prevažne i ne sasvim trivijalne činjenice. Prikazat ćemo dva dokaza.

1. dokaz: Neka je $\mathscr{U}$ proizvoljan pokrivač segmenta $[a, b]$ otvorenim podskupovima od $\mathbb{R}$, i neka je
$C = \{x \geqslant a : [a, x]$ je pokriven nekom konačnom potfamilijom od $\mathscr{U}\}$.
Trebamo pokazati da je $b \in C$. Primijetimo najprije da

$$\text{ako je } x \in C \text{ i } a \leqslant y \leqslant x, \text{ onda je i } y \in C. \qquad (*)$$

Nadalje, $C \neq \emptyset$, štoviše, postoji $\delta > 0$ t.d. je $[a, a+\delta\rangle \subseteq C$.
Zaista, postoji $U \in \mathscr{U}$ t.d. je $a \in U$, a kako je U otvoren, postoji $\delta > 0$ t.d. je $[a, a+\delta\rangle \subseteq U$, pa je i $[a, x] \subseteq U$ za sve $x \in [a, a+\delta\rangle$.
Znači, za svaki $x \in [a, a+\delta\rangle$ je $[a, x]$ pokriven jednočlanom familijom $\{U\}$, pa je $[a, a+\delta\rangle \subseteq C$.

Segmenti su kompaktni

Teorem 17.1

Svaki segment $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ je kompaktan.

Postoje različiti dokazi ove prevažne i ne sasvim trivijalne činjenice. Prikazat ćemo dva dokaza.

1. dokaz: Neka je $\mathscr{U}$ proizvoljan pokrivač segmenta $[a, b]$ otvorenim podskupovima od $\mathbb{R}$, i neka je
$C = \{x \geqslant a : [a, x]$ je pokriven nekom konačnom potfamilijom od $\mathscr{U}\}$.
Trebamo pokazati da je $b \in C$. Primijetimo najprije da

$$\text{ako je } x \in C \text{ i } a \leqslant y \leqslant x, \text{ onda je i } y \in C. \qquad (*)$$

Nadalje, $C \neq \emptyset$, štoviše, postoji $\delta > 0$ t.d. je $[a, a+\delta\rangle \subseteq C$.
Zaista, postoji $U \in \mathscr{U}$ t.d. je $a \in U$, a kako je U otvoren, postoji $\delta > 0$ t.d. je $[a, a+\delta\rangle \subseteq U$, pa je i $[a, x] \subseteq U$ za sve $x \in [a, a+\delta\rangle$.
Znači, za svaki $x \in [a, a+\delta\rangle$ je $[a, x]$ pokriven jednočlanom familijom $\{U\}$, pa je $[a, a+\delta\rangle \subseteq C$.

Segmenti su kompaktni

Teorem 17.1

Svaki segment $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ je kompaktan.

Postoje različiti dokazi ove prevažne i ne sasvim trivijalne činjenice. Prikazat ćemo dva dokaza.

1\. dokaz: Neka je $\mathscr{U}$ proizvoljan pokrivač segmenta $[a, b]$ otvorenim podskupovima od $\mathbb{R}$, i neka je
$C = \{x \geqslant a : [a, x]$ je pokriven nekom konačnom potfamilijom od $\mathscr{U}\}$.
Trebamo pokazati da je $b \in C$. Primijetimo najprije da

$$\text{ako je } x \in C \text{ i } a \leqslant y \leqslant x, \text{ onda je i } y \in C. \qquad (*)$$

Nadalje, $C \neq \emptyset$, štoviše, postoji $\delta > 0$ t.d. je $[a, a+\delta\rangle \subseteq C$.
Zaista, postoji $U \in \mathscr{U}$ t.d. je $a \in U$, a kako je U otvoren, postoji $\delta > 0$ t.d. je $[a, a+\delta\rangle \subseteq U$, pa je i $[a, x] \subseteq U$ za sve $x \in [a, a+\delta\rangle$.
Znači, za svaki $x \in [a, a+\delta\rangle$ je $[a, x]$ pokriven jednočlanom familijom $\{U\}$, pa je $[a, a+\delta\rangle \subseteq C$.

Segmenti su kompaktni

Teorem 17.1

Svaki segment $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ je kompaktan.

Postoje različiti dokazi ove prevažne i ne sasvim trivijalne činjenice. Prikazat ćemo dva dokaza.

1. dokaz: Neka je $\mathcal{U}$ proizvoljan pokrivač segmenta $[a, b]$ otvorenim podskupovima od $\mathbb{R}$, i neka je
$C = \{x \geqslant a : [a, x]$ je pokriven nekom konačnom potfamilijom od $\mathcal{U}\}$.
Trebamo pokazati da je $b \in C$. Primijetimo najprije da

$$\text{ako je } x \in C \text{ i } a \leqslant y \leqslant x, \text{ onda je i } y \in C. \qquad (*)$$

Nadalje, $C \neq \emptyset$, štoviše, postoji $\delta > 0$ t.d. je $[a, a+\delta\rangle \subseteq C$.
Zaista, postoji $U \in \mathcal{U}$ t.d. je $a \in U$, a kako je U otvoren, postoji $\delta > 0$ t.d. je $[a, a+\delta\rangle \subseteq U$, pa je i $[a, x] \subseteq U$ za sve $x \in [a, a+\delta\rangle$.
Znači, za svaki $x \in [a, a+\delta\rangle$ je $[a, x]$ pokriven jednočlanom familijom $\{U\}$, pa je $[a, a+\delta\rangle \subseteq C$.

Završetak 1. dokaza kompaktnosti segmenta

Ako C nije omeđen odozgo onda postoji $c \in C$ t.d. je $c > b$, pa je prema $(*)$ i $b \in C$, čime je teorem dokazan.

Ako C je omeđen odozgo, prema aksiomu potpunosti, postoji $s = \sup C$. Ako je $s > b$ onda postoji $c \in C$ t.d. je $c > b$, pa je opet $b \in C$.

Pretpostavimo da je $s \leqslant b$. Zbog $[a, a+\delta\rangle \subseteq C$ je $s > a$. Ali kako je $s \in [a, b]$, postoji $V \in \mathcal{U}$ t.d. je $s \in V$, a kako je V otvoren, postoji $0 < \varepsilon < s - a$ t.d. je $\langle s-\varepsilon, s+\varepsilon\rangle \subseteq V$. Kako je s najmanja gornja međa skupa C, postoji $c \in C$ t.d. je $c > s - \varepsilon$. To znači da postoji konačna potfamilija $\{U_1, \ldots, U_k\} \subseteq \mathcal{U}$ koja pokriva $[a, c]$, pa familija $\{U_1, \ldots, U_k, V\}$ pokriva $[a, s+\varepsilon\rangle$, dakle i $[a, s + \frac{1}{2}\varepsilon]$, u kontradikciji s činjenicom da je $s = \sup C$.

Mora dakle biti $s > b$, što zbog $(*)$ dokazuje teorem. $\square$

Završetak 1. dokaza kompaktnosti segmenta

Ako C nije omeđen odozgo onda postoji $c \in C$ t.d. je $c > b$, pa je prema $(*)$ i $b \in C$, čime je teorem dokazan.
Ako C je omeđen odozgo, prema aksiomu potpunosti, postoji $s = \sup C$.
Ako je $s > b$ onda postoji $c \in C$ t.d. je $c > b$, pa je opet $b \in C$.

Pretpostavimo da je $s \leqslant b$. Zbog $[a, a + \delta\rangle \subseteq C$ je $s > a$.
Ali kako je $s \in [a, b]$, postoji $V \in \mathscr{U}$ t.d. je $s \in V$, a kako je V otvoren, postoji $0 < \varepsilon < s - a$ t.d. je $\langle s - \varepsilon, s + \varepsilon\rangle \subseteq V$. Kako je s najmanja gornja međa skupa C, postoji $c \in C$ t.d. je $c > s - \varepsilon$.
To znači da postoji konačna potfamilija $\{U_1, \ldots, U_k\} \subseteq \mathscr{U}$ koja pokriva $[a, c]$, pa familija $\{U_1, \ldots, U_k, V\}$ pokriva $[a, s + \varepsilon\rangle$, dakle i $[a, s + \frac{1}{2}\varepsilon]$, u kontradikciji s činjenicom da je $s = \sup C$.

Mora dakle biti $s > b$, što zbog $(*)$ dokazuje teorem. $\square$

Završetak 1. dokaza kompaktnosti segmenta

Ako C nije omeđen odozgo onda postoji $c \in C$ t.d. je $c > b$, pa je prema $(*)$ i $b \in C$, čime je teorem dokazan.
Ako C je omeđen odozgo, prema aksiomu potpunosti, postoji $s = \sup C$.
Ako je $s > b$ onda postoji $c \in C$ t.d. je $c > b$, pa je opet $b \in C$.

Pretpostavimo da je $s \leqslant b$. Zbog $[a, a+\delta\rangle \subseteq C$ je $s > a$.
Ali kako je $s \in [a, b]$, postoji $V \in \mathscr{U}$ t.d. je $s \in V$, a kako je V otvoren, postoji $0 < \varepsilon < s - a$ t.d. je $\langle s-\varepsilon, s+\varepsilon\rangle \subseteq V$. Kako je s najmanja gornja međa skupa C, postoji $c \in C$ t.d. je $c > s - \varepsilon$.
To znači da postoji konačna potfamilija $\{U_1, \ldots, U_k\} \subseteq \mathscr{U}$ koja pokriva $[a, c]$, pa familija $\{U_1, \ldots, U_k, V\}$ pokriva $[a, s+\varepsilon\rangle$, dakle i $[a, s+\frac{1}{2}\varepsilon]$, u kontradikciji s činjenicom da je $s = \sup C$.

Mora dakle biti $s > b$, što zbog $(*)$ dokazuje teorem. $\square$

Završetak 1. dokaza kompaktnosti segmenta

Ako C nije omeđen odozgo onda postoji $c \in C$ t.d. je $c > b$, pa je prema $(*)$ i $b \in C$, čime je teorem dokazan.
Ako C je omeđen odozgo, prema aksiomu potpunosti, postoji $s = \sup C$.
Ako je $s > b$ onda postoji $c \in C$ t.d. je $c > b$, pa je opet $b \in C$.

Pretpostavimo da je $s \leqslant b$. Zbog $[a, a + \delta\rangle \subseteq C$ je $s > a$.
Ali kako je $s \in [a, b]$, postoji $V \in \mathcal{U}$ t.d. je $s \in V$, a kako je V otvoren, postoji $0 < \varepsilon < s - a$ t.d. je $\langle s - \varepsilon, s + \varepsilon\rangle \subseteq V$. Kako je s najmanja gornja međa skupa C, postoji $c \in C$ t.d. je $c > s - \varepsilon$.
To znači da postoji konačna potfamilija $\{U_1, \dots, U_k\} \subseteq \mathcal{U}$ koja pokriva $[a, c]$, pa familija $\{U_1, \dots, U_k, V\}$ pokriva $[a, s + \varepsilon\rangle$, dakle i $[a, s + \frac{1}{2}\varepsilon]$, u kontradikciji s činjenicom da je $s = \sup C$.

Mora dakle biti $s > b$, što zbog $(*)$ dokazuje teorem. $\square$

Završetak 1. dokaza kompaktnosti segmenta

Ako C nije omeđen odozgo onda postoji $c \in C$ t.d. je $c > b$, pa je prema $(*)$ i $b \in C$, čime je teorem dokazan.
Ako C je omeđen odozgo, prema aksiomu potpunosti, postoji $s = \sup C$.
Ako je $s > b$ onda postoji $c \in C$ t.d. je $c > b$, pa je opet $b \in C$.

Pretpostavimo da je $s \leqslant b$. Zbog $[a, a+\delta\rangle \subseteq C$ je $s > a$.
Ali kako je $s \in [a, b]$, postoji $V \in \mathcal{U}$ t.d. je $s \in V$, a kako je V otvoren, postoji $0 < \varepsilon < s - a$ t.d. je $\langle s-\varepsilon, s+\varepsilon\rangle \subseteq V$. Kako je s najmanja gornja međa skupa C, postoji $c \in C$ t.d. je $c > s - \varepsilon$. To znači da postoji konačna potfamilija $\{U_1, \dots, U_k\} \subseteq \mathcal{U}$ koja pokriva $[a, c]$, pa familija $\{U_1, \dots, U_k, V\}$ pokriva $[a, s+\varepsilon\rangle$, dakle i $[a, s+\frac{1}{2}\varepsilon]$, u kontradikciji s činjenicom da je $s = \sup C$.

Mora dakle biti $s > b$, što zbog $(*)$ dokazuje teorem. $\square$

Završetak 1. dokaza kompaktnosti segmenta

Ako C nije omeđen odozgo onda postoji $c \in C$ t.d. je $c > b$, pa je prema $(*)$ i $b \in C$, čime je teorem dokazan.
Ako C je omeđen odozgo, prema aksiomu potpunosti, postoji $s = \sup C$.
Ako je $s > b$ onda postoji $c \in C$ t.d. je $c > b$, pa je opet $b \in C$.

Pretpostavimo da je $s \leqslant b$. Zbog $[a, a+\delta\rangle \subseteq C$ je $s > a$.
Ali kako je $s \in [a, b]$, postoji $V \in \mathcal{U}$ t.d. je $s \in V$, a kako je V otvoren, postoji $0 < \varepsilon < s - a$ t.d. je $\langle s-\varepsilon, s+\varepsilon\rangle \subseteq V$. Kako je s najmanja gornja međa skupa C, postoji $c \in C$ t.d. je $c > s - \varepsilon$.
To znači da postoji konačna potfamilija $\{U_1, \dots, U_k\} \subseteq \mathcal{U}$ koja pokriva $[a, c]$, pa familija $\{U_1, \dots, U_k, V\}$ pokriva $[a, s+\varepsilon\rangle$, dakle i $[a, s + \frac{1}{2}\varepsilon]$, u kontradikciji s činjenicom da je $s = \sup C$.

Mora dakle biti $s > b$, što zbog $(*)$ dokazuje teorem. $\square$

Završetak 1. dokaza kompaktnosti segmenta

Ako C nije omeđen odozgo onda postoji $c \in C$ t.d. je $c > b$, pa je prema $(*)$ i $b \in C$, čime je teorem dokazan.
Ako C je omeđen odozgo, prema aksiomu potpunosti, postoji $s = \sup C$.
Ako je $s > b$ onda postoji $c \in C$ t.d. je $c > b$, pa je opet $b \in C$.

Pretpostavimo da je $s \leqslant b$. Zbog $[a, a+\delta\rangle \subseteq C$ je $s > a$.
Ali kako je $s \in [a, b]$, postoji $V \in \mathscr{U}$ t.d. je $s \in V$, a kako je V otvoren, postoji $0 < \varepsilon < s - a$ t.d. je $\langle s-\varepsilon, s+\varepsilon\rangle \subseteq V$. Kako je s najmanja gornja međa skupa C, postoji $c \in C$ t.d. je $c > s - \varepsilon$.
To znači da postoji konačna potfamilija $\{U_1, \ldots, U_k\} \subseteq \mathscr{U}$ koja pokriva $[a, c]$, pa familija $\{U_1, \ldots, U_k, V\}$ pokriva $[a, s+\varepsilon\rangle$, dakle i $[a, s+\frac{1}{2}\varepsilon]$, u kontradikciji s činjenicom da je $s = \sup C$.

Mora dakle biti $s > b$, što zbog $(*)$ dokazuje teorem. $\square$

Završetak 1. dokaza kompaktnosti segmenta

Ako C nije omeđen odozgo onda postoji $c \in C$ t.d. je $c > b$, pa je prema $(*)$ i $b \in C$, čime je teorem dokazan.
Ako C je omeđen odozgo, prema aksiomu potpunosti, postoji $s = \sup C$.
Ako je $s > b$ onda postoji $c \in C$ t.d. je $c > b$, pa je opet $b \in C$.

Pretpostavimo da je $s \leqslant b$. Zbog $[a, a + \delta\rangle \subseteq C$ je $s > a$.
Ali kako je $s \in [a, b]$, postoji $V \in \mathcal{U}$ t.d. je $s \in V$, a kako je V otvoren, postoji $0 < \varepsilon < s - a$ t.d. je $\langle s - \varepsilon, s + \varepsilon\rangle \subseteq V$. Kako je s najmanja gornja međa skupa C, postoji $c \in C$ t.d. je $c > s - \varepsilon$.
To znači da postoji konačna potfamilija $\{U_1, \dots, U_k\} \subseteq \mathcal{U}$ koja pokriva $[a, c]$, pa familija $\{U_1, \dots, U_k, V\}$ pokriva $[a, s + \varepsilon\rangle$, dakle i $[a, s + \frac{1}{2}\varepsilon]$, u kontradikciji s činjenicom da je $s = \sup C$.

Mora dakle biti $s > b$, što zbog $(*)$ dokazuje teorem. $\square$

Završetak 1. dokaza kompaktnosti segmenta

Ako C nije omeđen odozgo onda postoji $c \in C$ t.d. je $c > b$, pa je prema $(*)$ i $b \in C$, čime je teorem dokazan.
Ako C je omeđen odozgo, prema aksiomu potpunosti, postoji $s = \sup C$.
Ako je $s > b$ onda postoji $c \in C$ t.d. je $c > b$, pa je opet $b \in C$.

Pretpostavimo da je $s \leqslant b$. Zbog $[a, a + \delta\rangle \subseteq C$ je $s > a$.
Ali kako je $s \in [a, b]$, postoji $V \in \mathscr{U}$ t.d. je $s \in V$, a kako je V otvoren, postoji $0 < \varepsilon < s - a$ t.d. je $\langle s - \varepsilon, s + \varepsilon\rangle \subseteq V$. Kako je s najmanja gornja međa skupa C, postoji $c \in C$ t.d. je $c > s - \varepsilon$.
To znači da postoji konačna potfamilija $\{U_1, \ldots, U_k\} \subseteq \mathscr{U}$ koja pokriva $[a, c]$, pa familija $\{U_1, \ldots, U_k, V\}$ pokriva $[a, s + \varepsilon\rangle$, dakle i $[a, s + \frac{1}{2}\varepsilon]$, u kontradikciji s činjenicom da je $s = \sup C$.

Mora dakle biti $s > b$, što zbog $(*)$ dokazuje teorem. $\square$

2. dokaz kompaktnosti segmenta

2. dokaz: Pretpostavimo da je $\mathscr{U}$ otvoren pokrivač segmenta $[a, b]$ koji nema konačan potpokrivač, i neka je $c = \frac{a+b}{2}$. Tada se barem jedan od podsegmenata $[a, c]$ i $[c, b]$ ne može pokriti nekom konačnom potfamilijom od $\mathscr{U}$. Označimo takav segment $[a_1, b_1]$. Ponavljajući postupak, dolazimo do nizova (a_n) i (b_n) takvih da je $a_{n-1} \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_{n-1}$ za sve n, i $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, i da segment $[a_n, b_n]$ nije pokriven nikojom konačnom potfamilijom od $\mathscr{U}$. Kako su nizovi (a_n) i (b_n) monotoni i ograđeni, oni konvergiraju, a jer je $\lim(b_n - a_n) = 0$, oba konvergiraju zajedničkoj vrijednosti $\ell \in [a, b]$.

Neka je $U \in \mathscr{U}$ t.d. je $\ell \in U$.
Kako je U otvoren, postoji $\varepsilon > 0$ t.d. je $\langle \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon \rangle \subseteq U$.
Ali, nizovi (a_n) i (b_n) konvergiraju k ℓ, pa postoji $n \in \mathbb{N}$ za koji su $a_n, b_n \in \langle \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon \rangle \subseteq U$, te je segment $[a_n, b_n]$ pokriven jednočlanom potfamilijom $\{U\} \subseteq \mathscr{U}$. $\square$

2. dokaz kompaktnosti segmenta

2. dokaz: Pretpostavimo da je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač segmenta $[a, b]$ koji nema konačan potpokrivač, i neka je $c = \frac{a+b}{2}$. Tada se barem jedan od podsegmenata $[a, c]$ i $[c, b]$ ne može pokriti nekom konačnom potfamilijom od $\mathcal{U}$. Označimo takav segment $[a_1, b_1]$.

Ponavljajući postupak, dolazimo do nizova (a_n) i (b_n) takvih da je $a_{n-1} \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_{n-1}$ za sve n, i $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, i da segment $[a_n, b_n]$ nije pokriven nikojom konačnom potfamilijom od $\mathcal{U}$.

Kako su nizovi (a_n) i (b_n) monotoni i ograđeni, oni konvergiraju, a jer je $\lim(b_n - a_n) = 0$, oba konvergiraju zajedničkoj vrijednosti $\ell \in [a, b]$.

Neka je $U \in \mathcal{U}$ t.d. je $\ell \in U$.

Kako je U otvoren, postoji $\varepsilon > 0$ t.d. je $\langle \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon \rangle \subseteq U$.

Ali, nizovi (a_n) i (b_n) konvergiraju k ℓ, pa postoji $n \in \mathbb{N}$ za koji su $a_n, b_n \in \langle \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon \rangle \subseteq U$, te je segment $[a_n, b_n]$ pokriven jednočlanom potfamilijom $\{U\} \subseteq \mathcal{U}$. $\square$

2. dokaz kompaktnosti segmenta

2. dokaz: Pretpostavimo da je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač segmenta $[a, b]$ koji nema konačan potpokrivač, i neka je $c = \frac{a+b}{2}$. Tada se barem jedan od podsegmenata $[a, c]$ i $[c, b]$ ne može pokriti nekom konačnom potfamilijom od $\mathcal{U}$. Označimo takav segment $[a_1, b_1]$. Ponavljajući postupak, dolazimo do nizova (a_n) i (b_n) takvih da je $a_{n-1} \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_{n-1}$ za sve n, i $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, i da segment $[a_n, b_n]$ nije pokriven nikojom konačnom potfamilijom od $\mathcal{U}$.

Kako su nizovi (a_n) i (b_n) monotoni i ograđeni, oni konvergiraju, a jer je $\lim(b_n - a_n) = 0$, oba konvergiraju zajedničkoj vrijednosti $\ell \in [a, b]$.

Neka je $U \in \mathcal{U}$ t.d. je $\ell \in U$.
Kako je U otvoren, postoji $\varepsilon > 0$ t.d. je $\langle \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon \rangle \subseteq U$.

Ali, nizovi (a_n) i (b_n) konvergiraju k ℓ, pa postoji $n \in \mathbb{N}$ za koji su $a_n, b_n \in \langle \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon \rangle \subseteq U$, te je segment $[a_n, b_n]$ pokriven jednočlanom potfamilijom $\{U\} \subseteq \mathcal{U}$. $\square$

2. dokaz kompaktnosti segmenta

2. dokaz: Pretpostavimo da je $\mathscr{U}$ otvoren pokrivač segmenta $[a, b]$ koji nema konačan potpokrivač, i neka je $c = \frac{a+b}{2}$. Tada se barem jedan od podsegmenata $[a, c]$ i $[c, b]$ ne može pokriti nekom konačnom potfamilijom od $\mathscr{U}$. Označimo takav segment $[a_1, b_1]$.
Ponavljajući postupak, dolazimo do nizova (a_n) i (b_n) takvih da je $a_{n-1} \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_{n-1}$ za sve n, i $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, i da segment $[a_n, b_n]$ nije pokriven nikojom konačnom potfamilijom od $\mathscr{U}$.
Kako su nizovi (a_n) i (b_n) monotoni i ograđeni, oni konvergiraju, a jer je $\lim(b_n - a_n) = 0$, oba konvergiraju zajedničkoj vrijednosti $\ell \in [a, b]$.

Neka je $U \in \mathscr{U}$ t.d. je $\ell \in U$.
Kako je U otvoren, postoji $\varepsilon > 0$ t.d. je $\langle \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon \rangle \subseteq U$.

Ali, nizovi (a_n) i (b_n) konvergiraju k ℓ, pa postoji $n \in \mathbb{N}$ za koji su $a_n, b_n \in \langle \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon \rangle \subseteq U$, te je segment $[a_n, b_n]$ pokriven jednočlanom potfamilijom $\{U\} \subseteq \mathscr{U}$. $\square$

2. dokaz kompaktnosti segmenta

2. dokaz: Pretpostavimo da je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač segmenta $[a, b]$ koji nema konačan potpokrivač, i neka je $c = \frac{a+b}{2}$. Tada se barem jedan od podsegmenata $[a, c]$ i $[c, b]$ ne može pokriti nekom konačnom potfamilijom od $\mathcal{U}$. Označimo takav segment $[a_1, b_1]$. Ponavljajući postupak, dolazimo do nizova (a_n) i (b_n) takvih da je $a_{n-1} \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_{n-1}$ za sve n, i $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, i da segment $[a_n, b_n]$ nije pokriven nikojom konačnom potfamilijom od $\mathcal{U}$. Kako su nizovi (a_n) i (b_n) monotoni i ograđeni, oni konvergiraju, a jer je $\lim(b_n - a_n) = 0$, oba konvergiraju zajedničkoj vrijednosti $\ell \in [a, b]$.

Neka je $U \in \mathcal{U}$ t.d. je $\ell \in U$.
Kako je U otvoren, postoji $\varepsilon > 0$ t.d. je $\langle \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon \rangle \subseteq U$.

Ali, nizovi (a_n) i (b_n) konvergiraju k ℓ, pa postoji $n \in \mathbb{N}$ za koji su $a_n, b_n \in \langle \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon \rangle \subseteq U$, te je segment $[a_n, b_n]$ pokriven jednočlanom potfamilijom $\{U\} \subseteq \mathcal{U}$. $\square$

2. dokaz kompaktnosti segmenta

2. dokaz: Pretpostavimo da je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač segmenta $[a, b]$ koji nema konačan potpokrivač, i neka je $c = \frac{a+b}{2}$. Tada se barem jedan od podsegmenata $[a, c]$ i $[c, b]$ ne može pokriti nekom konačnom potfamilijom od $\mathcal{U}$. Označimo takav segment $[a_1, b_1]$. Ponavljajući postupak, dolazimo do nizova (a_n) i (b_n) takvih da je $a_{n-1} \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_{n-1}$ za sve n, i $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, i da segment $[a_n, b_n]$ nije pokriven nikojom konačnom potfamilijom od $\mathcal{U}$.
Kako su nizovi (a_n) i (b_n) monotoni i ograđeni, oni konvergiraju, a jer je $\lim(b_n - a_n) = 0$, oba konvergiraju zajedničkoj vrijednosti $\ell \in [a, b]$.

Neka je $U \in \mathcal{U}$ t.d. je $\ell \in U$.
Kako je U otvoren, postoji $\varepsilon > 0$ t.d. je $\langle \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon \rangle \subseteq U$.

Ali, nizovi (a_n) i (b_n) konvergiraju k ℓ, pa postoji $n \in \mathbb{N}$ za koji su $a_n, b_n \in \langle \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon \rangle \subseteq U$, te je segment $[a_n, b_n]$ pokriven jednočlanom potfamilijom $\{U\} \subseteq \mathcal{U}$. $\square$

Omeđenost metričkih kompakata

Ovaj teorem je na liniji naše početne diskusije o omeđenosti neprekidnih realnih funkcija realne varijable.

Teorem 18.1

Svaki kompaktan potprostor A metričkog prostora X je omeđen.

Dokaz: Fiksirajmo točku $a \in A$. Tada je $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K(a; n)$, jer za svaki $x \in A$ postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $n > d(x, a)$.
Dakle, familija $\{K(a; n) : n \in \mathbb{N}\}$ je otvoren pokrivač od A, pa zbog kompaktnosti, postoji konačna potfamilija tih kugala koja pokriva A.
Zato postoji i $N \in \mathbb{N}$ za koji je $A \subseteq K(a; N)$, tj. A je omeđen. $\square$

Kompaktnošću u metričkim prostorima bavit ćemo se detaljnije kasnije.

Omeđenost metričkih kompakata

Ovaj teorem je na liniji naše početne diskusije o omeđenosti neprekidnih realnih funkcija realne varijable.

Teorem 18.1

Svaki kompaktan potprostor A metričkog prostora X je omeđen.

Dokaz: Fiksirajmo točku $a \in A$. Tada je $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K(a;n)$, jer za svaki $x \in A$ postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $n > d(x,a)$.
Dakle, familija $\{K(a;n) : n \in \mathbb{N}\}$ je otvoren pokrivač od A, pa zbog kompaktnosti, postoji konačna potfamilija tih kugala koja pokriva A. Zato postoji i $N \in \mathbb{N}$ za koji je $A \subseteq K(a;N)$, tj. A je omeđen. $\square$

Kompaktnošću u metričkim prostorima bavit ćemo se detaljnije kasnije.

Omeđenost metričkih kompakata

Ovaj teorem je na liniji naše početne diskusije o omeđenosti neprekidnih realnih funkcija realne varijable.

Teorem 18.1

Svaki kompaktan potprostor A metričkog prostora X je omeđen.

Dokaz: Fiksirajmo točku $a \in A$. Tada je $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K(a; n)$, jer za svaki $x \in A$ postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $n > d(x, a)$.
Dakle, familija $\{K(a; n) : n \in \mathbb{N}\}$ je otvoren pokrivač od A, pa zbog kompaktnosti, postoji konačna potfamilija tih kugala koja pokriva A.
Zato postoji i $N \in \mathbb{N}$ za koji je $A \subseteq K(a; N)$, tj. A je omeđen. $\square$

Kompaktnošću u metričkim prostorima bavit ćemo se detaljnije kasnije.

Omeđenost metričkih kompakata

Ovaj teorem je na liniji naše početne diskusije o omeđenosti neprekidnih realnih funkcija realne varijable.

Teorem 18.1

Svaki kompaktan potprostor A metričkog prostora X je omeđen.

Dokaz: Fiksirajmo točku $a \in A$. Tada je $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K(a;n)$, jer za svaki $x \in A$ postoji $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $n > d(x,a)$.
Dakle, familija $\{K(a;n) : n \in \mathbb{N}\}$ je otvoren pokrivač od A, pa zbog kompaktnosti, postoji konačna potfamilija tih kugala koja pokriva A. Zato postoji i $N \in \mathbb{N}$ za koji je $A \subseteq K(a;N)$, tj. A je omeđen. $\square$

Kompaktnošću u metričkim prostorima bavit ćemo se detaljnije kasnije.

Zatvorenost kompakata

Teorem 18.2

Svaki kompaktan potprostor A Hausdorffova prostora X je zatvoren.

Dokaz: Pokažimo da je $X \setminus A$ otvoren. Neka je $x \in X \setminus A$ proizvoljna točka. Jer je X Hausdorffov, za svaki $a \in A$ postoje disjunktne okoline $U_a \ni a$ i $V_a \ni x$. Familija $\{U_a : a \in A\}$ pokriva A, a skupovi $\bigcup_{a \in A} U_a \supseteq A$ i $\bigcap_{a \in A} V_a \ni x$ su disjunktni. Ako je skup A konačan, onda je skup $\bigcap_{a \in A} V_a$ otvoren, pa je to tražena okolina točke x sadržana u $X \setminus A$. Ali, i kompaktnost od A je dovoljna. Naime, familija $\{U_a : a \in A\}$ je otvoren pokrivač od A, pa zbog kompaktnosti postoji konačan potpokrivač, tj. postoje $a_1, \ldots, a_k \in A$ t.d. je $A \subseteq U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_k} =: U$. Tada je skup $V := V_{a_1} \cap \cdots \cap V_{a_k}$ otvorena okolina točke x sadržana u $X \setminus A$, što pokazuje da je skup A zatvoren. $\square$

Napomena: Prethodni dokaz pokazuje i više. Naime, skupovi $U \supseteq A$ i $V \ni x$ su disjunktni, pa dokaz pokazuje da se u Hausdorffovu prostoru kompaktan skup A i točka $x \notin A$ mogu razdvojiti disjunktnim otvorenim skupovima

Zatvorenost kompakata

Teorem 18.2

Svaki kompaktan potprostor A Hausdorffova prostora X je zatvoren.

Dokaz: Pokažimo da je $X \setminus A$ otvoren. Neka je $x \in X \setminus A$ proizvoljna točka. Jer je X Hausdorffov, za svaki $a \in A$ postoje disjunktne okoline $U_a \ni a$ i $V_a \ni x$. Familija $\{U_a : a \in A\}$ pokriva A, a skupovi $\bigcup_{a \in A} U_a \supseteq A$ i $\bigcap_{a \in A} V_a \ni x$ su disjunktni. Ako je skup A konačan, onda je skup $\bigcap_{a \in A} V_a$ otvoren, pa je to tražena okolina točke x sadržana u $X \setminus A$. Ali, i kompaktnost od A je dovoljna. Naime, familija $\{U_a : a \in A\}$ je otvoren pokrivač od A, pa zbog kompaktnosti postoji konačan potpokrivač, tj. postoje $a_1, \ldots, a_k \in A$ t.d. je $A \subseteq U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_k} =: U$. Tada je skup $V := V_{a_1} \cap \cdots \cap V_{a_k}$ otvorena okolina točke x sadržana u $X \setminus A$, što pokazuje da je skup A zatvoren. □

Napomena: Prethodni dokaz pokazuje i više. Naime, skupovi $U \supseteq A$ i $V \ni x$ su disjunktni, pa dokaz pokazuje da se u Hausdorffovu prostoru kompaktan skup A i točka $x \notin A$ mogu razdvojiti disjunktnim otvorenim skupovima

Zatvorenost kompakata

Teorem 18.2

Svaki kompaktan potprostor A Hausdorffova prostora X je zatvoren.

Dokaz: Pokažimo da je $X \setminus A$ otvoren. Neka je $x \in X \setminus A$ proizvoljna točka. Jer je X Hausdorffov, za svaki $a \in A$ postoje disjunktne okoline $U_a \ni a$ i $V_a \ni x$. Familija $\{U_a : a \in A\}$ pokriva A, a skupovi $\bigcup_{a \in A} U_a \supseteq A$ i $\bigcap_{a \in A} V_a \ni x$ su disjunktni. Ako je skup A konačan, onda je skup $\bigcap_{a \in A} V_a$ otvoren, pa je to tražena okolina točke x sadržana u $X \setminus A$. Ali, i kompaktnost od A je dovoljna. Naime, familija $\{U_a : a \in A\}$ je otvoren pokrivač od A, pa zbog kompaktnosti postoji konačan potpokrivač, tj. postoje $a_1, \ldots, a_k \in A$ t.d. je $A \subseteq U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_k} =: U$. Tada je skup $V := V_{a_1} \cap \cdots \cap V_{a_k}$ otvorena okolina točke x sadržana u $X \setminus A$, što pokazuje da je skup A zatvoren. □

Napomena: Prethodni dokaz pokazuje i više. Naime, skupovi $U \supseteq A$ i $V \ni x$ su disjunktni, pa dokaz pokazuje da se u Hausdorffovu prostoru kompaktan skup A i točka $x \notin A$ mogu razdvojiti disjunktnim otvorenim skupovima

Zatvorenost kompakata

Teorem 18.2

Svaki kompaktan potprostor A Hausdorffova prostora X je zatvoren.

Dokaz: Pokažimo da je $X \backslash A$ otvoren. Neka je $x \in X \backslash A$ proizvoljna točka. Jer je X Hausdorffov, za svaki $a \in A$ postoje disjunktne okoline $U_a \ni a$ i $V_a \ni x$. Familija $\{U_a : a \in A\}$ pokriva A, a skupovi $\bigcup_{a\in A} U_a \supseteq A$ i $\bigcap_{a\in A} V_a \ni x$ su disjunktni. Ako je skup A konačan, onda je skup $\bigcap_{a\in A} V_a$ otvoren, pa je to tražena okolina točke x sadržana u $X \setminus A$. Ali, i kompaktnost od A je dovoljna. Naime, familija $\{U_a : a \in A\}$ je otvoren pokrivač od A, pa zbog kompaktnosti postoji konačan potpokrivač, tj. postoje $a_1, \ldots, a_k \in A$ t.d. je $A \subseteq U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_k} =: U$. Tada je skup $V := V_{a_1} \cap \cdots \cap V_{a_k}$ otvorena okolina točke x sadržana u $X \setminus A$, što pokazuje da je skup A zatvoren. $\square$

Napomena: Prethodni dokaz pokazuje i više. Naime, skupovi $U \supseteq A$ i $V \ni x$ su disjunktni, pa dokaz pokazuje da se u Hausdorffovu prostoru kompaktan skup A i točka $x \notin A$ mogu razdvojiti disjunktnim otvorenim skupovima.

Zatvorenost kompakata

Teorem 18.2

Svaki kompaktan potprostor A Hausdorffova prostora X je zatvoren.

Dokaz: Pokažimo da je $X \setminus A$ otvoren. Neka je $x \in X \setminus A$ proizvoljna točka. Jer je X Hausdorffov, za svaki $a \in A$ postoje disjunktne okoline $U_a \ni a$ i $V_a \ni x$. Familija $\{U_a : a \in A\}$ pokriva A, a skupovi $\bigcup_{a \in A} U_a \supseteq A$ i $\bigcap_{a \in A} V_a \ni x$ su disjunktni. Ako je skup A konačan, onda je skup $\bigcap_{a \in A} V_a$ otvoren, pa je to tražena okolina točke x sadržana u $X \setminus A$.
Ali, i kompaktnost od A je dovoljna. Naime, familija $\{U_a : a \in A\}$ je otvoren pokrivač od A, pa zbog kompaktnosti postoji konačan potpokrivač, tj. postoje $a_1, \ldots, a_k \in A$ t.d. je $A \subseteq U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_k} =: U$. Tada je skup $V := V_{a_1} \cap \cdots \cap V_{a_k}$ otvorena okolina točke x sadržana u $X \setminus A$, što pokazuje da je skup A zatvoren. □

Napomena: Prethodni dokaz pokazuje i više. Naime, skupovi $U \supseteq A$ i $V \ni x$ su disjunktni, pa dokaz pokazuje da se u Hausdorffovu prostoru kompaktan skup A i točka $x \notin A$ mogu razdvojiti disjunktnim otvorenim skupovima

Zatvorenost kompakata

Teorem 18.2

Svaki kompaktan potprostor A Hausdorffova prostora X je zatvoren.

Dokaz: Pokažimo da je $X \setminus A$ otvoren. Neka je $x \in X \setminus A$ proizvoljna točka. Jer je X Hausdorffov, za svaki $a \in A$ postoje disjunktne okoline $U_a \ni a$ i $V_a \ni x$. Familija $\{U_a : a \in A\}$ pokriva A, a skupovi $\bigcup_{a \in A} U_a \supseteq A$ i $\bigcap_{a \in A} V_a \ni x$ su disjunktni. Ako je skup A konačan, onda je skup $\bigcap_{a \in A} V_a$ otvoren, pa je to tražena okolina točke x sadržana u $X \setminus A$. Ali, i kompaktnost od A je dovoljna. Naime, familija $\{U_a : a \in A\}$ je otvoren pokrivač od A, pa zbog kompaktnosti postoji konačan potpokrivač, tj. postoje $a_1, \ldots, a_k \in A$ t.d. je $A \subseteq U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_k} =: U$. Tada je skup $V := V_{a_1} \cap \cdots \cap V_{a_k}$ otvorena okolina točke x sadržana u $X \setminus A$, što pokazuje da je skup A zatvoren. □

Napomena: Prethodni dokaz pokazuje i više. Naime, skupovi $U \supseteq A$ i $V \ni x$ su disjunktni, pa dokaz pokazuje da se u Hausdorffovu prostoru kompaktan skup A i točka $x \notin A$ mogu razdvojiti disjunktnim otvorenim skupovima

Zatvorenost kompakata

Teorem 18.2

Svaki kompaktan potprostor A Hausdorffova prostora X je zatvoren.

Dokaz: Pokažimo da je $X \backslash A$ otvoren. Neka je $x \in X \backslash A$ proizvoljna točka. Jer je X Hausdorffov, za svaki $a \in A$ postoje disjunktne okoline $U_a \ni a$ i $V_a \ni x$. Familija $\{U_a : a \in A\}$ pokriva A, a skupovi $\bigcup_{a\in A} U_a \supseteq A$ i $\bigcap_{a\in A} V_a \ni x$ su disjunktni. Ako je skup A konačan, onda je skup $\bigcap_{a\in A} V_a$ otvoren, pa je to tražena okolina točke x sadržana u $X \setminus A$. Ali, i kompaktnost od A je dovoljna. Naime, familija $\{U_a : a \in A\}$ je otvoren pokrivač od A, pa zbog kompaktnosti postoji konačan potpokrivač, tj. postoje $a_1, \ldots, a_k \in A$ t.d. je $A \subseteq U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_k} =: U$. Tada je skup $V := V_{a_1} \cap \cdots \cap V_{a_k}$ otvorena okolina točke x sadržana u $X \setminus A$, što pokazuje da je skup A zatvoren. $\square$

Napomena: Prethodni dokaz pokazuje i više. Naime, skupovi $U \supseteq A$ i $V \ni x$ su disjunktni, pa dokaz pokazuje da se u Hausdorffovu prostoru kompaktan skup A i točka $x \notin A$ mogu razdvojiti disjunktnim otvorenim skupovima

Zatvorenost kompakata

Teorem 18.2

Svaki kompaktan potprostor A Hausdorffova prostora X je zatvoren.

Dokaz: Pokažimo da je $X \backslash A$ otvoren. Neka je $x \in X \backslash A$ proizvoljna točka. Jer je X Hausdorffov, za svaki $a \in A$ postoje disjunktne okoline $U_a \ni a$ i $V_a \ni x$. Familija $\{U_a : a \in A\}$ pokriva A, a skupovi $\bigcup_{a \in A} U_a \supseteq A$ i $\bigcap_{a \in A} V_a \ni x$ su disjunktni. Ako je skup A konačan, onda je skup $\bigcap_{a \in A} V_a$ otvoren, pa je to tražena okolina točke x sadržana u $X \setminus A$. Ali, i kompaktnost od A je dovoljna. Naime, familija $\{U_a : a \in A\}$ je otvoren pokrivač od A, pa zbog kompaktnosti postoji konačan potpokrivač, tj. postoje $a_1, \ldots, a_k \in A$ t.d. je $A \subseteq U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_k} =: U$. Tada je skup $V := V_{a_1} \cap \cdots \cap V_{a_k}$ otvorena okolina točke x sadržana u $X \setminus A$, što pokazuje da je skup A zatvoren. $\square$

Napomena: Prethodni dokaz pokazuje i više. Naime, skupovi $U \supseteq A$ i $V \ni x$ su disjunktni, pa dokaz pokazuje da se u Hausdorffovu prostoru kompaktan skup A i točka $x \notin A$ mogu razdvojiti disjunktnim otvorenim skupovima.

Omeđenost i zatvorenost metričkih kompakata

Kao posljedicu prethodna dva teorema, dobivamo

Posljedica 18.3

Svaki kompaktan potprostor metričkog prostora je omeđen i zatvoren.

Napomena 18.4

Pokazat ćemo da u euklidskim prostorima $\mathbb{E}^n$ vrijedi i obrat, tj. pokazat ćemo da je potprostor $A \subseteq \mathbb{E}^n$ kompaktan ako i samo ako je omeđen i zatvoren.
Međutim, u metričkim prostorima obrat općenito ne vrijedi!

Primjer 18.5

U Hilbertovom prostoru ℓ_2 je skup točaka $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$, gdje je $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$ (jedinica na i-tom mjestu), omeđen i zatvoren ali nije kompaktan.

Omeđenost i zatvorenost metričkih kompakata

Kao posljedicu prethodna dva teorema, dobivamo

Posljedica 18.3

Svaki kompaktan potprostor metričkog prostora je omeđen i zatvoren.

Napomena 18.4

Pokazat ćemo da u euklidskim prostorima $\mathbb{E}^n$ vrijedi i obrat, tj. pokazat ćemo da je potprostor $A \subseteq \mathbb{E}^n$ kompaktan ako i samo ako je omeđen i zatvoren.
Međutim, u metričkim prostorima obrat općenito ne vrijedi!

Primjer 18.5

U Hilbertovom prostoru ℓ_2 je skup točaka $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$, gdje je $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$ (jedinica na i-tom mjestu), omeđen i zatvoren ali nije kompaktan.

Omeđenost i zatvorenost metričkih kompakata

Kao posljedicu prethodna dva teorema, dobivamo

Posljedica 18.3

Svaki kompaktan potprostor metričkog prostora je omeđen i zatvoren.

Napomena 18.4

Pokazat ćemo da u euklidskim prostorima $\mathbb{E}^n$ vrijedi i obrat, tj. pokazat ćemo da je potprostor $A \subseteq \mathbb{E}^n$ kompaktan ako i samo ako je omeđen i zatvoren.
Međutim, u metričkim prostorima obrat općenito ne vrijedi!

Primjer 18.5

U Hilbertovom prostoru ℓ_2 je skup točaka $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$, gdje je $e_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots)$ (jedinica na i-tom mjestu), omeđen i zatvoren ali nije kompaktan.

Topološka invarijantnost kompaktnosti

Teorem 18.6

Neka je $f\colon X \to Y$ neprekidno preslikavanje topoloških prostora. Ako je X kompaktan onda je i slika $f(X)$ kompaktan potprostor od Y.

Dokaz: Neka je $\mathscr{V}$ otvoren pokrivač od $f(X)$. Zbog neprekidnosti je $f^{-1}(V)$ otvoren u X za svaki $V \in \mathscr{V}$, pa je $\{f^{-1}(V) : V \in \mathscr{V}\}$ otvoren pokrivač od X. Kako je X kompaktan, postoji konačan potpokrivač, tj. postoje $V_1, \ldots, V_k \in \mathscr{V}$ t.d. je $X \subseteq f^{-1}(V_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(V_k)$, pa je $\{V_1, \ldots, V_k\}$ traženi konačan potpokrivač od $f(X)$. $\square$

Dokažimo nekoliko posljedica ovog teorema:

Posljedica 18.7 (Topološka invarijantnost kompaktnosti)

Kompaktnost je topološka invarijanta, tj. ako su X i Y homeomorfni prostori onda su ili oba kompaktna, ili niti jedan nije kompaktan. $\square$

Topološka invarijantnost kompaktnosti

Teorem 18.6

Neka je $f\colon X \to Y$ neprekidno preslikavanje topoloških prostora. Ako je X kompaktan onda je i slika $f(X)$ kompaktan potprostor od Y.

Dokaz: Neka je $\mathscr{V}$ otvoren pokrivač od $f(X)$. Zbog neprekidnosti je $f^{-1}(V)$ otvoren u X za svaki $V \in \mathscr{V}$, pa je $\{f^{-1}(V) : V \in \mathscr{V}\}$ otvoren pokrivač od X. Kako je X kompaktan, postoji konačan potpokrivač, tj. postoje $V_1, \ldots, V_k \in \mathscr{V}$ t.d. je $X \subseteq f^{-1}(V_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(V_k)$, pa je $\{V_1, \ldots, V_k\}$ traženi konačan potpokrivač od $f(X)$. $\square$

Dokažimo nekoliko posljedica ovog teorema:

Posljedica 18.7 (Topološka invarijantnost kompaktnosti)

Kompaktnost je topološka invarijanta, tj. ako su X i Y homeomorfni prostori onda su ili oba kompaktna, ili niti jedan nije kompaktan. $\square$

Topološka invarijantnost kompaktnosti

Teorem 18.6

Neka je $f\colon X \to Y$ neprekidno preslikavanje topoloških prostora. Ako je X kompaktan onda je i slika $f(X)$ kompaktan potprostor od Y.

Dokaz: Neka je $\mathcal{V}$ otvoren pokrivač od $f(X)$. Zbog neprekidnosti je $f^{-1}(V)$ otvoren u X za svaki $V \in \mathcal{V}$, pa je $\{f^{-1}(V) : V \in \mathcal{V}\}$ otvoren pokrivač od X. Kako je X kompaktan, postoji konačan potpokrivač, tj. postoje $V_1, \ldots, V_k \in \mathcal{V}$ t.d. je $X \subseteq f^{-1}(V_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(V_k)$, pa je $\{V_1, \ldots, V_k\}$ traženi konačan potpokrivač od $f(X)$. $\square$

Dokažimo nekoliko posljedica ovog teorema:

Posljedica 18.7 (Topološka invarijantnost kompaktnosti)

Kompaktnost je topološka invarijanta, tj. ako su X i Y homeomorfni prostori onda su ili oba kompaktna, ili niti jedan nije kompaktan. $\square$

Topološka invarijantnost kompaktnosti

Teorem 18.6

Neka je $f\colon X \to Y$ neprekidno preslikavanje topoloških prostora. Ako je X kompaktan onda je i slika $f(X)$ kompaktan potprostor od Y.

Dokaz: Neka je $\mathscr{V}$ otvoren pokrivač od $f(X)$. Zbog neprekidnosti je $f^{-1}(V)$ otvoren u X za svaki $V \in \mathscr{V}$, pa je $\{f^{-1}(V) : V \in \mathscr{V}\}$ otvoren pokrivač od X. Kako je X kompaktan, postoji konačan potpokrivač, tj. postoje $V_1, \ldots, V_k \in \mathscr{V}$ t.d. je $X \subseteq f^{-1}(V_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(V_k)$, pa je $\{V_1, \ldots, V_k\}$ traženi konačan potpokrivač od $f(X)$. $\square$

Dokažimo nekoliko posljedica ovog teorema:

Posljedica 18.7 (Topološka invarijantnost kompaktnosti)

Kompaktnost je topološka invarijanta, tj. ako su X i Y homeomorfni prostori onda su ili oba kompaktna, ili niti jedan nije kompaktan. $\square$

Topološka invarijantnost kompaktnosti

Teorem 18.6

Neka je $f: X \to Y$ neprekidno preslikavanje topoloških prostora. Ako je X kompaktan onda je i slika $f(X)$ kompaktan potprostor od Y.

Dokaz: Neka je $\mathscr{V}$ otvoren pokrivač od $f(X)$. Zbog neprekidnosti je $f^{-1}(V)$ otvoren u X za svaki $V \in \mathscr{V}$, pa je $\{f^{-1}(V) : V \in \mathscr{V}\}$ otvoren pokrivač od X. Kako je X kompaktan, postoji konačan potpokrivač, tj. postoje $V_1, \ldots, V_k \in \mathscr{V}$ t.d. je $X \subseteq f^{-1}(V_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(V_k)$, pa je $\{V_1, \ldots, V_k\}$ traženi konačan potpokrivač od $f(X)$. □

Dokažimo nekoliko posljedica ovog teorema:

Posljedica 18.7 (Topološka invarijantnost kompaktnosti)

Kompaktnost je topološka invarijanta, tj. ako su X i Y homeomorfni prostori onda su ili oba kompaktna, ili niti jedan nije kompaktan. □

Topološka invarijantnost kompaktnosti

Teorem 18.6

Neka je $f \colon X \to Y$ neprekidno preslikavanje topoloških prostora. Ako je X kompaktan onda je i slika $f(X)$ kompaktan potprostor od Y.

Dokaz: Neka je $\mathscr{V}$ otvoren pokrivač od $f(X)$. Zbog neprekidnosti je $f^{-1}(V)$ otvoren u X za svaki $V \in \mathscr{V}$, pa je $\{f^{-1}(V) : V \in \mathscr{V}\}$ otvoren pokrivač od X. Kako je X kompaktan, postoji konačan potpokrivač, tj. postoje $V_1, \ldots, V_k \in \mathscr{V}$ t.d. je $X \subseteq f^{-1}(V_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(V_k)$, pa je $\{V_1, \ldots, V_k\}$ traženi konačan potpokrivač od $f(X)$. □

Dokažimo nekoliko posljedica ovog teorema:

Posljedica 18.7 (Topološka invarijantnost kompaktnosti)

Kompaktnost je topološka invarijanta, tj. ako su X i Y homeomorfni prostori onda su ili oba kompaktna, ili niti jedan nije kompaktan. □

Omeđenost neprekidnog preslikavanja na kompaktu

Posljedica 18.8

Svako neprekidno preslikavanje kompaktnog prostora u metrički prostor je omeđeno.

Dokaz: Preslikavanje $f\colon X \to Y$ u metrički prostor Y je omeđeno ako je slika $f(X)$ omeđen podskup od Y. Tvrdnja dakle slijedi iz teorema 18.6 i 18.1. $\square$

Specijalno, svaka je neprekidna realna funkcija na kompaktnom prostoru omeđena, pa, zbog kompaktnosti segmenta, dobivamo i tvrdnju s početka, da je svaka neprekidna funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ omeđena.

Osim toga, kako je svaki kompaktan podskup od $\mathbb{R}$ omeđen i zatvoren (teorem 18.3), pa sadrži infimum i supremum (korolar 14.18), dobivamo

Posljedica 18.9 (Weierstrassov teorem)

Svaka neprekidna realna funkcija na kompaktu ima minimum i maksimum.

Omeđenost neprekidnog preslikavanja na kompaktu

Posljedica 18.8

Svako neprekidno preslikavanje kompaktnog prostora u metrički prostor je omeđeno.

Dokaz: Preslikavanje $f: X \to Y$ u metrički prostor Y je omeđeno ako je slika $f(X)$ omeđen podskup od Y. Tvrdnja dakle slijedi iz teorema 18.6 i 18.1. $\square$

Specijalno, svaka je neprekidna realna funkcija na kompaktnom prostoru omeđena, pa, zbog kompaktnosti segmenta, dobivamo i tvrdnju s početka, da je svaka neprekidna funkcija $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ omeđena.

Osim toga, kako je svaki kompaktan podskup od $\mathbb{R}$ omeđen i zatvoren (teorem 18.3), pa sadrži infimum i supremum (korolar 14.18), dobivamo

Posljedica 18.9 (Weierstrassov teorem)

Svaka neprekidna realna funkcija na kompaktu ima minimum i maksimum.

Omeđenost neprekidnog preslikavanja na kompaktu

Posljedica 18.8

Svako neprekidno preslikavanje kompaktnog prostora u metrički prostor je omeđeno.

Dokaz: Preslikavanje $f\colon X \to Y$ u metrički prostor Y je omeđeno ako je slika $f(X)$ omeđen podskup od Y. Tvrdnja dakle slijedi iz teorema 18.6 i 18.1. $\square$

Specijalno, svaka je neprekidna realna funkcija na kompaktnom prostoru omeđena, pa, zbog kompaktnosti segmenta, dobivamo i tvrdnju s početka, da je svaka neprekidna funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ omeđena.

Osim toga, kako je svaki kompaktan podskup od $\mathbb{R}$ omeđen i zatvoren (teorem 18.3), pa sadrži infimum i supremum (korolar 14.18), dobivamo

Posljedica 18.9 (Weierstrassov teorem)

Svaka neprekidna realna funkcija na kompaktu ima minimum i maksimum.

Omeđenost neprekidnog preslikavanja na kompaktu

Posljedica 18.8

Svako neprekidno preslikavanje kompaktnog prostora u metrički prostor je omeđeno.

Dokaz: Preslikavanje $f\colon X \to Y$ u metrički prostor Y je omeđeno ako je slika $f(X)$ omeđen podskup od Y. Tvrdnja dakle slijedi iz teorema 18.6 i 18.1. □

Specijalno, svaka je neprekidna realna funkcija na kompaktnom prostoru omeđena, pa, zbog kompaktnosti segmenta, dobivamo i tvrdnju s početka, da je svaka neprekidna funkcija $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ omeđena.

Osim toga, kako je svaki kompaktan podskup od $\mathbb{R}$ omeđen i zatvoren (teorem 18.3), pa sadrži infimum i supremum (korolar 14.18), dobivamo

Posljedica 18.9 (Weierstrassov teorem)

Svaka neprekidna realna funkcija na kompaktu ima minimum i maksimum.

Omeđenost neprekidnog preslikavanja na kompaktu

Posljedica 18.8

Svako neprekidno preslikavanje kompaktnog prostora u metrički prostor je omeđeno.

Dokaz: Preslikavanje $f\colon X \to Y$ u metrički prostor Y je omeđeno ako je slika $f(X)$ omeđen podskup od Y. Tvrdnja dakle slijedi iz teorema 18.6 i 18.1. $\square$

Specijalno, svaka je neprekidna realna funkcija na kompaktnom prostoru omeđena, pa, zbog kompaktnosti segmenta, dobivamo i tvrdnju s početka, da je svaka neprekidna funkcija $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ omeđena.

Osim toga, kako je svaki kompaktan podskup od $\mathbb{R}$ omeđen i zatvoren (teorem 18.3), pa sadrži infimum i supremum (korolar 14.18), dobivamo

Posljedica 18.9 (Weierstrassov teorem)

Svaka neprekidna realna funkcija na kompaktu ima minimum i maksimum.

Uniformna neprekidnost

Kada se dokazuje da je svaka neprekidna funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrabilna, koristi se činjenica da je svaka neprekidna funkcija na segmentu i uniformno neprekidna.

Definicija 18.10

Za preslikavanje $f\colon (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ kažemo da je *uniformno* ili *jednoliko neprekidno*, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ t.d. za sve $x, x' \in X$ za koje je $d_X(x',x) < \delta$ vrijedi $d_Y\big(f(x'), f(x)\big) < \varepsilon$. Dakle,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \big(d_X(x',x) < \delta \implies d_Y(f(x'), f(x)) < \varepsilon\big)$$

- Uoči da je za uniformnu neprekidnost potrebno specificirati metrike na domeni i kodomeni. Uz različite, iako topološki ekvivalentne metrike, isto preslikavanje može u jednon metrici biti uniformno neprekidno, a u drugoj ne.

Uniformna neprekidnost

Kada se dokazuje da je svaka neprekidna funkcija $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrabilna, koristi se činjenica da je svaka neprekidna funkcija na segmentu i uniformno neprekidna.

Definicija 18.10

Za preslikavanje $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ kažemo da je *uniformno* ili *jednoliko neprekidno*, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ t.d. za sve $x, x' \in X$ za koje je $d_X(x', x) < \delta$ vrijedi $d_Y\big(f(x'), f(x)\big) < \varepsilon$.

Dakle,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \big(d_X(x', x) < \delta \Rightarrow d_Y\big(f(x'), f(x)\big) < \varepsilon\big).$$

- Uoči da je za uniformnu neprekidnost potrebno specificirati metrike na domeni i kodomeni. Uz različite, iako topološki ekvivalentne metrike, isto preslikavanje može u jednon metrici biti uniformno neprekidno, a u drugoj ne.

Uniformna neprekidnost

Kada se dokazuje da je svaka neprekidna funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrabilna, koristi se činjenica da je svaka neprekidna funkcija na segmentu i uniformno neprekidna.

Definicija 18.10

Za preslikavanje $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ kažemo da je *uniformno* ili *jednoliko neprekidno*, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ t.d. za sve $x, x' \in X$ za koje je $d_X(x', x) < \delta$ vrijedi $d_Y\big(f(x'), f(x)\big) < \varepsilon$. Dakle,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \big(d_X(x', x) < \delta \ \Rightarrow\ d_Y\big(f(x'), f(x)\big) < \varepsilon\big).$$

- Uoči da je za uniformnu neprekidnost potrebno specificirati metrike na domeni i kodomeni. Uz različite, iako topološki ekvivalentne metrike, isto preslikavanje može u jednon metrici biti uniformno neprekidno, a u drugoj ne.

Uniformna neprekidnost

Kada se dokazuje da je svaka neprekidna funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrabilna, koristi se činjenica da je svaka neprekidna funkcija na segmentu i uniformno neprekidna.

Definicija 18.10

Za preslikavanje $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ kažemo da je *uniformno* ili *jednoliko neprekidno*, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ t.d. za sve $x, x' \in X$ za koje je $d_X(x', x) < \delta$ vrijedi $d_Y\big(f(x'), f(x)\big) < \varepsilon$. Dakle,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.d. } \Big(d_X(x', x) < \delta \ \Rightarrow \ d_Y\big(f(x'), f(x)\big) < \varepsilon\Big).$$

- Uoči da je za uniformnu neprekidnost potrebno specificirati metrike na domeni i kodomeni. Uz različite, iako topološki ekvivalentne metrike, isto preslikavanje može u jednon metrici biti uniformno neprekidno, a u drugoj ne.

Neprekidnost *vs.* uniformna neprekidnost

- Svako uniformno neprekidno preslikavanje je neprekidno, ali obratno općenito ne vrijedi.

  Neprekidnost je lokalno svojstvo preslikavanja — ovisi o ponašanju preslikavanja u okolini točke, dok je uniformna neprekidnost globalno svojstvo — govori nešto o preslikavanju na cijeloj domeni.

  Kako kompaktnost često omogućuje da se lokalno svojstvo protegne do globalnog, ne treba nas čuditi da vrijedi sljedeći teorem koji poopćuje poznati teorem o uniformnoj neprekidnosti neprekidne realne funkcije na segmentu.

Neprekidnost *vs.* uniformna neprekidnost

- Svako uniformno neprekidno preslikavanje je neprekidno, ali obratno općenito ne vrijedi.

  Neprekidnost je lokalno svojstvo preslikavanja — ovisi o ponašanju preslikavanja u okolini točke, dok je uniformna neprekidnost globalno svojstvo — govori nešto o preslikavanju na cijeloj domeni.

  Kako kompaktnost često omogućuje da se lokalno svojstvo protegne do globalnog, ne treba nas čuditi da vrijedi sljedeći teorem koji poopćuje poznati teorem o uniformnoj neprekidnosti neprekidne realne funkcije na segmentu.

Neprekidnost *vs.* uniformna neprekidnost

- Svako uniformno neprekidno preslikavanje je neprekidno, ali obratno općenito ne vrijedi.

  Neprekidnost je lokalno svojstvo preslikavanja — ovisi o ponašanju preslikavanja u okolini točke, dok je uniformna neprekidnost globalno svojstvo — govori nešto o preslikavanju na cijeloj domeni.

  Kako kompaktnost često omogućuje da se lokalno svojstvo protegne do globalnog, ne treba nas čuditi da vrijedi sljedeći teorem koji poopćuje poznati teorem o uniformnoj neprekidnosti neprekidne realne funkcije na segmentu.

Kompaktnost i uniformna neprekidnost

Teorem 18.11

Neka je $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ neprekidno preslikavanje. Ako je X kompaktan onda je preslikavanje f uniformno neprekidno.

Dokaz: Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je f neprekidno, za svaku točku $a \in X$ postoji $\delta_a > 0$ t.d. je $d_Y(f(x), f(a)) < \frac{1}{2}\varepsilon$ čim je $d_X(x, a) < \delta_a$. Familija $\{K(a; \frac{1}{2}\delta_a) : a \in X\}$ je otvoren pokrivač od X, pa zbog kompaktnosti postoje $a_1, \dots, a_n$ t.d. je $X \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} K(a_j; \frac{1}{2}\delta_{a_j})$.
Neka je $\delta = \frac{1}{2}\min_j \delta_{a_j}$ i neka su $x', x \in X$ takvi da je $d_X(x', x) < \delta$.
Jer je $X \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} K(a_j; \frac{1}{2}\delta_{a_j})$ bit će $x \in K(a_k; \frac{1}{2}\delta_{a_k})$, tj. $d_X(x, a_k) < \frac{1}{2}\delta_{a_k}$, za neki $k \in \{1, \dots, n\}$.
Stoga je $d_X(x', a_k) \leqslant d_X(x', x) + d_X(x, a_k) < \delta + \frac{1}{2}\delta_{a_k} \leqslant \delta_{a_k}$, pa je

$$d_Y(f(x'), f(x)) \leqslant d_Y(f(x'), f(a_k)) + d_Y(f(a_k), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

tj. f je uniformno neprekidno. $\square$

Kompaktnost i uniformna neprekidnost

Teorem 18.11

Neka je $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ neprekidno preslikavanje.
Ako je X kompaktan onda je preslikavanje f uniformno neprekidno.

Dokaz: Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je f neprekidno, za svaku točku $a \in X$ postoji $\delta_a > 0$ t.d. je $d_Y\big(f(x), f(a)\big) < \frac{1}{2}\varepsilon$ čim je $d_X(x, a) < \delta_a$.

Familija $\left\{K(a; \frac{1}{2}\delta_a) : a \in X\right\}$ je otvoren pokrivač od X, pa zbog kompaktnosti postoje $a_1, \ldots, a_n$ t.d. je $X \subseteq \bigcup_{j=1}^n K(a_j; \frac{1}{2}\delta_{a_j})$.

Neka je $\delta = \frac{1}{2}\min_j \delta_{a_j}$ i neka su $x', x \in X$ takvi da je $d_X(x', x) < \delta$.

Jer je $X \subseteq \bigcup_{j=1}^n K(a_j; \frac{1}{2}\delta_{a_j})$ bit će $x \in K(a_k; \frac{1}{2}\delta_{a_k})$, tj. $d_X(x, a_k) < \frac{1}{2}\delta_{a_k}$, za neki $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Stoga je $d_X(x', a_k) \leqslant d_X(x', x) + d_X(x, a_k) < \delta + \frac{1}{2}\delta_{a_k} \leqslant \delta_{a_k}$, pa je

$$d_Y\big(f(x'), f(x)\big) \leqslant d_Y\big(f(x'), f(a_k)\big) + d_Y\big(f(a_k), f(x)\big) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

tj. f je uniformno neprekidno. □

Kompaktnost i uniformna neprekidnost

Teorem 18.11

Neka je $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ neprekidno preslikavanje.
Ako je X kompaktan onda je preslikavanje f uniformno neprekidno.

Dokaz: Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je f neprekidno, za svaku točku $a \in X$ postoji $\delta_a > 0$ t.d. je $d_Y\big(f(x), f(a)\big) < \frac{1}{2}\varepsilon$ čim je $d_X(x, a) < \delta_a$.
Familija $\left\{K(a; \frac{1}{2}\delta_a) : a \in X\right\}$ je otvoren pokrivač od X, pa zbog kompaktnosti postoje $a_1, \ldots, a_n$ t.d. je $X \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} K(a_j; \frac{1}{2}\delta_{a_j})$.
Neka je $\delta = \frac{1}{2}\min_j \delta_{a_j}$ i neka su $x', x \in X$ takvi da je $d_X(x', x) < \delta$.
Jer je $X \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} K(a_j; \frac{1}{2}\delta_{a_j})$ bit će $x \in K(a_k; \frac{1}{2}\delta_{a_k})$, tj. $d_X(x, a_k) < \frac{1}{2}\delta_{a_k}$, za neki $k \in \{1, \ldots, n\}$.
Stoga je $d_X(x', a_k) \leqslant d_X(x', x) + d_X(x, a_k) < \delta + \frac{1}{2}\delta_{a_k} \leqslant \delta_{a_k}$, pa je

$$d_Y\big(f(x'), f(x)\big) \leqslant d_Y\big(f(x'), f(a_k)\big) + d_Y\big(f(a_k), f(x)\big) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

tj. f je uniformno neprekidno. □

Kompaktnost i uniformna neprekidnost

Teorem 18.11

Neka je $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ neprekidno preslikavanje.
Ako je X kompaktan onda je preslikavanje f uniformno neprekidno.

Dokaz: Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je f neprekidno, za svaku točku $a \in X$ postoji $\delta_a > 0$ t.d. je $d_Y\big(f(x), f(a)\big) < \frac{1}{2}\varepsilon$ čim je $d_X(x, a) < \delta_a$.
Familija $\big\{K(a; \frac{1}{2}\delta_a) : a \in X\big\}$ je otvoren pokrivač od X, pa zbog kompaktnosti postoje $a_1, \dots, a_n$ t.d. je $X \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} K(a_j; \frac{1}{2}\delta_{a_j})$.
Neka je $\delta = \frac{1}{2}\min_j \delta_{a_j}$ i neka su $x', x \in X$ takvi da je $d_X(x', x) < \delta$.
Jer je $X \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} K(a_j; \frac{1}{2}\delta_{a_j})$ bit će $x \in K(a_k; \frac{1}{2}\delta_{a_k})$, tj. $d_X(x, a_k) < \frac{1}{2}\delta_{a_k}$, za neki $k \in \{1, \dots, n\}$.
Stoga je $d_X(x', a_k) \leqslant d_X(x', x) + d_X(x, a_k) < \delta + \frac{1}{2}\delta_{a_k} \leqslant \delta_{a_k}$, pa je

$$d_Y\big(f(x'), f(x)\big) \leqslant d_Y\big(f(x'), f(a_k)\big) + d_Y\big(f(a_k), f(x)\big) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

tj. f je uniformno neprekidno. $\square$

Kompaktnost i uniformna neprekidnost

Teorem 18.11

Neka je $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ neprekidno preslikavanje. Ako je X kompaktan onda je preslikavanje f uniformno neprekidno.

Dokaz: Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je f neprekidno, za svaku točku $a \in X$ postoji $\delta_a > 0$ t.d. je $d_Y\big(f(x), f(a)\big) < \frac{1}{2}\varepsilon$ čim je $d_X(x, a) < \delta_a$. Familija $\big\{K(a; \frac{1}{2}\delta_a) : a \in X\big\}$ je otvoren pokrivač od X, pa zbog kompaktnosti postoje $a_1, \ldots, a_n$ t.d. je $X \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} K(a_j; \frac{1}{2}\delta_{a_j})$.
Neka je $\delta = \frac{1}{2}\min_j \delta_{a_j}$ i neka su $x', x \in X$ takvi da je $d_X(x', x) < \delta$.
Jer je $X \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} K(a_j; \frac{1}{2}\delta_{a_j})$ bit će $x \in K(a_k; \frac{1}{2}\delta_{a_k})$, tj. $d_X(x, a_k) < \frac{1}{2}\delta_{a_k}$, za neki $k \in \{1, \ldots, n\}$.
Stoga je $d_X(x', a_k) \leqslant d_X(x', x) + d_X(x, a_k) < \delta + \frac{1}{2}\delta_{a_k} \leqslant \delta_{a_k}$, pa je

$$d_Y\big(f(x'), f(x)\big) \leqslant d_Y\big(f(x'), f(a_k)\big) + d_Y\big(f(a_k), f(x)\big) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

tj. f je uniformno neprekidno. □

Kompaktnost i uniformna neprekidnost

Teorem 18.11

Neka je $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ neprekidno preslikavanje.
Ako je X kompaktan onda je preslikavanje f uniformno neprekidno.

Dokaz: Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je f neprekidno, za svaku točku $a \in X$ postoji $\delta_a > 0$ t.d. je $d_Y\big(f(x), f(a)\big) < \frac{1}{2}\varepsilon$ čim je $d_X(x, a) < \delta_a$.
Familija $\big\{K(a; \frac{1}{2}\delta_a) : a \in X\big\}$ je otvoren pokrivač od X, pa zbog kompaktnosti postoje $a_1, \ldots, a_n$ t.d. je $X \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} K(a_j; \frac{1}{2}\delta_{a_j})$.
Neka je $\delta = \frac{1}{2}\min_j \delta_{a_j}$ i neka su $x', x \in X$ takvi da je $d_X(x', x) < \delta$.
Jer je $X \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} K(a_j; \frac{1}{2}\delta_{a_j})$ bit će $x \in K(a_k; \frac{1}{2}\delta_{a_k})$, tj. $d_X(x, a_k) < \frac{1}{2}\delta_{a_k}$, za neki $k \in \{1, \ldots, n\}$.
Stoga je $d_X(x', a_k) \leqslant d_X(x', x) + d_X(x, a_k) < \delta + \frac{1}{2}\delta_{a_k} \leqslant \delta_{a_k}$, pa je

$$d_Y\big(f(x'), f(x)\big) \leqslant d_Y\big(f(x'), f(a_k)\big) + d_Y\big(f(a_k), f(x)\big) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

tj. f je uniformno neprekidno. $\square$

Kompaktnost i uniformna neprekidnost

Teorem 18.11

Neka je $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ neprekidno preslikavanje.
Ako je X kompaktan onda je preslikavanje f uniformno neprekidno.

Dokaz: Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je f neprekidno, za svaku točku $a \in X$ postoji $\delta_a > 0$ t.d. je $d_Y\big(f(x), f(a)\big) < \frac{1}{2}\varepsilon$ čim je $d_X(x, a) < \delta_a$.
Familija $\big\{K(a; \frac{1}{2}\delta_a) : a \in X\big\}$ je otvoren pokrivač od X, pa zbog kompaktnosti postoje $a_1, \ldots, a_n$ t.d. je $X \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} K(a_j; \frac{1}{2}\delta_{a_j})$.
Neka je $\delta = \frac{1}{2}\min_j \delta_{a_j}$ i neka su $x', x \in X$ takvi da je $d_X(x', x) < \delta$.
Jer je $X \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} K(a_j; \frac{1}{2}\delta_{a_j})$ bit će $x \in K(a_k; \frac{1}{2}\delta_{a_k})$, tj. $d_X(x, a_k) < \frac{1}{2}\delta_{a_k}$, za neki $k \in \{1, \ldots, n\}$.
Stoga je $d_X(x', a_k) \leqslant d_X(x', x) + d_X(x, a_k) < \delta + \frac{1}{2}\delta_{a_k} \leqslant \delta_{a_k}$, pa je

$$d_Y\big(f(x'), f(x)\big) \leqslant d_Y\big(f(x'), f(a_k)\big) + d_Y\big(f(a_k), f(x)\big) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

tj. f je uniformno neprekidno. $\square$

Kompaktnost potprostora

Teorem 18.2 pokazuje da je kompaktan potprostor Hausdorffova prostora zatvoren. Sljedeći teorem je djelomičan obrat.

Teorem 19.1

Svaki zatvoren potprostor F kompaktnog prostora X je kompaktan.

Dokaz: Neka je $\mathscr{U}$ pokrivač od F otvorenim podskupovima iz X. Kako je F zatvoren, familija $\mathscr{U} \cup \{X \setminus F\}$ je otvoren pokrivač prostora X. Zbog kompaktnosti, postoji konačan potpokrivač. Izostavimo li iz njega skup $X \setminus F$, ostaje nam konačna potfamilija od $\mathscr{U}$ koja pokriva F. Dakle, F je kompaktan. $\square$

Kompaktnost potprostora

Teorem 18.2 pokazuje da je kompaktan potprostor Hausdorffova prostora zatvoren. Sljedeći teorem je djelomičan obrat.

Teorem 19.1

Svaki zatvoren potprostor F kompaktnog prostora X je kompaktan.

Dokaz: Neka je $\mathscr{U}$ pokrivač od F otvorenim podskupovima iz X. Kako je F zatvoren, familija $\mathscr{U} \cup \{X \setminus F\}$ je otvoren pokrivač prostora X. Zbog kompaktnosti, postoji konačan potpokrivač. Izostavimo li iz njega skup $X \setminus F$, ostaje nam konačna potfamilija od $\mathscr{U}$ koja pokriva F. Dakle, F je kompaktan. $\square$

Kompaktnost potprostora

Teorem 18.2 pokazuje da je kompaktan potprostor Hausdorffova prostora zatvoren. Sljedeći teorem je djelomičan obrat.

Teorem 19.1

Svaki zatvoren potprostor F kompaktnog prostora X je kompaktan.

Dokaz: Neka je $\mathscr{U}$ pokrivač od F otvorenim podskupovima iz X. Kako je F zatvoren, familija $\mathscr{U} \cup \{X \setminus F\}$ je otvoren pokrivač prostora X. Zbog kompaktnosti, postoji konačan potpokrivač. Izostavimo li iz njega skup $X \setminus F$, ostaje nam konačna potfamilija od $\mathscr{U}$ koja pokriva F. Dakle, F je kompaktan. $\square$

Kompaktnost potprostora

Teorem 18.2 pokazuje da je kompaktan potprostor Hausdorffova prostora zatvoren. Sljedeći teorem je djelomičan obrat.

Teorem 19.1

Svaki zatvoren potprostor F kompaktnog prostora X je kompaktan.

Dokaz: Neka je $\mathcal{U}$ pokrivač od F otvorenim podskupovima iz X. Kako je F zatvoren, familija $\mathcal{U} \cup \{X \setminus F\}$ je otvoren pokrivač prostora X. Zbog kompaktnosti, postoji konačan potpokrivač. Izostavimo li iz njega skup $X \setminus F$, ostaje nam konačna potfamilija od $\mathcal{U}$ koja pokriva F. Dakle, F je kompaktan. $\square$

Kompaktnost u $\mathbb{R}$

Sada već možemo karakterizirati kompaktne potprostore od $\mathbb{R}$.

Posljedica 19.2 (Heine-Borel)

Potprostor $A \subseteq \mathbb{R}$ je kompaktan ako i samo ako je omeđen i zatvoren.

Dokaz: Ako je $A \subseteq \mathbb{R}$ kompaktan onda je omeđen i zatvoren prema korolaru 18.3.
Obratno, neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ omeđen i zatvoren potprostor, i odaberimo segment $[a, b] \supseteq A$. Prema teoremu 17.1, segment je kompaktan, pa je A, kao njegov zatvoren potprostor, kompaktan, (teorem 19.1). □

Za dokaz analogne tvrdnje u $\mathbb{R}^n$ trebamo dokazati da je produkt kompaktnih prostora kompaktan. Dokažimo najprije jednu lemu:

Kompaktnost u $\mathbb{R}$

Sada već možemo karakterizirati kompaktne potprostore od $\mathbb{R}$.

Posljedica 19.2 (Heine-Borel)

Potprostor $A \subseteq \mathbb{R}$ je kompaktan ako i samo ako je omeđen i zatvoren.

Dokaz: Ako je $A \subseteq \mathbb{R}$ kompaktan onda je omeđen i zatvoren prema korolaru 18.3.
Obratno, neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ omeđen i zatvoren potprostor, i odaberimo segment $[a, b] \supseteq A$. Prema teoremu 17.1, segment je kompaktan, pa je A, kao njegov zatvoren potprostor, kompaktan, (teorem 19.1). $\square$

Za dokaz analogne tvrdnje u $\mathbb{R}^n$ trebamo dokazati da je produkt kompaktnih prostora kompaktan. Dokažimo najprije jednu lemu:

Kompaktnost u $\mathbb{R}$

Sada već možemo karakterizirati kompaktne potprostore od $\mathbb{R}$.

Posljedica 19.2 (Heine-Borel)

Potprostor $A \subseteq \mathbb{R}$ je kompaktan ako i samo ako je omeđen i zatvoren.

Dokaz: Ako je $A \subseteq \mathbb{R}$ kompaktan onda je omeđen i zatvoren prema korolaru 18.3.

Obratno, neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ omeđen i zatvoren potprostor, i odaberimo segment $[a, b] \supseteq A$. Prema teoremu 17.1, segment je kompaktan, pa je A, kao njegov zatvoren potprostor, kompaktan, (teorem 19.1). $\square$

Za dokaz analogne tvrdnje u $\mathbb{R}^n$ trebamo dokazati da je produkt kompaktnih prostora kompaktan. Dokažimo najprije jednu lemu:

Kompaktnost u $\mathbb{R}$

Sada već možemo karakterizirati kompaktne potprostore od $\mathbb{R}$.

Posljedica 19.2 (Heine-Borel)

Potprostor $A \subseteq \mathbb{R}$ je kompaktan ako i samo ako je omeđen i zatvoren.

Dokaz: Ako je $A \subseteq \mathbb{R}$ kompaktan onda je omeđen i zatvoren prema korolaru 18.3.
Obratno, neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ omeđen i zatvoren potprostor, i odaberimo segment $[a, b] \supseteq A$. Prema teoremu 17.1, segment je kompaktan, pa je A, kao njegov zatvoren potprostor, kompaktan, (teorem 19.1). $\square$

Za dokaz analogne tvrdnje u $\mathbb{R}^n$ trebamo dokazati da je produkt kompaktnih prostora kompaktan. Dokažimo najprije jednu lemu:

Kompaktnost u $\mathbb{R}$

Sada već možemo karakterizirati kompaktne potprostore od $\mathbb{R}$.

Posljedica 19.2 (Heine-Borel)

Potprostor $A \subseteq \mathbb{R}$ je kompaktan ako i samo ako je omeđen i zatvoren.

Dokaz: Ako je $A \subseteq \mathbb{R}$ kompaktan onda je omeđen i zatvoren prema korolaru 18.3.
Obratno, neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ omeđen i zatvoren potprostor, i odaberimo segment $[a, b] \supseteq A$. Prema teoremu 17.1, segment je kompaktan, pa je A, kao njegov zatvoren potprostor, kompaktan, (teorem 19.1). $\square$

Za dokaz analogne tvrdnje u $\mathbb{R}^n$ trebamo dokazati da je produkt kompaktnih prostora kompaktan. Dokažimo najprije jednu lemu:

Lema o cjevastoj okolini

Lema 19.3 (Lema o cjevastoj okolini)

Neka je $N \subseteq X \times Y$ okolina „sloja" $\{x_0\} \times Y$. Ako je Y kompaktan onda postoji okolina $W \ni x_0$ t.d. je $W \times Y \subseteq N$.

Dokaz: $\{x_0\} \times Y \cong Y$ je kompaktan, pa je dovoljno konačno mnogo bazičnih otvorenih skupova, koji su svi sadržani u N, da pokriju $\{x_0\} \times Y$.

Neka su to $U_1 \times V_1, \ldots, U_n \times V_n$ (i neka svi oni sijeku $\{x_0\} \times Y$).

Neka je $W := U_1 \cap \cdots \cap U_n$. $W \subseteq X$ je otvoren i sadrži x_0.

Tvrdimo da je $W \times Y \subseteq \bigcup_j (U_j \times V_j) \subseteq N$.

Zaista, neka je $(x, y) \in W \times Y$ i neka je i t.d. je $(x_0, y) \in U_i \times V_i$. Znači $y \in V_i$, a kako je $x \in U_j$ za sve j, dakle i za $j = i$, to je $(x, y) \in U_i \times V_i \subseteq N$. □

Lema o cjevastoj okolini

Lema 19.3 (Lema o cjevastoj okolini)

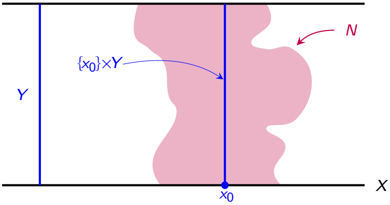
Neka je $N \subseteq X \times Y$ okolina „sloja” $\{x_0\} \times Y$. Ako je Y kompaktan onda postoji okolina $W \ni x_0$ t.d. je $W \times Y \subseteq N$.

Dokaz: $\{x_0\} \times Y \cong Y$ je kompaktan, pa je dovoljno konačno mnogo bazičnih otvorenih skupova, koji su svi sadržani u N, da pokriju $\{x_0\} \times Y$.

Neka su to $U_1 \times V_1, \dots, U_n \times V_n$ (i neka svi oni sijeku $\{x_0\} \times Y$).

Neka je $W := U_1 \cap \cdots \cap U_n$. $W \subseteq X$ je otvoren i sadrži x_0.

Tvrdimo da je $W \times Y \subseteq \bigcup_j (U_j \times V_j) \subseteq N$.



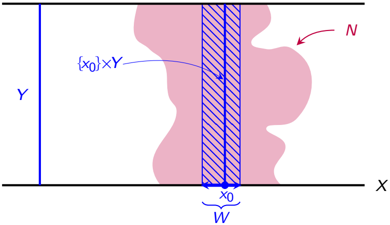
Zaista, neka je $(x, y) \in W \times Y$ i neka je i t.d. je $(x_0, y) \in U_i \times V_i$. Znači $y \in V_i$, a kako je $x \in U_j$ za sve j, dakle i za $j = i$, to je $(x, y) \in U_i \times V_i \subseteq N$. $\square$

Lema o cjevastoj okolini

Lema 19.3 (Lema o cjevastoj okolini)

Neka je $N \subseteq X \times Y$ okolina „sloja" $\{x_0\} \times Y$. Ako je Y kompaktan onda postoji okolina $W \ni x_0$ t.d. je $W \times Y \subseteq N$.

Dokaz: $\{x_0\} \times Y \cong Y$ je kompaktan, pa je dovoljno konačno mnogo bazičnih otvorenih skupova, koji su svi sadržani u N, da pokriju $\{x_0\} \times Y$.
Neka su to $U_1 \times V_1, \ldots, U_n \times V_n$ (i neka svi oni sijeku $\{x_0\} \times Y$).
Neka je $W := U_1 \cap \cdots \cap U_n$. $W \subseteq X$ je otvoren i sadrži x_0.
Tvrdimo da je $W \times Y \subseteq \bigcup_j (U_j \times V_j) \subseteq N$.



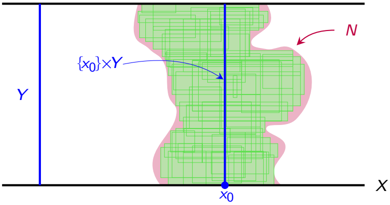
Zaista, neka je $(x, y) \in W \times Y$ i neka je i t.d. je $(x_0, y) \in U_i \times V_i$. Znači $y \in V_i$, a kako je $x \in U_j$ za sve j, dakle i za $j = i$, to je $(x, y) \in U_i \times V_i \subseteq N$. $\square$

Lema o cjevastoj okolini

Lema 19.3 (Lema o cjevastoj okolini)

Neka je $N \subseteq X \times Y$ okolina „sloja" $\{x_0\} \times Y$. Ako je Y kompaktan onda postoji okolina $W \ni x_0$ t.d. je $W \times Y \subseteq N$.

Dokaz: $\{x_0\} \times Y \cong Y$ je kompaktan, pa je dovoljno konačno mnogo baznih otvorenih skupova, koji su svi sadržani u N, da pokriju $\{x_0\} \times Y$.
Neka su to $U_1 \times V_1, \dots, U_n \times V_n$ (i neka svi oni sijeku $\{x_0\} \times Y$).
Neka je $W := U_1 \cap \dots \cap U_n$. $W \subseteq X$ je otvoren i sadrži x_0.
Tvrdimo da je $W \times Y \subseteq \bigcup_j (U_j \times V_j) \subseteq N$.



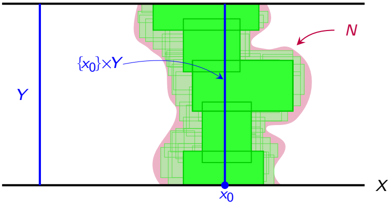
Zaista, neka je $(x, y) \in W \times Y$ i neka je i t.d. je $(x_0, y) \in U_i \times V_i$.
Znači $y \in V_i$, a kako je $x \in U_j$ za sve j, dakle i za $j = i$,
to je $(x, y) \in U_i \times V_i \subseteq N$. □

Lema o cjevastoj okolini

Lema 19.3 (Lema o cjevastoj okolini)

Neka je $N \subseteq X \times Y$ okolina „sloja” $\{x_0\} \times Y$. Ako je Y kompaktan onda postoji okolina $W \ni x_0$ t.d. je $W \times Y \subseteq N$.

Dokaz: $\{x_0\} \times Y \cong Y$ je kompaktan, pa je dovoljno konačno mnogo baznih otvorenih skupova, koji su svi sadržani u N, da pokriju $\{x_0\} \times Y$. Neka su to $U_1 \times V_1, \ldots, U_n \times V_n$ (i neka svi oni sijeku $\{x_0\} \times Y$).
Neka je $W := U_1 \cap \cdots \cap U_n$. $W \subseteq X$ je otvoren i sadrži x_0.
Tvrdimo da je $W \times Y \subseteq \bigcup_j (U_j \times V_j) \subseteq N$.



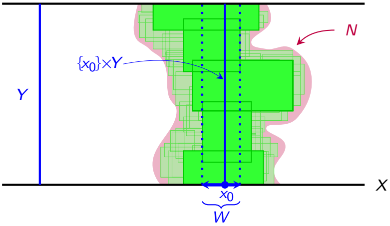
Zaista, neka je $(x, y) \in W \times Y$ i neka je i t.d. je $(x_0, y) \in U_i \times V_i$. Znači $y \in V_i$, a kako je $x \in U_j$ za sve j, dakle i za $j = i$, to je $(x, y) \in U_i \times V_i \subseteq N$. $\square$

Lema o cjevastoj okolini

Lema 19.3 (Lema o cjevastoj okolini)

Neka je $N \subseteq X \times Y$ okolina „sloja” $\{x_0\} \times Y$. Ako je Y kompaktan onda postoji okolina $W \ni x_0$ t.d. je $W \times Y \subseteq N$.

Dokaz: $\{x_0\}\times Y \cong Y$ je kompaktan, pa je dovoljno konačno mnogo baznih otvorenih skupova, koji su svi sadržani u N, da pokriju $\{x_0\} \times Y$. Neka su to $U_1 \times V_1, \dots, U_n \times V_n$ (i neka svi oni sijeku $\{x_0\} \times Y$). Neka je $W := U_1 \cap \cdots \cap U_n$. $W \subseteq X$ je otvoren i sadrži x_0.
Tvrdimo da je $W \times Y \subseteq \bigcup_j (U_j \times V_j) \subseteq N$.



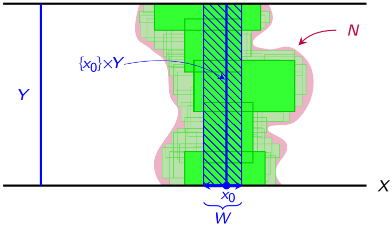
Zaista, neka je $(x, y) \in W \times Y$ i neka je i t.d. je $(x_0, y) \in U_i \times V_i$. Znači $y \in V_i$, a kako je $x \in U_j$ za sve j, dakle i za $j = i$, to je $(x, y) \in U_i \times V_i \subseteq N$. $\square$

Lema o cjevastoj okolini

Lema 19.3 (Lema o cjevastoj okolini)

Neka je $N \subseteq X \times Y$ okolina „sloja" $\{x_0\} \times Y$. Ako je Y kompaktan onda postoji okolina $W \ni x_0$ t.d. je $W \times Y \subseteq N$.

Dokaz: $\{x_0\} \times Y \cong Y$ je kompaktan, pa je dovoljno konačno mnogo baznih otvorenih skupova, koji su svi sadržani u N, da pokriju $\{x_0\} \times Y$. Neka su to $U_1 \times V_1, \dots, U_n \times V_n$ (i neka svi oni sijeku $\{x_0\} \times Y$). Neka je $W := U_1 \cap \dots \cap U_n$. $W \subseteq X$ je otvoren i sadrži x_0. Tvrdimo da je $W \times Y \subseteq \bigcup_j (U_j \times V_j) \subseteq N$.



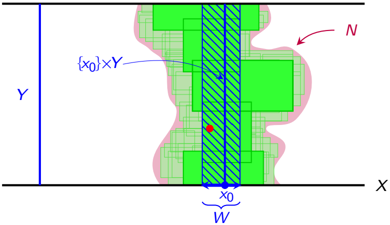
Zaista, neka je $(x, y) \in W \times Y$ i neka je i t.d. je $(x_0, y) \in U_i \times V_i$. Znači $y \in V_i$, a kako je $x \in U_j$ za sve j, dakle i za $j = i$, to je $(x, y) \in U_i \times V_i \subseteq N$. $\square$

Lema o cjevastoj okolini

Lema 19.3 (Lema o cjevastoj okolini)

Neka je $N \subseteq X \times Y$ okolina „sloja" $\{x_0\} \times Y$. Ako je Y kompaktan onda postoji okolina $W \ni x_0$ t.d. je $W \times Y \subseteq N$.

Dokaz: $\{x_0\} \times Y \cong Y$ je kompaktan, pa je dovoljno konačno mnogo baznih otvorenih skupova, koji su svi sadržani u N, da pokriju $\{x_0\} \times Y$.
Neka su to $U_1 \times V_1, \dots, U_n \times V_n$ (i neka svi oni sijeku $\{x_0\} \times Y$).
Neka je $W := U_1 \cap \dots \cap U_n$. $W \subseteq X$ je otvoren i sadrži x_0.
Tvrdimo da je $W \times Y \subseteq \bigcup_j (U_j \times V_j) \subseteq N$.



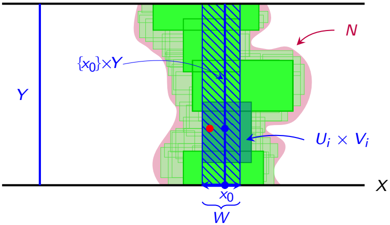
Zaista, neka je $(x, y) \in W \times Y$ i neka je i t.d. je $(x_0, y) \in U_i \times V_i$.
Znači $y \in V_i$, a kako je $x \in U_j$ za sve j, dakle i za $j = i$, to je $(x, y) \in U_i \times V_i \subseteq N$. $\square$

Lema o cjevastoj okolini

Lema 19.3 (Lema o cjevastoj okolini)

Neka je $N \subseteq X \times Y$ okolina „sloja" $\{x_0\} \times Y$. Ako je Y kompaktan onda postoji okolina $W \ni x_0$ t.d. je $W \times Y \subseteq N$.

Dokaz: $\{x_0\} \times Y \cong Y$ je kompaktan, pa je dovoljno konačno mnogo baznih otvorenih skupova, koji su svi sadržani u N, da pokriju $\{x_0\} \times Y$. Neka su to $U_1 \times V_1, \ldots, U_n \times V_n$ (i neka svi oni sijeku $\{x_0\} \times Y$). Neka je $W := U_1 \cap \cdots \cap U_n$. $W \subseteq X$ je otvoren i sadrži x_0. Tvrdimo da je $W \times Y \subseteq \bigcup_j (U_j \times V_j) \subseteq N$.



Zaista, neka je $(x, y) \in W \times Y$ i neka je i t.d. je $(x_0, y) \in U_i \times V_i$.

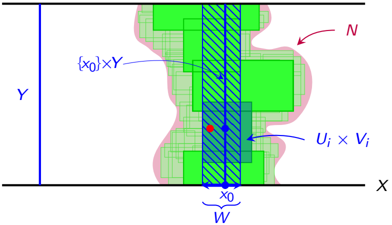
Znači $y \in V_i$, a kako je $x \in U_j$ za sve j, dakle i za $j = i$, to je $(x, y) \in U_i \times V_i \subseteq N$. $\square$

Lema o cjevastoj okolini

Lema 19.3 (Lema o cjevastoj okolini)

Neka je $N \subseteq X \times Y$ okolina „sloja" $\{x_0\} \times Y$. Ako je Y kompaktan onda postoji okolina $W \ni x_0$ t.d. je $W \times Y \subseteq N$.

Dokaz: $\{x_0\} \times Y \cong Y$ je kompaktan, pa je dovoljno konačno mnogo baznih otvorenih skupova, koji su svi sadržani u N, da pokriju $\{x_0\} \times Y$. Neka su to $U_1 \times V_1, \ldots, U_n \times V_n$ (i neka svi oni sijeku $\{x_0\} \times Y$). Neka je $W := U_1 \cap \cdots \cap U_n$. $W \subseteq X$ je otvoren i sadrži x_0. Tvrdimo da je $W \times Y \subseteq \bigcup_j (U_j \times V_j) \subseteq N$.



Zaista, neka je $(x, y) \in W \times Y$ i neka je i t.d. je $(x_0, y) \in U_i \times V_i$. Znači $y \in V_i$, a kako je $x \in U_j$ za sve j, dakle i za $j = i$, to je $(x, y) \in U_i \times V_i \subseteq N$. $\square$

Kompaktnost produkta

Teorem 19.4

Produkt $X \times Y$ kompaktnih prostora X i Y je kompaktan.

Dokaz: Neka je $\mathscr{U}$ otvoren pokrivač od $X \times Y$. Za točku $x_0 \in X$ je sloj $\{x_0\} \times Y \cong Y$, pa je kompaktan, te je pokriven s konačno mnogo članova $U_1, \dots, U_n \in \mathscr{U}$, tj. $\{x_0\} \times Y \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_n =: N$.
Prema lemi o cjevastoj okolini, postoji otvoren $W \subseteq X$ t.d. je $\{x_0\} \times Y \subseteq W \times Y \subseteq N$, pa je $W \times Y$ pokriven s konačno mnogo članova $U_1, \dots, U_n \in \mathscr{U}$.
Dakle, za svaki $x \in X$ postoji okolina $W_x \ni x$ t.d. je „cijev" $W_x \times Y$ pokrivena s konačno mnogo članova iz $\mathscr{U}$.
Kako je X kompaktan, već nekih konačno mnogo članova $W_{x_1}, \dots, W_{x_k}$ pokriva X,
pa konačno mnogo „cijevi" $W_{x_1} \times Y, \dots, W_{x_k} \times Y$ pokriva $X \times Y$,
a svaka je pokrivena s konačno mnogo članova familije $\mathscr{U}$.
Dakle, dovoljno je konačno mnogo članova familije $\mathscr{U}$ da pokrije X

Kompaktnost produkta

Teorem 19.4

Produkt $X \times Y$ kompaktnih prostora X i Y je kompaktan.

Dokaz: Neka je $\mathscr{U}$ otvoren pokrivač od $X \times Y$. Za točku $x_0 \in X$ je sloj $\{x_0\} \times Y \cong Y$, pa je kompaktan, te je pokriven s konačno mnogo članova $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{U}$, tj. $\{x_0\} \times Y \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n =: N$.

Prema lemi o cjevastoj okolini, postoji otvoren $W \subseteq X$ t.d. je $\{x_0\} \times Y \subseteq W \times Y \subseteq N$, pa je $W \times Y$ pokriven s konačno mnogo članova $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{U}$.

Dakle, za svaki $x \in X$ postoji okolina $W_x \ni x$ t.d. je „cijev" $W_x \times Y$ pokrivena s konačno mnogo članova iz $\mathscr{U}$.

Kako je X kompaktan, već nekih konačno mnogo članova $W_{x_1}, \ldots, W_{x_k}$ pokriva X,

pa konačno mnogo „cijevi" $W_{x_1} \times Y, \ldots, W_{x_k} \times Y$ pokriva $X \times Y$, a svaka je pokrivena s konačno mnogo članova familije $\mathscr{U}$.

Dakle, dovoljno je konačno mnogo članova familije $\mathscr{U}$ da pokrije X ...

Kompaktnost produkta

Teorem 19.4

Produkt $X \times Y$ kompaktnih prostora X i Y je kompaktan.

Dokaz: Neka je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač od $X \times Y$. Za točku $x_0 \in X$ je sloj $\{x_0\} \times Y \cong Y$, pa je kompaktan, te je pokriven s konačno mnogo članova $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$, tj. $\{x_0\} \times Y \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n =: N$.
Prema lemi o cjevastoj okolini, postoji otvoren $W \subseteq X$ t.d. je $\{x_0\} \times Y \subseteq W \times Y \subseteq N$, pa je $W \times Y$ pokriven s konačno mnogo članova $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$.
Dakle, za svaki $x \in X$ postoji okolina $W_x \ni x$ t.d. je „cijev" $W_x \times Y$ pokrivena s konačno mnogo članova iz $\mathcal{U}$.
Kako je X kompaktan, već nekih konačno mnogo članova $W_{x_1}, \ldots, W_{x_k}$ pokriva X,
pa konačno mnogo „cijevi" $W_{x_1} \times Y, \ldots, W_{x_k} \times Y$ pokriva $X \times Y$,
a svaka je pokrivena s konačno mnogo članova familije $\mathcal{U}$.
Dakle, dovoljno je konačno mnogo članova familije $\mathcal{U}$ da pokrije $X \times Y$.

Kompaktnost produkta

Teorem 19.4

Produkt $X \times Y$ kompaktnih prostora X i Y je kompaktan.

Dokaz: Neka je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač od $X \times Y$. Za točku $x_0 \in X$ je sloj $\{x_0\} \times Y \cong Y$, pa je kompaktan, te je pokriven s konačno mnogo članova $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$, tj. $\{x_0\} \times Y \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n =: N$.
Prema lemi o cjevastoj okolini, postoji otvoren $W \subseteq X$ t.d. je $\{x_0\} \times Y \subseteq W \times Y \subseteq N$, pa je $W \times Y$ pokriven s konačno mnogo članova $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$.
Dakle, za svaki $x \in X$ postoji okolina $W_x \ni x$ t.d. je „cijev" $W_x \times Y$ pokrivena s konačno mnogo članova iz $\mathcal{U}$.
Kako je X kompaktan, već nekih konačno mnogo članova $W_{x_1}, \ldots, W_{x_k}$ pokriva X,
pa konačno mnogo „cijevi" $W_{x_1} \times Y, \ldots, W_{x_k} \times Y$ pokriva $X \times Y$, a svaka je pokrivena s konačno mnogo članova familije $\mathcal{U}$.
Dakle, dovoljno je konačno mnogo članova familije $\mathcal{U}$ da pokrije $X \times Y$.

Kompaktnost produkta

Teorem 19.4

Produkt $X \times Y$ kompaktnih prostora X i Y je kompaktan.

Dokaz: Neka je $\mathscr{U}$ otvoren pokrivač od $X \times Y$. Za točku $x_0 \in X$ je sloj $\{x_0\} \times Y \cong Y$, pa je kompaktan, te je pokriven s konačno mnogo članova $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{U}$, tj. $\{x_0\} \times Y \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n =: N$.

Prema lemi o cjevastoj okolini, postoji otvoren $W \subseteq X$ t.d. je $\{x_0\} \times Y \subseteq W \times Y \subseteq N$, pa je $W \times Y$ pokriven s konačno mnogo članova $U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{U}$.

Dakle, za svaki $x \in X$ postoji okolina $W_x \ni x$ t.d. je „cijev” $W_x \times Y$ pokrivena s konačno mnogo članova iz $\mathscr{U}$.

Kako je X kompaktan, već nekih konačno mnogo članova $W_{x_1}, \ldots, W_{x_k}$ pokriva X,

pa konačno mnogo „cijevi” $W_{x_1} \times Y, \ldots, W_{x_k} \times Y$ pokriva $X \times Y$, a svaka je pokrivena s konačno mnogo članova familije $\mathscr{U}$.

Dakle, dovoljno je konačno mnogo članova familije $\mathscr{U}$ da pokrije X.

Kompaktnost produkta

Teorem 19.4

Produkt $X \times Y$ kompaktnih prostora X i Y je kompaktan.

Dokaz: Neka je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač od $X \times Y$. Za točku $x_0 \in X$ je sloj $\{x_0\} \times Y \cong Y$, pa je kompaktan, te je pokriven s konačno mnogo članova $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$, tj. $\{x_0\} \times Y \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n =: N$.
Prema lemi o cjevastoj okolini, postoji otvoren $W \subseteq X$ t.d. je $\{x_0\} \times Y \subseteq W \times Y \subseteq N$, pa je $W \times Y$ pokriven s konačno mnogo članova $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$.
Dakle, za svaki $x \in X$ postoji okolina $W_x \ni x$ t.d. je „cijev” $W_x \times Y$ pokrivena s konačno mnogo članova iz $\mathcal{U}$.
Kako je X kompaktan, već nekih konačno mnogo članova $W_{x_1}, \ldots, W_{x_k}$ pokriva X,
pa konačno mnogo „cijevi” $W_{x_1} \times Y, \ldots, W_{x_k} \times Y$ pokriva $X \times Y$,
a svaka je pokrivena s konačno mnogo članova familije $\mathcal{U}$.
Dakle, dovoljno je konačno mnogo članova familije $\mathcal{U}$ da pokrije X.

Kompaktnost produkta

Teorem 19.4

Produkt $X \times Y$ kompaktnih prostora X i Y je kompaktan.

Dokaz: Neka je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač od $X \times Y$. Za točku $x_0 \in X$ je sloj $\{x_0\} \times Y \cong Y$, pa je kompaktan, te je pokriven s konačno mnogo članova $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$, tj. $\{x_0\} \times Y \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n =: N$.

Prema lemi o cjevastoj okolini, postoji otvoren $W \subseteq X$ t.d. je $\{x_0\} \times Y \subseteq W \times Y \subseteq N$, pa je $W \times Y$ pokriven s konačno mnogo članova $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$.

Dakle, za svaki $x \in X$ postoji okolina $W_x \ni x$ t.d. je „cijev" $W_x \times Y$ pokrivena s konačno mnogo članova iz $\mathcal{U}$.

Kako je X kompaktan, već nekih konačno mnogo članova $W_{x_1}, \ldots, W_{x_k}$ pokriva X,

pa konačno mnogo „cijevi" $W_{x_1} \times Y, \ldots, W_{x_k} \times Y$ pokriva $X \times Y$, a svaka je pokrivena s konačno mnogo članova familije $\mathcal{U}$.

Dakle, dovoljno je konačno mnogo članova familije $\mathcal{U}$ da pokrije X.

Kompaktnost produkta

Teorem 19.4

Produkt $X \times Y$ kompaktnih prostora X i Y je kompaktan.

Dokaz: Neka je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač od $X \times Y$. Za točku $x_0 \in X$ je sloj $\{x_0\} \times Y \cong Y$, pa je kompaktan, te je pokriven s konačno mnogo članova $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$, tj. $\{x_0\} \times Y \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n =: N$.
Prema lemi o cjevastoj okolini, postoji otvoren $W \subseteq X$ t.d. je $\{x_0\} \times Y \subseteq W \times Y \subseteq N$, pa je $W \times Y$ pokriven s konačno mnogo članova $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$.
Dakle, za svaki $x \in X$ postoji okolina $W_x \ni x$ t.d. je „cijev" $W_x \times Y$ pokrivena s konačno mnogo članova iz $\mathcal{U}$.
Kako je X kompaktan, već nekih konačno mnogo članova $W_{x_1}, \dots, W_{x_k}$ pokriva X,
pa konačno mnogo „cijevi" $W_{x_1} \times Y, \dots, W_{x_k} \times Y$ pokriva $X \times Y$,
a svaka je pokrivena s konačno mnogo članova familije $\mathcal{U}$.
Dakle, dovoljno je konačno mnogo članova familije $\mathcal{U}$ da pokrije X. $\square$

Kompaktnost u $\mathbb{R}^n$

Lako se vidi kako se indukcijom dobije teorem za konačne produkte:

Teorem 20.1

Neka su $X_1, \ldots, X_n$ kompaktni prostori.
Tada je i njihov produkt $X_1 \times \cdots \times X_n$ kompaktan prostor. □

A sada lako dobivamo i karakterizaciju kompaktnosti u $\mathbb{E}^n$:

Teorem 20.2 (Heine-Borel)

Potprostor $A \subseteq \mathbb{E}^n$ je kompaktan ako i samo ako je zatvoren i omeđen.

Dokaz: $\Rightarrow$ Svaki je kompaktan podskup metričkog prostora omeđen i zatvoren (korolar 18.3).

$\Leftarrow$ Projekcije $p_j(A)$, $j = 1, \ldots, n$, su kompaktni podskupovi od $\mathbb{R}$ pa je, prema teoremu 19.2, $p_j(A) \subseteq [a_j, b_j]$ za neke $a_j, b_j \in \mathbb{R}$. Stoga je A, kao zatvoren podskup kompakta $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, kompaktan (teoremi 19.1 i 20.1). □

Kompaktnost u $\mathbb{R}^n$

Lako se vidi kako se indukcijom dobije teorem za konačne produkte:

Teorem 20.1

Neka su $X_1, \dots, X_n$ kompaktni prostori.
Tada je i njihov produkt $X_1 \times \cdots \times X_n$ kompaktan prostor. □

A sada lako dobivamo i karakterizaciju kompaktnosti u $\mathbb{E}^n$:

Teorem 20.2 (Heine-Borel)

Potprostor $A \subseteq \mathbb{E}^n$ je kompaktan ako i samo ako je zatvoren i omeđen.

Dokaz: $\Rightarrow$ Svaki je kompaktan podskup metričkog prostora omeđen i zatvoren (korolar 18.3).

$\Leftarrow$ Projekcije $p_j(A)$, $j = 1, \dots, n$, su kompaktni podskupovi od $\mathbb{R}$ pa je, prema teoremu 19.2, $p_j(A) \subseteq [a_j, b_j]$ za neke $a_j, b_j \in \mathbb{R}$. Stoga je A kao zatvoren podskup kompakta $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ kompaktan (teoremi 19.1 i 20.1).

Kompaktnost u $\mathbb{R}^n$

Lako se vidi kako se indukcijom dobije teorem za konačne produkte:

Teorem 20.1

*Neka su $X_1, \ldots, X_n$ kompaktni prostori.
Tada je i njihov produkt $X_1 \times \cdots \times X_n$ kompaktan prostor.* □

A sada lako dobivamo i karakterizaciju kompaktnosti u $\mathbb{E}^n$:

Teorem 20.2 (Heine-Borel)

Potprostor $A \subseteq \mathbb{E}^n$ je kompaktan ako i samo ako je zatvoren i omeđen.

Dokaz: $\Rightarrow$ Svaki je kompaktan podskup metričkog prostora omeđen i zatvoren (korolar 18.3).

$\Leftarrow$ Projekcije $p_j(A)$, $j = 1, \ldots, n$, su kompaktni podskupovi od $\mathbb{R}$ pa je, prema teoremu 19.2, $p_j(A) \subseteq [a_j, b_j]$ za neke $a_j, b_j \in \mathbb{R}$. Stoga je A kao zatvoren podskup kompakta $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ kompaktan (teoremi 19.1 i 20.1).

Kompaktnost u $\mathbb{R}^n$

Lako se vidi kako se indukcijom dobije teorem za konačne produkte:

Teorem 20.1

Neka su $X_1, \dots, X_n$ kompaktni prostori.
Tada je i njihov produkt $X_1 \times \cdots \times X_n$ kompaktan prostor. $\square$

A sada lako dobivamo i karakterizaciju kompaktnosti u $\mathbb{E}^n$:

Teorem 20.2 (Heine-Borel)

Potprostor $A \subseteq \mathbb{E}^n$ je kompaktan ako i samo ako je zatvoren i omeđen.

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Svaki je kompaktan podskup metričkog prostora omeđen i zatvoren (korolar 18.3).

$\boxed{\Leftarrow}$ Projekcije $p_j(A)$, $j = 1, \dots, n$, su kompaktni podskupovi od $\mathbb{R}$ pa je, prema teoremu 19.2, $p_j(A) \subseteq [a_j, b_j]$ za neke $a_j, b_j \in \mathbb{R}$. Stoga je A, kao zatvoren podskup kompakta $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, kompaktan (teorem 19.1 i 20.1).

Kompaktnost u $\mathbb{R}^n$

Lako se vidi kako se indukcijom dobije teorem za konačne produkte:

Teorem 20.1

Neka su $X_1, \ldots, X_n$ kompaktni prostori.
Tada je i njihov produkt $X_1 \times \cdots \times X_n$ kompaktan prostor. □

A sada lako dobivamo i karakterizaciju kompaktnosti u $\mathbb{E}^n$:

Teorem 20.2 (Heine-Borel)

Potprostor $A \subseteq \mathbb{E}^n$ je kompaktan ako i samo ako je zatvoren i omeđen.

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Svaki je kompaktan podskup metričkog prostora omeđen i zatvoren (korolar 18.3).

$\boxed{\Leftarrow}$ Projekcije $p_j(A)$, $j = 1, \ldots, n$, su kompaktni podskupovi od $\mathbb{R}$ pa je, prema teoremu 19.2, $p_j(A) \subseteq [a_j, b_j]$ za neke $a_j, b_j \in \mathbb{R}$. Stoga je A, kao zatvoren podskup kompakta $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, kompaktan (teoremi 19.1 i 20.1). □

Neprekidna bijekcija na kompaktu

Dokažimo i jednu verziju teorema o inverznom preslikavanju:

Teorem 20.3

Svaka neprekidna bijekcija $f : X \to Y$ kompaktnog prostora X na Hausdorffov prostor Y je homeomorfizam.

Dokaz: Treba samo pokazati da je inverzno preslikavanje f^{-1}, koje postoji jer je f bijekcija, neprekidno. Prema propoziciji 14.6, dovoljno je pokazati da je za svaki zatvoren skup $F \subseteq X$, skup $\left(f^{-1}\right)^{-1}(F) = f(F)$ zatvoren u Y. F je kompaktan kao zatvoren podskup kompakta X (teorem19.1), pa je $f(F)$ kompaktan (teorem 18.6), stoga i zatvoren jer je Y Hausdorffov (teorem 18.2). $\square$

Posljedica 20.4

Neka je $f : X \to Y$ neprekidna injekcija kompaktnog prostora X u Hausdorffov prostor Y. Tada je f smještenje, tj. homeomorfizam prostora X na potprostor $f(X) \subseteq Y$. $\square$

Neprekidna bijekcija na kompaktu

Dokažimo i jednu verziju teorema o inverznom preslikavanju:

Teorem 20.3

Svaka neprekidna bijekcija $f: X \to Y$ kompaktnog prostora X na Hausdorffov prostor Y je homeomorfizam.

Dokaz: Treba samo pokazati da je inverzno preslikavanje f^{-1}, koje postoji jer je f bijekcija, neprekidno. Prema propoziciji 14.6, dovoljno je pokazati da je za svaki zatvoren skup $F \subseteq X$, skup $\left(f^{-1}\right)^{-1}(F) = f(F)$ zatvoren u Y. F je kompaktan kao zatvoren podskup kompakta X (teorem19.1), pa je $f(F)$ kompaktan (teorem 18.6), stoga i zatvoren jer je Y Hausdorffov (teorem 18.2). □

Posljedica 20.4

Neka je $f: X \to Y$ neprekidna injekcija kompaktnog prostora X u Hausdorffov prostor Y. Tada je f smještenje, tj. homeomorfizam prostora X na potprostor $f(X) \subseteq Y$. □

Neprekidna bijekcija na kompaktu

Dokažimo i jednu verziju teorema o inverznom preslikavanju:

Teorem 20.3

Svaka neprekidna bijekcija $f\colon X \to Y$ kompaktnog prostora X na Hausdorffov prostor Y je homeomorfizam.

Dokaz: Treba samo pokazati da je inverzno preslikavanje f^{-1}, koje postoji jer je f bijekcija, neprekidno. Prema propoziciji 14.6, dovoljno je pokazati da je za svaki zatvoren skup $F \subseteq X$, skup $\left(f^{-1}\right)^{-1}(F) = f(F)$ zatvoren u Y. F je kompaktan kao zatvoren podskup kompakta X (teorem19.1), pa je $f(F)$ kompaktan (teorem 18.6), stoga i zatvoren jer je Y Hausdorffov (teorem 18.2). □

Posljedica 20.4

Neka je $f\colon X \to Y$ neprekidna injekcija kompaktnog prostora X u Hausdorffov prostor Y. Tada je f smještenje, tj. homeomorfizam prostora X na potprostor $f(X) \subseteq Y$. □

Neprekidna bijekcija na kompaktu

Dokažimo i jednu verziju teorema o inverznom preslikavanju:

Teorem 20.3

Svaka neprekidna bijekcija $f: X \to Y$ kompaktnog prostora X na Hausdorffov prostor Y je homeomorfizam.

Dokaz: Treba samo pokazati da je inverzno preslikavanje f^{-1}, koje postoji jer je f bijekcija, neprekidno. Prema propoziciji 14.6, dovoljno je pokazati da je za svaki zatvoren skup $F \subseteq X$, skup $\left(f^{-1}\right)^{-1}(F) = f(F)$ zatvoren u Y. F je kompaktan kao zatvoren podskup kompakta X (teorem19.1), pa je $f(F)$ kompaktan (teorem 18.6), stoga i zatvoren jer je Y Hausdorffov (teorem 18.2). $\square$

Posljedica 20.4

Neka je $f: X \to Y$ neprekidna injekcija kompaktnog prostora X u Hausdorffov prostor Y. Tada je f smještenje, tj. homeomorfizam prostora X na potprostor $f(X) \subseteq Y$. $\square$

Neprekidna bijekcija na kompaktu

Dokažimo i jednu verziju teorema o inverznom preslikavanju:

Teorem 20.3

Svaka neprekidna bijekcija $f: X \to Y$ kompaktnog prostora X na Hausdorffov prostor Y je homeomorfizam.

Dokaz: Treba samo pokazati da je inverzno preslikavanje f^{-1}, koje postoji jer je f bijekcija, neprekidno. Prema propoziciji 14.6, dovoljno je pokazati da je za svaki zatvoren skup $F \subseteq X$, skup $\left(f^{-1}\right)^{-1}(F) = f(F)$ zatvoren u Y. F je kompaktan kao zatvoren podskup kompakta X (teorem19.1), pa je $f(F)$ kompaktan (teorem 18.6), stoga i zatvoren jer je Y Hausdorffov (teorem 18.2). $\square$

Posljedica 20.4

Neka je $f: X \to Y$ neprekidna injekcija kompaktnog prostora X u Hausdorffov prostor Y. Tada je f smještenje, tj. homeomorfizam prostora X na potprostor $f(X) \subseteq Y$. $\square$

5 POVEZANI PROSTORI

- Povezanost
- Povezanost putevima
- Komponente

Intuitivno

Povezan prostor je onaj „koji se sastoji od jednog komada”.

Ali što to znači?

Intuitivno je jasno da je segment $[0,1]$ sastavljen od jednog komada, tj. da je povezan, a da skup $A = [0,1] \cup [3,4]$ nije.

Ali što je sa skupovima $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \ldots$?

Ili s tzv. *topološkom sinusnom krivuljom*, tj. podskupom ravnine $\{(x, \frac{1}{x}) : 0 < x \leqslant 1\} \cup \{(0, y) : -1 \leqslant y \leqslant 1\}$?

Intuitivno

Povezan prostor je onaj „koji se sastoji od jednog komada”.

Ali što to znači?

Intuitivno je jasno da je segment $[0, 1]$ sastavljen od jednog komada, tj. da je povezan, a da skup $A = [0, 1] \cup [3, 4]$ nije.

Ali što je sa skupovima $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \ldots$?

Ili s tzv. *topološkom sinusnom krivuljom*, tj. podskupom ravnine $\{(x, \frac{1}{x}) : 0 < x \leqslant 1\} \cup \{(0, y) : -1 \leqslant y \leqslant 1\}$?

Intuitivno

Povezan prostor je onaj „koji se sastoji od jednog komada”.

Ali što to znači?

Intuitivno je jasno da je segment $[0,1]$ sastavljen od jednog komada, tj. da je povezan, a da skup $A = [0,1] \cup [3,4]$ nije.
Ali što je sa skupovima $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, … ?

Ili s tzv. *topološkom sinusnom krivuljom*, tj. podskupom ravnine $\{(x, \frac{1}{x}) : 0 < x \leqslant 1\} \cup \{(0, y) : -1 \leqslant y \leqslant 1\}$?

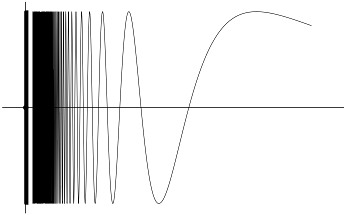
Intuitivno

Povezan prostor je onaj „koji se sastoji od jednog komada”.

Ali što to znači?

Intuitivno je jasno da je segment $[0,1]$ sastavljen od jednog komada, tj. da je povezan, a da skup $A = [0,1] \cup [3,4]$ nije.
Ali što je sa skupovima $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ... ?

Ili s tzv. *topološkom sinusnom krivuljom*, tj. podskupom ravnine $\left\{\left(x, \frac{1}{x}\right) : 0 < x \leqslant 1\right\} \cup \{(0,y) : -1 \leqslant y \leqslant 1\}$?



Separacija topološkog prostora

Nekako je lakše reći kada prostor *nije* povezan.
Intuitivno, prostor *nije povezan* ako ga možemo rastaviti na dva komada koji su „daleko” jedan od drugoga.

A što znači „daleko”? U slučaju metričkog prostora točka x je „blizu” skupa A ako je njezina udaljenost do A jednaka nuli, $d(x, A) = 0$, tj. ako je x u zatvorenju skupa A, $x \in \overline{A}$, (teorem 14.19).

Definicija 21.1

Separacija topološkog prostora je par disjunktnih nepraznih otvorenih podskupova čija je unija cijeli prostor.
Rabit ćemo oznaku $X = U \sqcup V$.

Uoči da ako je $X = U \sqcup V$ separacija prostora X onda su podskupovi U i V istovremeno i zatvoreni, tako da se separacija može definirati i kao rastav prostora X na dva neprazna disjunktna zatvorena skupa.

Separacija topološkog prostora

Nekako je lakše reći kada prostor *nije* povezan.
Intuitivno, prostor *nije povezan* ako ga možemo rastaviti na dva komada koji su „daleko” jedan od drugoga.

A što znači „daleko”? U slučaju metričkog prostora točka x je „blizu” skupa A ako je njezina udaljenost do A jednaka nuli, $d(x, A) = 0$, tj. ako je x u zatvorenju skupa A, $x \in \overline{A}$, (teorem 14.19).

Definicija 21.1

Separacija topološkog prostora je par disjunktnih nepraznih otvorenih podskupova čija je unija cijeli prostor.

Rabit ćemo oznaku $X = U \sqcup V$.

Uoči da ako je $X = U \sqcup V$ separacija prostora X onda su podskupovi U i V istovremeno i zatvoreni, tako da se separacija može definirati i kao rastav prostora X na dva neprazna disjunktna zatvorena skupa.

Separacija topološkog prostora

Nekako je lakše reći kada prostor *nije* povezan.
Intuitivno, prostor *nije povezan* ako ga možemo rastaviti na dva komada koji su „daleko" jedan od drugoga.

A što znači „daleko"? U slučaju metričkog prostora točka x je „blizu" skupa A ako je njezina udaljenost do A jednaka nuli, $d(x, A) = 0$, tj. ako je x u zatvorenju skupa A, $x \in \overline{A}$, (teorem 14.19).

Definicija 21.1

Separacija topološkog prostora je par disjunktnih nepraznih otvorenih podskupova čija je unija cijeli prostor.
Rabit ćemo oznaku $X = U \sqcup V$.

Uoči da ako je $X = U \sqcup V$ separacija prostora X onda su podskupovi U i V istovremeno i zatvoreni, tako da se separacija može definirati i kao rastav prostora X na dva neprazna disjunktna zatvorena skupa.

Separacija topološkog prostora

Nekako je lakše reći kada prostor *nije* povezan.
Intuitivno, prostor *nije povezan* ako ga možemo rastaviti na dva komada koji su „daleko" jedan od drugoga.

A što znači „daleko"? U slučaju metričkog prostora točka x je „blizu" skupa A ako je njezina udaljenost do A jednaka nuli, $d(x, A) = 0$, tj. ako je x u zatvorenju skupa A, $x \in \overline{A}$, (teorem 14.19).

Definicija 21.1

Separacija topološkog prostora je par disjunktnih nepraznih otvorenih podskupova čija je unija cijeli prostor.
Rabit ćemo oznaku $X = U \sqcup V$.

Uoči da ako je $X = U \sqcup V$ separacija prostora X onda su podskupovi U i V istovremeno i zatvoreni, tako da se separacija može definirati i kao rastav prostora X na dva neprazna disjunktna zatvorena skupa.

Povezanost

Definicija 21.2

Topološki prostor je *povezan* ako ne postoji njegova separacija.

Dakle, topološki prostor je povezan ako se *ne može* rastaviti na dva disjunktna neprazna *otvorena* skupa, ili ekvivalentno, ako se *ne može* rastaviti na dva disjunktna neprazna *zatvorena* skupa.

Važno je uočiti da oba skupa moraju biti otvoreni, ili
oba skupa moraju biti zatvoreni.

Primjer 21.3

Povezanost

Definicija 21.2

Topološki prostor je *povezan* ako ne postoji njegova separacija.

Dakle, topološki prostor je povezan ako se *ne može* rastaviti na dva disjunktna neprazna *otvorena* skupa, ili ekvivalentno, ako se *ne može* rastaviti na dva disjunktna neprazna *zatvorena* skupa.

Važno je uočiti da oba skupa moraju biti otvoreni, ili
oba skupa moraju biti zatvoreni.

Primjer 21.3

Povezanost

Definicija 21.2

Topološki prostor je *povezan* ako ne postoji njegova separacija.

Dakle, topološki prostor je povezan ako se *ne može* rastaviti na dva disjunktna neprazna *otvorena* skupa, ili ekvivalentno, ako se *ne može* rastaviti na dva disjunktna neprazna *zatvorena* skupa.

Važno je uočiti da oba skupa moraju biti otvoreni, ili
oba skupa moraju biti zatvoreni.

Primjer 21.3

Povezanost

Definicija 21.2

Topološki prostor je *povezan* ako ne postoji njegova separacija.

Dakle, topološki prostor je povezan ako se *ne može* rastaviti na dva disjunktna neprazna *otvorena* skupa, ili ekvivalentno, ako se *ne može* rastaviti na dva disjunktna neprazna *zatvorena* skupa.

Važno je uočiti da oba skupa moraju biti otvoreni, ili
oba skupa moraju biti zatvoreni.

Primjer 21.3

- Svaki diskretan prostor s barem dvije točke je nepovezan.
- $\mathbb{R}_\ell$, tj. $\mathbb{R}$ s odozdo graničnom topologijom je nepovezan.

Povezanost

Definicija 21.2

Topološki prostor je *povezan* ako ne postoji njegova separacija.

Dakle, topološki prostor je povezan ako se *ne može* rastaviti na dva disjunktna neprazna *otvorena* skupa, ili ekvivalentno, ako se *ne može* rastaviti na dva disjunktna neprazna *zatvorena* skupa.

Važno je uočiti da oba skupa moraju biti otvoreni, ili
oba skupa moraju biti zatvoreni.

Primjer 21.3

- Svaki diskretan prostor s barem dvije točke je nepovezan.
- $\mathbb{R}_\ell$, tj. $\mathbb{R}$ s odozdo graničnom topologijom je nepovezan.

Otvoreno-zatvoreni skupovi (*clopen sets*)

U svakom topološkom prostoru postoje dva skupa koji su istovremeno i otvoreni i zatvoreni: $\emptyset$ i X.

Teorem 21.4

Topološki prostor X je povezan ako i samo ako su $\emptyset$ i X jedini podskupovi koji su i otvoreni i zatvoreni.

Dokaz: Prostor X nije povezan ako i samo ako postoji separacija $X = A \sqcup B$, a to upravo znači da su skupovi A i B neprazni disjunktni otvoreni skupovi, pa su, zbog disjunktnosti, jedan drugome komplementi, te su stoga i zatvoreni. $\square$

Povezanost potprostora definira se na isti način, s tim da *otvoren* odnosno *zatvoren* treba uzeti s obzirom na relativnu topologiju, tj. s obzirom na topologiju potprostora. Korisna je sljedeća propozicija:

Otvoreno-zatvoreni skupovi (*clopen sets*)

U svakom topološkom prostoru postoje dva skupa koji su istovremeno i otvoreni i zatvoreni: $\emptyset$ i X.

Teorem 21.4

Topološki prostor X je povezan ako i samo ako su $\emptyset$ i X jedini podskupovi koji su i otvoreni i zatvoreni.

Dokaz: Prostor X nije povezan ako i samo ako postoji separacija $X = A \sqcup B$, a to upravo znači da su skupovi A i B neprazni disjunktni otvoreni skupovi, pa su, zbog disjunktnosti, jedan drugome komplementi, te su stoga i zatvoreni. $\square$

Povezanost potprostora definira se na isti način, s tim da *otvoren* odnosno *zatvoren* treba uzeti s obzirom na relativnu topologiju, tj. s obzirom na topologiju potprostora. Korisna je sljedeća propozicija:

Otvoreno-zatvoreni skupovi (*clopen sets*)

U svakom topološkom prostoru postoje dva skupa koji su istovremeno i otvoreni i zatvoreni: $\emptyset$ i X.

Teorem 21.4

Topološki prostor X je povezan ako i samo ako su $\emptyset$ i X jedini podskupovi koji su i otvoreni i zatvoreni.

Dokaz: Prostor X nije povezan ako i samo ako postoji separacija $X = A \sqcup B$, a to upravo znači da su skupovi A i B neprazni disjunktni otvoreni skupovi, pa su, zbog disjunktnosti, jedan drugome komplementi, te su stoga i zatvoreni. $\square$

Povezanost potprostora definira se na isti način, s tim da *otvoren* odnosno *zatvoren* treba uzeti s obzirom na relativnu topologiju, tj. s obzirom na topologiju potprostora. Korisna je sljedeća propozicija:

Otvoreno-zatvoreni skupovi (*clopen sets*)

U svakom topološkom prostoru postoje dva skupa koji su istovremeno i otvoreni i zatvoreni: $\emptyset$ i X.

Teorem 21.4

Topološki prostor X je povezan ako i samo ako su $\emptyset$ i X jedini podskupovi koji su i otvoreni i zatvoreni.

Dokaz: Prostor X nije povezan ako i samo ako postoji separacija $X = A \sqcup B$, a to upravo znači da su skupovi A i B neprazni disjunktni otvoreni skupovi, pa su, zbog disjunktnosti, jedan drugome komplementi, te su stoga i zatvoreni. $\square$

Povezanost potprostora definira se na isti način, s tim da *otvoren* odnosno *zatvoren* treba uzeti s obzirom na relativnu topologiju, tj. s obzirom na topologiju potprostora. Korisna je sljedeća propozicija:

Otvoreno-zatvoreni skupovi (*clopen sets*)

U svakom topološkom prostoru postoje dva skupa koji su istovremeno i otvoreni i zatvoreni: $\emptyset$ i X.

Teorem 21.4

Topološki prostor X je povezan ako i samo ako su $\emptyset$ i X jedini podskupovi koji su i otvoreni i zatvoreni.

Dokaz: Prostor X nije povezan ako i samo ako postoji separacija $X = A \sqcup B$, a to upravo znači da su skupovi A i B neprazni disjunktni otvoreni skupovi, pa su, zbog disjunktnosti, jedan drugome komplementi, te su stoga i zatvoreni. $\square$

Povezanost potprostora definira se na isti način, s tim da *otvoren* odnosno *zatvoren* treba uzeti s obzirom na relativnu topologiju, tj. s obzirom na topologiju potprostora. Korisna je sljedeća propozicija:

Separacija potprostora

Propozicija 21.5

Neka je X topološki prostor. Separacija potprostora $Y \subseteq X$ je par disjunktnih nepraznih skupova A i B t.d. je $Y = A \cup B$ i niti jedan ne sadrži gomilište drugoga. (Opet rabimo oznaku $Y = A \sqcup B$.)

!! *Gomilište* znači *gomilište u* X, ono ne mora pripadati potprostoru Y!

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka je $Y = A \sqcup B$.
A je zatvoren u Y pa je $A = \mathrm{Cl}_Y A = \overline{A} \cap Y$.
Stoga je $\overline{A} \cap B = \overline{A} \cap (Y \cap B) = (\overline{A} \cap Y) \cap B = A \cap B = \emptyset$,
pa B ne sadrži niti jedno gomilište skupa A.
Analogno se pokazuje da A ne sadrži niti jedno gomilište skupa B.

$\Leftarrow$ Obratno, neka je $Y = A \cup B$ gdje su A i B disjunktni neprazni skupovi i niti jedan ne sadrži gomilište drugoga, tj. $\overline{A} \cap B = \emptyset$ i $\overline{B} \cap A = \emptyset$.
Tada je $\overline{A} \cap Y = \overline{A} \cap (A \cup B) = (\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B) = \overline{A} \cap A = A$,
i analogno je $\overline{B} \cap Y = B$, pa su A i B zatvoreni u Y, tj. $Y = A \sqcup B$. $\square$

Separacija potprostora

Propozicija 21.5

Neka je X topološki prostor. Separacija potprostora $Y \subseteq X$ je par disjunktnih nepraznih skupova A i B t.d. je $Y = A \cup B$ i niti jedan ne sadrži gomilište drugoga. (Opet rabimo oznaku $Y = A \sqcup B$.)

!! *Gomilište* znači *gomilište u* X, ono ne mora pripadati potprostoru Y!

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $Y = A \sqcup B$.

A je zatvoren u Y pa je $A = \mathrm{Cl}_Y A = \overline{A} \cap Y$.

Stoga je $\overline{A} \cap B = \overline{A} \cap (Y \cap B) = (\overline{A} \cap Y) \cap B = A \cap B = \emptyset$,

pa B ne sadrži niti jedno gomilište skupa A.

Analogno se pokazuje da A ne sadrži niti jedno gomilište skupa B.

$\boxed{\Leftarrow}$ Obratno, neka je $Y = A \cup B$ gdje su A i B disjunktni neprazni skupovi i niti jedan ne sadrži gomilište drugoga, tj. $\overline{A} \cap B = \emptyset$ i $\overline{B} \cap A = \emptyset$.

Tada je $\overline{A} \cap Y = \overline{A} \cap (A \cup B) = (\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B) = \overline{A} \cap A = A$,

i analogno je $\overline{B} \cap Y = B$, pa su A i B zatvoreni u Y, tj. $Y = A \sqcup B$. □

Separacija potprostora

Propozicija 21.5

Neka je X topološki prostor. Separacija potprostora $Y \subseteq X$ je par disjunktnih nepraznih skupova A i B t.d. je $Y = A \cup B$ i niti jedan ne sadrži gomilište drugoga. (Opet rabimo oznaku $Y = A \sqcup B$.)

!! *Gomilište* znači *gomilište u X*, ono ne mora pripadati potprostoru Y!

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka je $Y = A \sqcup B$.

A je zatvoren u Y pa je $A = \mathrm{Cl}_Y A = \overline{A} \cap Y$.

Stoga je $\overline{A} \cap B = \overline{A} \cap (Y \cap B) = (\overline{A} \cap Y) \cap B = A \cap B = \emptyset$,

pa B ne sadrži niti jedno gomilište skupa A.

Analogno se pokazuje da A ne sadrži niti jedno gomilište skupa B.

$\Leftarrow$ Obratno, neka je $Y = A \cup B$ gdje su A i B disjunktni neprazni skupovi i niti jedan ne sadrži gomilište drugoga, tj. $\overline{A} \cap B = \emptyset$ i $\overline{B} \cap A = \emptyset$.

Tada je $\overline{A} \cap Y = \overline{A} \cap (A \cup B) = (\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B) = \overline{A} \cap A = A$,

i analogno je $\overline{B} \cap Y = B$, pa su A i B zatvoreni u Y, tj. $Y = A \sqcup B$. $\square$

Separacija potprostora

Propozicija 21.5

Neka je X topološki prostor. Separacija potprostora $Y \subseteq X$ je par disjunktnih nepraznih skupova A i B t.d. je $Y = A \cup B$ i niti jedan ne sadrži gomilište drugoga. (Opet rabimo oznaku $Y = A \sqcup B$.)

!! *Gomilište* znači *gomilište u* X, ono ne mora pripadati potprostoru Y!

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $Y = A \sqcup B$.

A je zatvoren u Y pa je $A = \mathrm{Cl}_Y\, A = \overline{A} \cap Y$.

Stoga je $\overline{A} \cap B = \overline{A} \cap (Y \cap B) = (\overline{A} \cap Y) \cap B = A \cap B = \emptyset$,

pa B ne sadrži niti jedno gomilište skupa A.

Analogno se pokazuje da A ne sadrži niti jedno gomilište skupa B.

$\boxed{\Leftarrow}$ Obratno, neka je $Y = A \cup B$ gdje su A i B disjunktni neprazni skupovi i niti jedan ne sadrži gomilište drugoga, tj. $\overline{A} \cap B = \emptyset$ i $\overline{B} \cap A = \emptyset$.

Tada je $\overline{A} \cap Y = \overline{A} \cap (A \cup B) = (\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B) = \overline{A} \cap A = A$,

i analogno je $\overline{B} \cap Y = B$, pa su A i B zatvoreni u Y, tj. $Y = A \sqcup B$. $\square$

Separacija potprostora

Propozicija 21.5

Neka je X topološki prostor. Separacija potprostora $Y \subseteq X$ je par disjunktnih nepraznih skupova A i B t.d. je $Y = A \cup B$ i niti jedan ne sadrži gomilište drugoga. (Opet rabimo oznaku $Y = A \sqcup B$.)

!! *Gomilište* znači *gomilište u* X, ono ne mora pripadati potprostoru Y!

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka je $Y = A \sqcup B$.

A je zatvoren u Y pa je $A = \mathrm{Cl}_Y A = \overline{A} \cap Y$.

Stoga je $\overline{A} \cap B = \overline{A} \cap (Y \cap B) = (\overline{A} \cap Y) \cap B = A \cap B = \emptyset$,

pa B ne sadrži niti jedno gomilište skupa A.

Analogno se pokazuje da A ne sadrži niti jedno gomilište skupa B.

$\Leftarrow$ Obratno, neka je $Y = A \cup B$ gdje su A i B disjunktni neprazni skupovi i niti jedan ne sadrži gomilište drugoga, tj. $\overline{A} \cap B = \emptyset$ i $\overline{B} \cap A = \emptyset$.

Tada je $\overline{A} \cap Y = \overline{A} \cap (A \cup B) = (\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B) = \overline{A} \cap A = A$,

i analogno je $\overline{B} \cap Y = B$, pa su A i B zatvoreni u Y, tj. $Y = A \sqcup B$. □

Separacija potprostora

Propozicija 21.5

Neka je X topološki prostor. Separacija potprostora $Y \subseteq X$ je par disjunktnih nepraznih skupova A i B t.d. je $Y = A \cup B$ i niti jedan ne sadrži gomilište drugoga. (Opet rabimo oznaku $Y = A \sqcup B$.)

!! *Gomilište* znači *gomilište u* X, ono ne mora pripadati potprostoru Y!

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka je $Y = A \sqcup B$.

A je zatvoren u Y pa je $A = \mathrm{Cl}_Y\, A = \overline{A} \cap Y$.
Stoga je $\overline{A} \cap B = \overline{A} \cap (Y \cap B) = (\overline{A} \cap Y) \cap B = A \cap B = \emptyset$,
pa B ne sadrži niti jedno gomilište skupa A.
Analogno se pokazuje da A ne sadrži niti jedno gomilište skupa B.

$\Leftarrow$ Obratno, neka je $Y = A \cup B$ gdje su A i B disjunktni neprazni skupovi i niti jedan ne sadrži gomilište drugoga, tj. $\overline{A} \cap B = \emptyset$ i $\overline{B} \cap A = \emptyset$.
Tada je $\overline{A} \cap Y = \overline{A} \cap (A \cup B) = (\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B) = \overline{A} \cap A = A$,
i analogno je $\overline{B} \cap Y = B$, pa su A i B zatvoreni u Y, tj. $Y = A \sqcup B$. $\square$

Primjeri

Primjer 21.6

- $[1,2] \cup [3,4]$ nije povezan potprostor od $\mathbb{R}$.
- Niti $\langle 1,2\rangle \cup \langle 2,3\rangle$ nije povezan potprostor od $\mathbb{R}$.
- Ali $\langle 1,2] \cup \langle 2,3\rangle$ je povezan potprostor od $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nisu povezani potprostori od $\mathbb{R}$.

Primjeri

Primjer 21.6

- $[1, 2] \cup [3, 4]$ nije povezan potprostor od $\mathbb{R}$.
- Niti $\langle 1, 2\rangle \cup \langle 2, 3\rangle$ nije povezan potprostor od $\mathbb{R}$.
- Ali $\langle 1, 2] \cup \langle 2, 3\rangle$ je povezan potprostor od $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nisu povezani potprostori od $\mathbb{R}$.

Primjeri

Primjer 21.6

- $[1, 2] \cup [3, 4]$ nije povezan potprostor od $\mathbb{R}$.
- Niti $\langle 1, 2\rangle \cup \langle 2, 3\rangle$ nije povezan potprostor od $\mathbb{R}$.
- Ali $\langle 1, 2] \cup \langle 2, 3\rangle$ je povezan potprostor od $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nisu povezani potprostori od $\mathbb{R}$.

Primjeri

Primjer 21.6

- $[1, 2] \cup [3, 4]$ nije povezan potprostor od $\mathbb{R}$.
- Niti $\langle 1, 2\rangle \cup \langle 2, 3\rangle$ nije povezan potprostor od $\mathbb{R}$.
- Ali $\langle 1, 2] \cup \langle 2, 3\rangle$ je povezan potprostor od $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nisu povezani potprostori od $\mathbb{R}$.

Još jedna karakterizacija povezanosti

Teorem 21.7

Topološki prostor X je povezan ako i samo ako ne postoji neprekidna surjekcija $f\colon X \to \{0,1\}$, gdje je $\{0,1\}$ dvočlan skup s diskretnom topologijom.

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka je X povezan i pretpostavimo da postoji neprekidna surjekcija $f\colon X \to \{0,1\}$. Jednočlan skup $\{0\} \subseteq \{0,1\}$ je otvoren u diskretnoj topologiji, pa je $U := f^{-1}(\{0\})$ otvoren podskup od X. Analogno, $V := f^{-1}(\{1\})$ je otvoren. Kako je f surjekcija, U i V su neprazni, a očito je $U \cap V = \emptyset$, pa je $X = U \sqcup V$.

$\Leftarrow$ Neka X nije povezan i neka je $X = A \sqcup B$ separacija.

Onda je funkcija $f\colon X \to \{0,1\}$ definirana s $f(x) = \begin{cases} 0\,, & x \in A \\ 1\,, & x \in B \end{cases}$ neprekidna surjekcija. $\square$

Još jedna karakterizacija povezanosti

Teorem 21.7

Topološki prostor X je povezan ako i samo ako ne postoji neprekidna surjekcija $f\colon X \to \{0,1\}$, gdje je $\{0,1\}$ dvočlan skup s diskretnom topologijom.

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka je X povezan i pretpostavimo da postoji neprekidna surjekcija $f\colon X \to \{0,1\}$. Jednočlan skup $\{0\} \subseteq \{0,1\}$ je otvoren u diskretnoj topologiji, pa je $U := f^{-1}(\{0\})$ otvoren podskup od X. Analogno, $V := f^{-1}(\{1\})$ je otvoren. Kako je f surjekcija, U i V su neprazni, a očito je $U \cap V = \emptyset$, pa je $X = U \sqcup V$.

$\Leftarrow$ Neka X nije povezan i neka je $X = A \sqcup B$ separacija.

Onda je funkcija $f\colon X \to \{0,1\}$ definirana s $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in A \\ 1, & x \in B \end{cases}$ neprekidna surjekcija. $\square$

Još jedna karakterizacija povezanosti

Teorem 21.7

Topološki prostor X je povezan ako i samo ako ne postoji neprekidna surjekcija $f\colon X \to \{0,1\}$, gdje je $\{0,1\}$ dvočlan skup s diskretnom topologijom.

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka je X povezan i pretpostavimo da postoji neprekidna surjekcija $f\colon X \to \{0,1\}$. Jednočlan skup $\{0\} \subseteq \{0,1\}$ je otvoren u diskretnoj topologiji, pa je $U := f^{-1}(\{0\})$ otvoren podskup od X. Analogno, $V := f^{-1}(\{1\})$ je otvoren. Kako je f surjekcija, U i V su neprazni, a očito je $U \cap V = \emptyset$, pa je $X = U \sqcup V$.

$\Leftarrow$ Neka X nije povezan i neka je $X = A \sqcup B$ separacija.

Onda je funkcija $f\colon X \to \{0,1\}$ definirana s $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in A \\ 1, & x \in B \end{cases}$

neprekidna surjekcija. $\square$

Još jedna karakterizacija povezanosti

Teorem 21.7

Topološki prostor X je povezan ako i samo ako ne postoji neprekidna surjekcija $f\colon X \to \{0,1\}$, gdje je $\{0,1\}$ dvočlan skup s diskretnom topologijom.

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka je X povezan i pretpostavimo da postoji neprekidna surjekcija $f\colon X \to \{0,1\}$. Jednočlan skup $\{0\} \subseteq \{0,1\}$ je otvoren u diskretnoj topologiji, pa je $U := f^{-1}\big(\{0\}\big)$ otvoren podskup od X. Analogno, $V := f^{-1}\big(\{1\}\big)$ je otvoren. Kako je f surjekcija, U i V su neprazni, a očito je $U \cap V = \emptyset$, pa je $X = U \sqcup V$.

$\Leftarrow$ Neka X nije povezan i neka je $X = A \sqcup B$ separacija.

Onda je funkcija $f\colon X \to \{0,1\}$ definirana s $f(x) = \begin{cases} 0\,, & x \in A \\ 1\,, & x \in B \end{cases}$

neprekidna surjekcija. $\square$

Intervali

Najčešće je lakše dokazati da neki topološki prostor *nije* povezan (naravno, ako zaista nije povezan), nego da *je* povezan.
Naime, za dokazati da je prostor povezan, treba pokazati da ga *nije moguće* rastaviti na uniju dvaju disjunktnih nepraznih zatvorenih podskupova (ili neku ekvivalentnu tvrdnju).

Pozabavit ćemo se najprije intervalima realnih brojeva, s tim da ćemo *intervalom* zvati svaki od sljedećih podskupova od $\mathbb{R}$:

$[a, b]$, $\langle a, b\rangle$, $\langle a, b]$, $[a, b\rangle$, („konačni" intervali)

$\langle -\infty, b]$, $\langle -\infty, b\rangle$, $[a, +\infty\rangle$, $\langle a, +\infty\rangle$, („beskonačni" intervali) i

$\langle -\infty, +\infty\rangle = \mathbb{R}$.

Jednočlan skup je specijalan slučaj $\{a\} = [a, a]$.

Intervali

Najčešće je lakše dokazati da neki topološki prostor *nije* povezan (naravno, ako zaista nije povezan), nego da *je* povezan. Naime, za dokazati da je prostor povezan, treba pokazati da ga *nije moguće* rastaviti na uniju dvaju disjunktnih nepraznih zatvorenih podskupova (ili neku ekvivalentnu tvrdnju).

Pozabavit ćemo se najprije intervalima realnih brojeva, s tim da ćemo *intervalom* zvati svaki od sljedećih podskupova od $\mathbb{R}$:

$[a, b]$, $\langle a, b\rangle$, $\langle a, b]$, $[a, b\rangle$, („konačni” intervali)

$\langle -\infty, b]$, $\langle -\infty, b\rangle$, $[a, +\infty\rangle$, $\langle a, +\infty\rangle$, („beskonačni” intervali) i

$\langle -\infty, +\infty\rangle = \mathbb{R}$.

Jednočlan skup je specijalan slučaj $\{a\} = [a, a]$.

Intervali

Najčešće je lakše dokazati da neki topološki prostor *nije* povezan (naravno, ako zaista nije povezan), nego da *je* povezan.
Naime, za dokazati da je prostor povezan, treba pokazati da ga *nije moguće* rastaviti na uniju dvaju disjunktnih nepraznih zatvorenih podskupova (ili neku ekvivalentnu tvrdnju).

Pozabavit ćemo se najprije intervalima realnih brojeva, s tim da ćemo *intervalom* zvati svaki od sljedećih podskupova od $\mathbb{R}$:
$[a, b]$, $\langle a, b\rangle$, $\langle a, b]$, $[a, b\rangle$, („konačni" intervali)
$\langle -\infty, b]$, $\langle -\infty, b\rangle$, $[a, +\infty\rangle$, $\langle a, +\infty\rangle$, („beskonačni" intervali) i
$\langle -\infty, +\infty\rangle = \mathbb{R}$.

Jednočlan skup je specijalan slučaj $\{a\} = [a, a]$.

Karakterizacija intervala

Lema 21.8

Neprazan podskup $S \subseteq \mathbb{R}$ je interval akko ima sljedeće svojstvo: ako su $x, y \in S$ i $z \in \mathbb{R}$ je takav da je $x < z < y$, onda je i $z \in S$.

Dokaz: $\Rightarrow$ Ova implikacija je očita jer svaki od intervala ima to svojstvo.

$\Leftarrow$ Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ skup s navedenim svojstvom. Označimo $a = \inf S$, ili $a = -\infty$ ako S nije omeđen odozdo, i slično $b = \sup S$ ili $b = +\infty$ ako S nije omeđen odozgo.

Dokazat ćemo da je $\langle a, b\rangle \subseteq S \subseteq [a, b]$, s tim da $[-\infty$ znači $\langle -\infty$, i $+\infty]$ znači $+\infty\rangle$, i $\langle a, b\rangle = \emptyset$ ako je $a = b$.

Za svaki $z \in \langle a, b\rangle$ je $z > a$, pa postoji $x \in S$ t.d. je $x < z$ jer je $a = \inf S$ ili $-\infty$. Slično, postoji $y \in S$ t.d. je $y > z$, pa je $z \in S$.

Dakle, $\langle a, b\rangle \subseteq S$. Da je $S \subseteq [a, b]$ slijedi iz definicija od a i b.

Ali ako je $\langle a, b\rangle \subseteq S \subseteq [a, b]$ onda S može biti samo jedan od nabrojanih intervala. $\square$

Karakterizacija intervala

Lema 21.8

Neprazan podskup $S \subseteq \mathbb{R}$ je interval akko ima sljedeće svojstvo: ako su $x, y \in S$ i $z \in \mathbb{R}$ je takav da je $x < z < y$, onda je i $z \in S$.

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Ova implikacija je očita jer svaki od intervala ima to svojstvo.

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ skup s navedenim svojstvom. Označimo $a = \inf S$, ili $a = -\infty$ ako S nije omeđen odozdo, i slično $b = \sup S$ ili $b = +\infty$ ako S nije omeđen odozgo.

Dokazat ćemo da je $\langle a, b\rangle \subseteq S \subseteq [a, b]$, s tim da $[-\infty$ znači $\langle -\infty$, i $+\infty]$ znači $+\infty\rangle$, i $\langle a, b\rangle = \emptyset$ ako je $a = b$.

Za svaki $z \in \langle a, b\rangle$ je $z > a$, pa postoji $x \in S$ t.d. je $x < z$ jer je $a = \inf S$ ili $-\infty$. Slično, postoji $y \in S$ t.d. je $y > z$ pa je $z \in S$.

Dakle, $\langle a, b\rangle \subseteq S$. Da je $S \subseteq [a, b]$ slijedi iz definicija od a i b.

Ali ako je $\langle a, b\rangle \subseteq S \subseteq [a, b]$ onda S može biti samo jedan od nabrojanih intervala. $\square$

Karakterizacija intervala

Lema 21.8

Neprazan podskup $S \subseteq \mathbb{R}$ je interval akko ima sljedeće svojstvo: ako su $x, y \in S$ i $z \in \mathbb{R}$ je takav da je $x < z < y$, onda je i $z \in S$.

Dokaz: $\Rightarrow$ Ova implikacija je očita jer svaki od intervala ima to svojstvo.

$\Leftarrow$ Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ skup s navedenim svojstvom. Označimo $a = \inf S$, ili $a = -\infty$ ako S nije omeđen odozdo, i slično $b = \sup S$ ili $b = +\infty$ ako S nije omeđen odozgo.

Dokazat ćemo da je $\langle a, b\rangle \subseteq S \subseteq [a, b]$, s tim da $[-\infty$ znači $\langle -\infty$, i $+\infty]$ znači $+\infty\rangle$, i $\langle a, b\rangle = \emptyset$ ako je $a = b$.

Za svaki $z \in \langle a, b\rangle$ je $z > a$, pa postoji $x \in S$ t.d. je $x < z$ jer je $a = \inf S$ ili $-\infty$. Slično, postoji $y \in S$ t.d. je $y > z$ pa je $z \in S$.

Dakle, $\langle a, b\rangle \subseteq S$. Da je $S \subseteq [a, b]$ slijedi iz definicija od a i b.

Ali ako je $\langle a, b\rangle \subseteq S \subseteq [a, b]$ onda S može biti samo jedan od nabrojanih intervala.

Karakterizacija intervala

Lema 21.8

Neprazan podskup $S \subseteq \mathbb{R}$ je interval akko ima sljedeće svojstvo: ako su $x, y \in S$ i $z \in \mathbb{R}$ je takav da je $x < z < y$, onda je i $z \in S$.

Dokaz: $\Rightarrow$ Ova implikacija je očita jer svaki od intervala ima to svojstvo.

$\Leftarrow$ Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ skup s navedenim svojstvom. Označimo $a = \inf S$, ili $a = -\infty$ ako S nije omeđen odozdo, i slično $b = \sup S$ ili $b = +\infty$ ako S nije omeđen odozgo.

Dokazat ćemo da je $\langle a, b\rangle \subseteq S \subseteq [a, b]$, s tim da $[-\infty$ znači $\langle -\infty$, i $+\infty]$ znači $+\infty\rangle$, i $\langle a, b\rangle = \emptyset$ ako je $a = b$.

Za svaki $z \in \langle a, b\rangle$ je $z > a$, pa postoji $x \in S$ t.d. je $x < z$ jer je $a = \inf S$ ili $-\infty$. Slično, postoji $y \in S$ t.d. je $y > z$, pa je $z \in S$.
Dakle, $\langle a, b\rangle \subseteq S$. Da je $S \subseteq [a, b]$ slijedi iz definicija od a i b.

Ali ako je $\langle a, b\rangle \subseteq S \subseteq [a, b]$ onda S može biti samo jedan od nabrojanih intervala. $\square$

Karakterizacija intervala

Lema 21.8

Neprazan podskup $S \subseteq \mathbb{R}$ je interval akko ima sljedeće svojstvo: ako su $x, y \in S$ i $z \in \mathbb{R}$ je takav da je $x < z < y$, onda je i $z \in S$.

Dokaz: $\Rightarrow$ Ova implikacija je očita jer svaki od intervala ima to svojstvo.

$\Leftarrow$ Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ skup s navedenim svojstvom. Označimo $a = \inf S$, ili $a = -\infty$ ako S nije omeđen odozdo, i slično $b = \sup S$ ili $b = +\infty$ ako S nije omeđen odozgo.

Dokazat ćemo da je $\langle a, b\rangle \subseteq S \subseteq [a, b]$, s tim da $[-\infty$ znači $\langle -\infty$, i $+\infty]$ znači $+\infty\rangle$, i $\langle a, b\rangle = \emptyset$ ako je $a = b$.

Za svaki $z \in \langle a, b\rangle$ je $z > a$, pa postoji $x \in S$ t.d. je $x < z$ jer je $a = \inf S$ ili $-\infty$. Slično, postoji $y \in S$ t.d. je $y > z$, pa je $z \in S$. Dakle, $\langle a, b\rangle \subseteq S$. Da je $S \subseteq [a, b]$ slijedi iz definicija od a i b.

Ali ako je $\langle a, b\rangle \subseteq S \subseteq [a, b]$ onda S može biti samo jedan od nabrojanih intervala. $\square$

Karakterizacija intervala

Lema 21.8

Neprazan podskup $S \subseteq \mathbb{R}$ je interval akko ima sljedeće svojstvo: ako su $x, y \in S$ i $z \in \mathbb{R}$ je takav da je $x < z < y$, onda je i $z \in S$.

Dokaz: $\Rightarrow$ Ova implikacija je očita jer svaki od intervala ima to svojstvo.

$\Leftarrow$ Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ skup s navedenim svojstvom. Označimo $a = \inf S$, ili $a = -\infty$ ako S nije omeđen odozdo, i slično $b = \sup S$ ili $b = +\infty$ ako S nije omeđen odozgo.

Dokazat ćemo da je $\langle a, b\rangle \subseteq S \subseteq [a, b]$, s tim da $[-\infty$ znači $\langle -\infty$, i $+\infty]$ znači $+\infty\rangle$, i $\langle a, b\rangle = \emptyset$ ako je $a = b$.

Za svaki $z \in \langle a, b\rangle$ je $z > a$, pa postoji $x \in S$ t.d. je $x < z$ jer je $a = \inf S$ ili $-\infty$. Slično, postoji $y \in S$ t.d. je $y > z$, pa je $z \in S$.

Dakle, $\langle a, b\rangle \subseteq S$. Da je $S \subseteq [a, b]$ slijedi iz definicija od a i b.

Ali ako je $\langle a, b\rangle \subseteq S \subseteq [a, b]$ onda S može biti samo jedan od nabrojanih intervala. $\square$

Karakterizacija intervala

Lema 21.8

Neprazan podskup $S \subseteq \mathbb{R}$ je interval akko ima sljedeće svojstvo: ako su $x, y \in S$ i $z \in \mathbb{R}$ je takav da je $x < z < y$, onda je i $z \in S$.

Dokaz: $\Rightarrow$ Ova implikacija je očita jer svaki od intervala ima to svojstvo.

$\Leftarrow$ Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ skup s navedenim svojstvom. Označimo $a = \inf S$, ili $a = -\infty$ ako S nije omeđen odozdo, i slično $b = \sup S$ ili $b = +\infty$ ako S nije omeđen odozgo.

Dokazat ćemo da je $\langle a, b\rangle \subseteq S \subseteq [a, b]$, s tim da $[-\infty$ znači $\langle -\infty$, i $+\infty]$ znači $+\infty\rangle$, i $\langle a, b\rangle = \emptyset$ ako je $a = b$.

Za svaki $z \in \langle a, b\rangle$ je $z > a$, pa postoji $x \in S$ t.d. je $x < z$ jer je $a = \inf S$ ili $-\infty$. Slično, postoji $y \in S$ t.d. je $y > z$, pa je $z \in S$.

Dakle, $\langle a, b\rangle \subseteq S$. Da je $S \subseteq [a, b]$ slijedi iz definicija od a i b.

Ali ako je $\langle a, b\rangle \subseteq S \subseteq [a, b]$ onda S može biti samo jedan od nabrojanih intervala.

Karakterizacija intervala

Lema 21.8

Neprazan podskup $S \subseteq \mathbb{R}$ je interval akko ima sljedeće svojstvo: ako su $x, y \in S$ i $z \in \mathbb{R}$ je takav da je $x < z < y$, onda je i $z \in S$.

Dokaz: $\Rightarrow$ Ova implikacija je očita jer svaki od intervala ima to svojstvo.

$\Leftarrow$ Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ skup s navedenim svojstvom. Označimo $a = \inf S$, ili $a = -\infty$ ako S nije omeđen odozdo, i slično $b = \sup S$ ili $b = +\infty$ ako S nije omeđen odozgo.
Dokazat ćemo da je $\langle a, b\rangle \subseteq S \subseteq [a, b]$, s tim da $[-\infty$ znači $\langle -\infty$, i $+\infty]$ znači $+\infty\rangle$, i $\langle a, b\rangle = \emptyset$ ako je $a = b$.
Za svaki $z \in \langle a, b\rangle$ je $z > a$, pa postoji $x \in S$ t.d. je $x < z$ jer je $a = \inf S$ ili $-\infty$. Slično, postoji $y \in S$ t.d. je $y > z$, pa je $z \in S$.
Dakle, $\langle a, b\rangle \subseteq S$. Da je $S \subseteq [a, b]$ slijedi iz definicija od a i b.

Ali ako je $\langle a, b\rangle \subseteq S \subseteq [a, b]$ onda S može biti samo jedan od nabrojanih intervala. $\square$

Povezani podskupovi od $\mathbb{R}$

Još ne znamo jesu li intervali povezani, ali drugih povezanih u $\mathbb{R}$ nema:

Teorem 21.9

Ako je podskup $S \subseteq \mathbb{R}$ povezan onda je S jedan od intervala.

Dokaz: Neka $S \subseteq \mathbb{R}$ nije jedan od intervala. Prema prethodnoj lemi, postoje $x, y \in S$ i postoji $z \in \mathbb{R} \setminus S$ t.d. je $x < z < y$. Tada je $S = (\langle -\infty, z\rangle \cap S) \sqcup (\langle z, +\infty\rangle \cap S)$ separacija potprostora S, jer su oba neprazna (lijevi sadrži x a desni y) i oba su otvoreni u potprostoru S. Dakle, ako S nije interval onda nije povezan. $\square$

Napomena 21.10

Prethodni teorem ne pokazuje da su intervali povezani — jedino pokazuje da osim intervala drugih kandidata za povezane podskupove od $\mathbb{R}$ nema.

Povezani podskupovi od $\mathbb{R}$

Još ne znamo jesu li intervali povezani, ali drugih povezanih u $\mathbb{R}$ nema:

Teorem 21.9

Ako je podskup $S \subseteq \mathbb{R}$ povezan onda je S jedan od intervala.

Dokaz: Neka $S \subseteq \mathbb{R}$ nije jedan od intervala. Prema prethodnoj lemi, postoje $x, y \in S$ i postoji $z \in \mathbb{R} \setminus S$ t.d. je $x < z < y$. Tada je $S = (\langle -\infty, z\rangle \cap S) \sqcup (\langle z, +\infty\rangle \cap S)$ separacija potprostora S, jer su oba neprazna (lijevi sadrži x a desni y) i oba su otvoreni u potprostoru S. Dakle, ako S nije interval onda nije povezan. $\square$

Napomena 21.10

Prethodni teorem ne pokazuje da su intervali povezani — jedino pokazuje da osim intervala drugih kandidata za povezane podskupove od $\mathbb{R}$ nema.

Povezani podskupovi od $\mathbb{R}$

Još ne znamo jesu li intervali povezani, ali drugih povezanih u $\mathbb{R}$ nema:

Teorem 21.9

Ako je podskup $S \subseteq \mathbb{R}$ povezan onda je S jedan od intervala.

Dokaz: Neka $S \subseteq \mathbb{R}$ nije jedan od intervala. Prema prethodnoj lemi, postoje $x, y \in S$ i postoji $z \in \mathbb{R} \setminus S$ t.d. je $x < z < y$. Tada je $S = \big(\langle -\infty, z\rangle \cap S\big) \sqcup \big(\langle z, +\infty\rangle \cap S\big)$ separacija potprostora S, jer su oba neprazna (lijevi sadrži x a desni y) i oba su otvoreni u potprostoru S. Dakle, ako S nije interval onda nije povezan. $\square$

Napomena 21.10

Prethodni teorem ne pokazuje da su intervali povezani — jedino pokazuje da osim intervala drugih kandidata za povezane podskupove od $\mathbb{R}$ nema.

Povezani podskupovi od $\mathbb{R}$

Još ne znamo jesu li intervali povezani, ali drugih povezanih u $\mathbb{R}$ nema:

Teorem 21.9

Ako je podskup $S \subseteq \mathbb{R}$ povezan onda je S jedan od intervala.

Dokaz: Neka $S \subseteq \mathbb{R}$ nije jedan od intervala. Prema prethodnoj lemi, postoje $x, y \in S$ i postoji $z \in \mathbb{R} \setminus S$ t.d. je $x < z < y$. Tada je $S = \big(\langle -\infty, z\rangle \cap S\big) \sqcup \big(\langle z, +\infty\rangle \cap S\big)$ separacija potprostora S, jer su oba neprazna (lijevi sadrži x a desni y) i oba su otvoreni u potprostoru S. Dakle, ako S nije interval onda nije povezan. $\square$

Napomena 21.10

Prethodni teorem ne pokazuje da su intervali povezani — jedino pokazuje da osim intervala drugih kandidata za povezane podskupove od $\mathbb{R}$ nema.

Povezanost intervala

Teorem 21.11

Svaki interval realnih brojeva je povezan.

Dokaz: Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ neki interval i pretpostavimo da postoji separacija $I = A \sqcup B$. Odaberimo točke $a \in A$ i $b \in B$ i neka je $a < b$ (u protivnom preimenujemo A i B).

Kako su $a, b \in I$ a I je interval, to je $[a, b] \subseteq I$.
Neka je $A' = A \cap [a, b]$ i $B' = B \cap [a, b]$.
Kako je A zatvoren u I to je A' zatvoren u $[a, b]$ (propozicija 14.6 (i)), a jer je $[a, b]$ zatvoren u $\mathbb{R}$ to je A' zatvoren u $\mathbb{R}$ (propozicija 14.6 (ii)).
Analogno zaključujemo da je i B' zatvoren u $\mathbb{R}$.

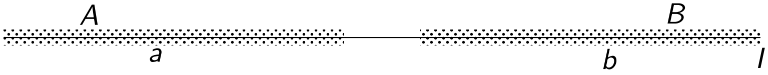
Prikazat ćemo dva načina dobivanja kontradikcije s pretpostavkom da postoji separacija $I = A \sqcup B$.

Povezanost intervala

Teorem 21.11

Svaki interval realnih brojeva je povezan.

Dokaz: Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ neki interval i pretpostavimo da postoji separacija $I = A \sqcup B$. Odaberimo točke $a \in A$ i $b \in B$ i neka je $a < b$ (u protivnom preimenujemo A i B).



Kako su $a, b \in I$ a I je interval, to je $[a, b] \subseteq I$.
Neka je $A' = A \cap [a, b]$ i $B' = B \cap [a, b]$.
Kako je A zatvoren u I to je A' zatvoren u $[a, b]$ (propozicija 14.6 (i)), a jer je $[a, b]$ zatvoren u $\mathbb{R}$ to je A' zatvoren u $\mathbb{R}$ (propozicija 14.6 (ii)).
Analogno zaključujemo da je i B' zatvoren u $\mathbb{R}$.

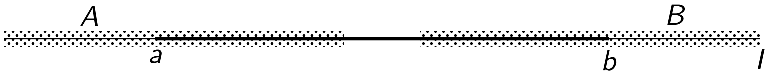
Prikazat ćemo dva načina dobivanja kontradikcije s pretpostavkom da postoji separacija $I = A \sqcup B$.

Povezanost intervala

Teorem 21.11

Svaki interval realnih brojeva je povezan.

Dokaz: Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ neki interval i pretpostavimo da postoji separacija $I = A \sqcup B$. Odaberimo točke $a \in A$ i $b \in B$ i neka je $a < b$ (u protivnom preimenujemo A i B).



Kako su $a, b \in I$ a I je interval, to je $[a, b] \subseteq I$.

Neka je $A' = A \cap [a, b]$ i $B' = B \cap [a, b]$.

Kako je A zatvoren u I to je A' zatvoren u $[a, b]$ (propozicija 14.6 (i)), a jer je $[a, b]$ zatvoren u $\mathbb{R}$ to je A' zatvoren u $\mathbb{R}$ (propozicija 14.6 (ii)). Analogno zaključujemo da je i B' zatvoren u $\mathbb{R}$.

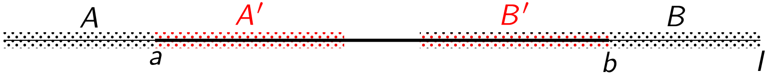
Prikazat ćemo dva načina dobivanja kontradikcije s pretpostavkom da postoji separacija $I = A \sqcup B$.

Povezanost intervala

Teorem 21.11

Svaki interval realnih brojeva je povezan.

Dokaz: Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ neki interval i pretpostavimo da postoji separacija $I = A \sqcup B$. Odaberimo točke $a \in A$ i $b \in B$ i neka je $a < b$ (u protivnom preimenujemo A i B).



Kako su $a, b \in I$ a I je interval, to je $[a, b] \subseteq I$.
Neka je $A' = A \cap [a, b]$ i $B' = B \cap [a, b]$.
Kako je A zatvoren u I to je A' zatvoren u $[a, b]$ (propozicija 14.6 (i)), a jer je $[a, b]$ zatvoren u $\mathbb{R}$ to je A' zatvoren u $\mathbb{R}$ (propozicija 14.6 (ii)).
Analogno zaključujemo da je i B' zatvoren u $\mathbb{R}$.

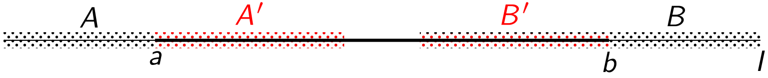
Prikazat ćemo dva načina dobivanja kontradikcije s pretpostavkom da postoji separacija $I = A \sqcup B$.

Povezanost intervala

Teorem 21.11

Svaki interval realnih brojeva je povezan.

Dokaz: Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ neki interval i pretpostavimo da postoji separacija $I = A \sqcup B$. Odaberimo točke $a \in A$ i $b \in B$ i neka je $a < b$ (u protivnom preimenujemo A i B).



Kako su $a, b \in I$ a I je interval, to je $[a, b] \subseteq I$.
Neka je $A' = A \cap [a, b]$ i $B' = B \cap [a, b]$.
Kako je A zatvoren u I to je A' zatvoren u $[a, b]$ (propozicija 14.6 (i)),
a jer je $[a, b]$ zatvoren u $\mathbb{R}$ to je A' zatvoren u $\mathbb{R}$ (propozicija 14.6 (ii)).
Analogno zaključujemo da je i B' zatvoren u $\mathbb{R}$.

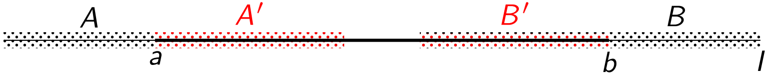
Prikazat ćemo dva načina dobivanja kontradikcije s pretpostavkom da postoji separacija $I = A \sqcup B$.

Povezanost intervala

Teorem 21.11

Svaki interval realnih brojeva je povezan.

Dokaz: Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ neki interval i pretpostavimo da postoji separacija $I = A \sqcup B$. Odaberimo točke $a \in A$ i $b \in B$ i neka je $a < b$ (u protivnom preimenujemo A i B).



Kako su $a, b \in I$ a I je interval, to je $[a, b] \subseteq I$.
Neka je $A' = A \cap [a, b]$ i $B' = B \cap [a, b]$.
Kako je A zatvoren u I to je A' zatvoren u $[a, b]$ (propozicija 14.6 (i)), a jer je $[a, b]$ zatvoren u $\mathbb{R}$ to je A' zatvoren u $\mathbb{R}$ (propozicija 14.6 (ii)). Analogno zaključujemo da je i B' zatvoren u $\mathbb{R}$.

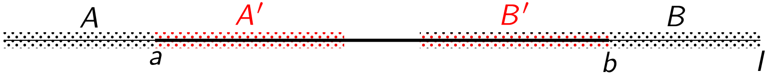
Prikazat ćemo dva načina dobivanja kontradikcije s pretpostavkom da postoji separacija $I = A \sqcup B$.

Povezanost intervala

Teorem 21.11

Svaki interval realnih brojeva je povezan.

Dokaz: Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ neki interval i pretpostavimo da postoji separacija $I = A \sqcup B$. Odaberimo točke $a \in A$ i $b \in B$ i neka je $a < b$ (u protivnom preimenujemo A i B).



Kako su $a, b \in I$ a I je interval, to je $[a, b] \subseteq I$.
Neka je $A' = A \cap [a, b]$ i $B' = B \cap [a, b]$.
Kako je A zatvoren u I to je A' zatvoren u $[a, b]$ (propozicija 14.6 (i)), a jer je $[a, b]$ zatvoren u $\mathbb{R}$ to je A' zatvoren u $\mathbb{R}$ (propozicija 14.6 (ii)).
Analogno zaključujemo da je i B' zatvoren u $\mathbb{R}$.

Prikazat ćemo dva načina dobivanja kontradikcije s pretpostavkom da postoji separacija $I = A \sqcup B$.

Prvi dokaz

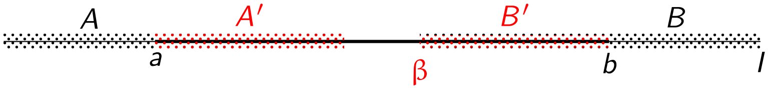
1. dokaz: Skup B' je neprazan ($b \in B'$) i omeđen je odozdo (npr. s a), pa ima infimum $\beta := \inf B'$, i $\beta \geqslant a$. Kako je B' zatvoren podskup od $\mathbb{R}$, to je $\beta \in B'$ (verzija korolara 14.18 za infimum), a jer je $A' \cap B' = \emptyset$, mora biti $\beta > a$.

Slično, skup $A'' := A' \cap [a, \beta]$ je neprazan ($a \in A''$) i omeđen je odozgo (npr. s b), pa ima supremum $\alpha := \sup A''$, a jer je A'' zatvoren i disjunktan s B', to je $\alpha \in A''$ i $\alpha < \beta$.

Uočimo da je $\langle \alpha, \beta \rangle \cap A' = \emptyset$ jer inače ne bi α mogao biti $\sup A''$.
Isto tako je $\langle \alpha, \beta \rangle \cap B' = \emptyset$ jer inače β ne bi bio infimum od B'.
Dakle, $\langle \alpha, \beta \rangle \cap (A' \cup B') = \emptyset$, a jer je $\langle \alpha, \beta \rangle \subseteq [a, b]$ to se protivi činjenici da je $A' \cup B' = [a, b]$. $\square$

Prvi dokaz

1. dokaz: Skup B' je neprazan ($b \in B'$) i omeđen je odozdo (npr. s a), pa ima infimum $\beta := \inf B'$, i $\beta \geqslant a$. Kako je B' zatvoren podskup od $\mathbb{R}$, to je $\beta \in B'$ (verzija korolara 14.18 za infimum), a jer je $A' \cap B' = \emptyset$, mora biti $\beta > a$.



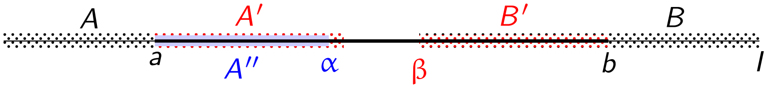
Slično, skup $A'' := A' \cap [a, \beta]$ je neprazan ($a \in A''$) i omeđen je odozgo (npr. s b), pa ima supremum $\alpha := \sup A''$, a jer je A'' zatvoren i disjunktan s B', to je $\alpha \in A''$ i $\alpha < \beta$.

Uočimo da je $\langle \alpha, \beta \rangle \cap A' = \emptyset$ jer inače ne bi α mogao biti $\sup A''$. Isto tako je $\langle \alpha, \beta \rangle \cap B' = \emptyset$ jer inače β ne bi bio infimum od B'.

Dakle, $\langle \alpha, \beta \rangle \cap (A' \cup B') = \emptyset$, a jer je $\langle \alpha, \beta \rangle \subseteq [a, b]$ to se protivi činjenici da je $A' \cup B' = [a, b]$. $\square$

Prvi dokaz

1. dokaz: Skup B' je neprazan ($b \in B'$) i omeđen je odozdo (npr. s a), pa ima infimum $\beta := \inf B'$, i $\beta \geqslant a$. Kako je B' zatvoren podskup od $\mathbb{R}$, to je $\beta \in B'$ (verzija korolara 14.18 za infimum), a jer je $A' \cap B' = \emptyset$, mora biti $\beta > a$.



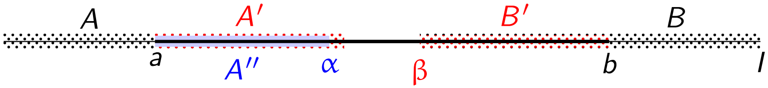
Slično, skup $A'' := A' \cap [a, \beta]$ je neprazan ($a \in A''$) i omeđen je odozgo (npr. s b), pa ima supremum $\alpha := \sup A''$, a jer je A'' zatvoren i disjunktan s B', to je $\alpha \in A''$ i $\alpha < \beta$.

Uočimo da je $\langle \alpha, \beta \rangle \cap A' = \emptyset$ jer inače ne bi α mogao biti $\sup A''$. Isto tako je $\langle \alpha, \beta \rangle \cap B' = \emptyset$ jer inače β ne bi bio infimum od B'.

Dakle, $\langle \alpha, \beta \rangle \cap (A' \cup B') = \emptyset$, a jer je $\langle \alpha, \beta \rangle \subseteq [a, b]$ to se protivi činjenici da je $A' \cup B' = [a, b]$. $\square$

Prvi dokaz

1. dokaz: Skup B' je neprazan ($b \in B'$) i omeđen je odozdo (npr. s a), pa ima infimum $\beta := \inf B'$, i $\beta \geqslant a$. Kako je B' zatvoren podskup od $\mathbb{R}$, to je $\beta \in B'$ (verzija korolara 14.18 za infimum), a jer je $A' \cap B' = \emptyset$, mora biti $\beta > a$.



Slično, skup $A'' := A' \cap [a, \beta]$ je neprazan ($a \in A''$) i omeđen je odozgo (npr. s b), pa ima supremum $\alpha := \sup A''$, a jer je A'' zatvoren i disjunktan s B', to je $\alpha \in A''$ i $\alpha < \beta$.

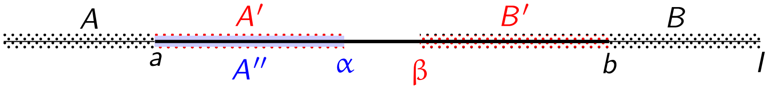
Uočimo da je $\langle \alpha, \beta \rangle \cap A' = \emptyset$ jer inače ne bi α mogao biti $\sup A''$.

Isto tako je $\langle \alpha, \beta \rangle \cap B' = \emptyset$ jer inače β ne bi bio infimum od B'.

Dakle, $\langle \alpha, \beta \rangle \cap (A' \cup B') = \emptyset$, a jer je $\langle \alpha, \beta \rangle \subseteq [a, b]$ to se protivi činjenici da je $A' \cup B' = [a, b]$. $\square$

Prvi dokaz

1. dokaz: Skup B' je neprazan ($b \in B'$) i omeđen je odozdo (npr. s a), pa ima infimum $\beta := \inf B'$, i $\beta \geqslant a$. Kako je B' zatvoren podskup od $\mathbb{R}$, to je $\beta \in B'$ (verzija korolara 14.18 za infimum), a jer je $A' \cap B' = \emptyset$, mora biti $\beta > a$.



Slično, skup $A'' := A' \cap [a, \beta]$ je neprazan ($a \in A''$) i omeđen je odozgo (npr. s b), pa ima supremum $\alpha := \sup A''$, a jer je A'' zatvoren i disjunktan s B', to je $\alpha \in A''$ i $\alpha < \beta$.

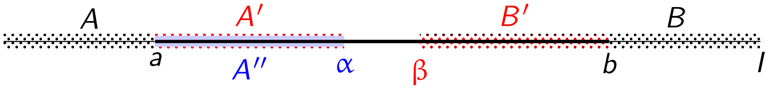
Uočimo da je $\langle \alpha, \beta \rangle \cap A' = \emptyset$ jer inače ne bi α mogao biti $\sup A''$.

Isto tako je $\langle \alpha, \beta \rangle \cap B' = \emptyset$ jer inače β ne bi bio infimum od B'.

Dakle, $\langle \alpha, \beta \rangle \cap (A' \cup B') = \emptyset$, a jer je $\langle \alpha, \beta \rangle \subseteq [a, b]$ to se protivi činjenici da je $A' \cup B' = [a, b]$. $\square$

Prvi dokaz

1. dokaz: Skup B' je neprazan ($b \in B'$) i omeđen je odozdo (npr. s a), pa ima infimum $\beta := \inf B'$, i $\beta \geqslant a$. Kako je B' zatvoren podskup od $\mathbb{R}$, to je $\beta \in B'$ (verzija korolara 14.18 za infimum), a jer je $A' \cap B' = \emptyset$, mora biti $\beta > a$.



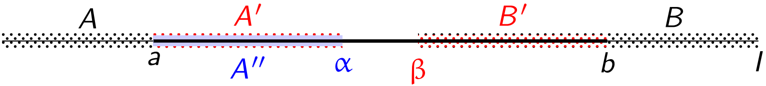
Slično, skup $A'' := A' \cap [a, \beta]$ je neprazan ($a \in A''$) i omeđen je odozgo (npr. s b), pa ima supremum $\alpha := \sup A''$, a jer je A'' zatvoren i disjunktan s B', to je $\alpha \in A''$ i $\alpha < \beta$.

Uočimo da je $\langle \alpha, \beta \rangle \cap A' = \emptyset$ jer inače ne bi α mogao biti $\sup A''$. Isto tako je $\langle \alpha, \beta \rangle \cap B' = \emptyset$ jer inače β ne bi bio infimum od B'.

Dakle, $\langle \alpha, \beta \rangle \cap (A' \cup B') = \emptyset$, a jer je $\langle \alpha, \beta \rangle \subseteq [a, b]$ to se protivi činjenici da je $A' \cup B' = [a, b]$. $\square$

Prvi dokaz

1. dokaz: Skup B' je neprazan ($b \in B'$) i omeđen je odozdo (npr. s a), pa ima infimum $\beta := \inf B'$, i $\beta \geqslant a$. Kako je B' zatvoren podskup od $\mathbb{R}$, to je $\beta \in B'$ (verzija korolara 14.18 za infimum), a jer je $A' \cap B' = \emptyset$, mora biti $\beta > a$.



Slično, skup $A'' := A' \cap [a, \beta]$ je neprazan ($a \in A''$) i omeđen je odozgo (npr. s b), pa ima supremum $\alpha := \sup A''$, a jer je A'' zatvoren i disjunktan s B', to je $\alpha \in A''$ i $\alpha < \beta$.

Uočimo da je $\langle \alpha, \beta \rangle \cap A' = \emptyset$ jer inače ne bi α mogao biti $\sup A''$. Isto tako je $\langle \alpha, \beta \rangle \cap B' = \emptyset$ jer inače β ne bi bio infimum od B'.

Dakle, $\langle \alpha, \beta \rangle \cap (A' \cup B') = \emptyset$, a jer je $\langle \alpha, \beta \rangle \subseteq [a, b]$ to se protivi činjenici da je $A' \cup B' = [a, b]$. $\square$

Drugi dokaz

2. dokaz: Kako su A' i B' zatvoreni i omeđeni podskupovi od $\mathbb{R}$, oni su kompaktni, pa je i produkt $A' \times B'$ kompaktan. Funkcija $d\colon A' \times B' \to \mathbb{R}$ definirana s $d(x, y) = |x - y|$ je restrikcija metrike u $\mathbb{R}$, pa je neprekidna (vidi zadatak 14 u vježbama uz drugo poglavlje). Zbog kompaktnosti ona ima minimum u nekoj točki $(a', b') \in A' \times B'$ (Weierstrassov teorem, korolar 18.9).

Kako su skupovi A' i B' kompaktni i disjunktni, to je $|a' - b'| > 0$, pa za sve $x \in A'$ i $y \in B'$ vrijedi $|x - y| \geqslant |a' - b'| > 0$. $(*)$

Neka je $c = \frac{1}{2}(a' + b')$. Kako su $a', b' \in [a, b]$ mora biti i $c \in [a, b]$.

Ali $|c - b'| = \frac{1}{2}|a' - b'| < |a' - b'|$ pa zbog $(*)$ $c \notin A'$.

Isto tako, $c \notin B'$,

a kako je $[a, b] = A' \cup B'$, dobili smo kontradikciju s $c \in [a, b]$. $\square$

Drugi dokaz

2. dokaz: Kako su A' i B' zatvoreni i omeđeni podskupovi od $\mathbb{R}$, oni su kompaktni, pa je i produkt $A' \times B'$ kompaktan. Funkcija $d\colon A' \times B' \to \mathbb{R}$ definirana s $d(x, y) = |x - y|$ je restrikcija metrike u $\mathbb{R}$, pa je neprekidna (vidi zadatak 14 u vježbama uz drugo poglavlje).

Zbog kompaktnosti ona ima minimum u nekoj točki $(a', b') \in A' \times B'$ (Weierstrassov teorem, korolar 18.9).

Kako su skupovi A' i B' kompaktni i disjunktni, to je $|a' - b'| > 0$, pa za sve $x \in A'$ i $y \in B'$ vrijedi $|x - y| \geqslant |a' - b'| > 0$. $\quad (*)$

Neka je $c = \frac{1}{2}(a' + b')$. Kako su $a', b' \in [a, b]$ mora biti i $c \in [a, b]$.

Ali $|c - b'| = \frac{1}{2}|a' - b'| < |a' - b'|$ pa zbog $(*)$ $c \notin A'$.
Isto tako, $c \notin B'$,
a kako je $[a, b] = A' \cup B'$, dobili smo kontradikciju s $c \in [a, b]$. $\square$

Drugi dokaz

2. dokaz: Kako su A' i B' zatvoreni i omeđeni podskupovi od $\mathbb{R}$, oni su kompaktni, pa je i produkt $A' \times B'$ kompaktan. Funkcija $d \colon A' \times B' \to \mathbb{R}$ definirana s $d(x, y) = |x - y|$ je restrikcija metrike u $\mathbb{R}$, pa je neprekidna (vidi zadatak 14 u vježbama uz drugo poglavlje). Zbog kompaktnosti ona ima minimum u nekoj točki $(a', b') \in A' \times B'$ (Weierstrassov teorem, korolar 18.9).

Kako su skupovi A' i B' kompaktni i disjunktni, to je $|a' - b'| > 0$, pa za sve $x \in A'$ i $y \in B'$ vrijedi $|x - y| \geqslant |a' - b'| > 0$. $\quad (*)$

Neka je $c = \frac{1}{2}(a' + b')$. Kako su $a', b' \in [a, b]$ mora biti i $c \in [a, b]$.

Ali $|c - b'| = \frac{1}{2}|a' - b'| < |a' - b'|$ pa zbog $(*)$ $c \notin A'$.
Isto tako, $c \notin B'$,
a kako je $[a, b] = A' \cup B'$, dobili smo kontradikciju s $c \in [a, b]$. $\square$

Drugi dokaz

2. dokaz: Kako su A' i B' zatvoreni i omeđeni podskupovi od $\mathbb{R}$, oni su kompaktni, pa je i produkt $A' \times B'$ kompaktan. Funkcija $d \colon A' \times B' \to \mathbb{R}$ definirana s $d(x, y) = |x - y|$ je restrikcija metrike u $\mathbb{R}$, pa je neprekidna (vidi zadatak 14 u vježbama uz drugo poglavlje). Zbog kompaktnosti ona ima minimum u nekoj točki $(a', b') \in A' \times B'$ (Weierstrassov teorem, korolar 18.9).

Kako su skupovi A' i B' kompaktni i disjunktni, to je $|a' - b'| > 0$, pa za sve $x \in A'$ i $y \in B'$ vrijedi $|x - y| \geq |a' - b'| > 0$. $(*)$

Neka je $c = \frac{1}{2}(a' + b')$. Kako su $a', b' \in [a, b]$ mora biti i $c \in [a, b]$.

Ali $|c - b'| = \frac{1}{2}|a' - b'| < |a' - b'|$ pa zbog $(*)$ $c \notin A'$.
Isto tako, $c \notin B'$,
a kako je $[a, b] = A' \cup B'$, dobili smo kontradikciju s $c \in [a, b]$. $\square$

Drugi dokaz

2. dokaz: Kako su A' i B' zatvoreni i omeđeni podskupovi od $\mathbb{R}$, oni su kompaktni, pa je i produkt $A' \times B'$ kompaktan. Funkcija $d \colon A' \times B' \to \mathbb{R}$ definirana s $d(x, y) = |x - y|$ je restrikcija metrike u $\mathbb{R}$, pa je neprekidna (vidi zadatak 14 u vježbama uz drugo poglavlje). Zbog kompaktnosti ona ima minimum u nekoj točki $(a', b') \in A' \times B'$ (Weierstrassov teorem, korolar 18.9).

Kako su skupovi A' i B' kompaktni i disjunktni, to je $|a' - b'| > 0$, pa za sve $x \in A'$ i $y \in B'$ vrijedi $|x - y| \geqslant |a' - b'| > 0$. $\quad (*)$

Neka je $c = \frac{1}{2}(a' + b')$. Kako su $a', b' \in [a, b]$ mora biti i $c \in [a, b]$.

Ali $|c - b'| = \frac{1}{2}|a' - b'| < |a' - b'|$ pa zbog $(*)$ $c \notin A'$.
Isto tako, $c \notin B'$,
a kako je $[a, b] = A' \cup B'$, dobili smo kontradikciju s $c \in [a, b]$. $\square$

Drugi dokaz

2. dokaz: Kako su A' i B' zatvoreni i omeđeni podskupovi od $\mathbb{R}$, oni su kompaktni, pa je i produkt $A' \times B'$ kompaktan. Funkcija $d\colon A' \times B' \to \mathbb{R}$ definirana s $d(x, y) = |x - y|$ je restrikcija metrike u $\mathbb{R}$, pa je neprekidna (vidi zadatak 14 u vježbama uz drugo poglavlje). Zbog kompaktnosti ona ima minimum u nekoj točki $(a', b') \in A' \times B'$ (Weierstrassov teorem, korolar 18.9).

Kako su skupovi A' i B' kompaktni i disjunktni, to je $|a' - b'| > 0$, pa za sve $x \in A'$ i $y \in B'$ vrijedi $|x - y| \geqslant |a' - b'| > 0$. $(*)$

Neka je $c = \frac{1}{2}(a' + b')$. Kako su $a', b' \in [a, b]$ mora biti i $c \in [a, b]$.

Ali $|c - b'| = \frac{1}{2}|a' - b'| < |a' - b'|$ pa zbog $(*)$ $c \notin A'$.

Isto tako, $c \notin B'$,

a kako je $[a, b] = A' \cup B'$, dobili smo kontradikciju s $c \in [a, b]$. $\square$

Drugi dokaz

2. dokaz: Kako su A' i B' zatvoreni i omeđeni podskupovi od $\mathbb{R}$, oni su kompaktni, pa je i produkt $A' \times B'$ kompaktan. Funkcija $d\colon A' \times B' \to \mathbb{R}$ definirana s $d(x, y) = |x - y|$ je restrikcija metrike u $\mathbb{R}$, pa je neprekidna (vidi zadatak 14 u vježbama uz drugo poglavlje). Zbog kompaktnosti ona ima minimum u nekoj točki $(a', b') \in A' \times B'$ (Weierstrassov teorem, korolar 18.9).

Kako su skupovi A' i B' kompaktni i disjunktni, to je $|a' - b'| > 0$, pa za sve $x \in A'$ i $y \in B'$ vrijedi $|x - y| \geqslant |a' - b'| > 0$. $(*)$

Neka je $c = \frac{1}{2}(a' + b')$. Kako su $a', b' \in [a, b]$ mora biti i $c \in [a, b]$.

Ali $|c - b'| = \frac{1}{2}|a' - b'| < |a' - b'|$ pa zbog $(*)$ $c \notin A'$.

Isto tako, $c \notin B'$,

a kako je $[a, b] = A' \cup B'$, dobili smo kontradikciju s $c \in [a, b]$. $\square$

Drugi dokaz

2. dokaz: Kako su A' i B' zatvoreni i omeđeni podskupovi od $\mathbb{R}$, oni su kompaktni, pa je i produkt $A' \times B'$ kompaktan. Funkcija $d \colon A' \times B' \to \mathbb{R}$ definirana s $d(x, y) = |x - y|$ je restrikcija metrike u $\mathbb{R}$, pa je neprekidna (vidi zadatak 14 u vježbama uz drugo poglavlje). Zbog kompaktnosti ona ima minimum u nekoj točki $(a', b') \in A' \times B'$ (Weierstrassov teorem, korolar 18.9).

Kako su skupovi A' i B' kompaktni i disjunktni, to je $|a' - b'| > 0$, pa za sve $x \in A'$ i $y \in B'$ vrijedi $|x - y| \geqslant |a' - b'| > 0$. $\quad (*)$

Neka je $c = \frac{1}{2}(a' + b')$. Kako su $a', b' \in [a, b]$ mora biti i $c \in [a, b]$.

Ali $|c - b'| = \frac{1}{2}|a' - b'| < |a' - b'|$ pa zbog $(*)$ $c \notin A'$.
Isto tako, $c \notin B'$,
a kako je $[a, b] = A' \cup B'$, dobili smo kontradikciju s $c \in [a, b]$. $\square$

Drugi dokaz

2. dokaz: Kako su A' i B' zatvoreni i omeđeni podskupovi od $\mathbb{R}$, oni su kompaktni, pa je i produkt $A' \times B'$ kompaktan. Funkcija $d\colon A' \times B' \to \mathbb{R}$ definirana s $d(x, y) = |x - y|$ je restrikcija metrike u $\mathbb{R}$, pa je neprekidna (vidi zadatak 14 u vježbama uz drugo poglavlje). Zbog kompaktnosti ona ima minimum u nekoj točki $(a', b') \in A' \times B'$ (Weierstrassov teorem, korolar 18.9).

Kako su skupovi A' i B' kompaktni i disjunktni, to je $|a' - b'| > 0$, pa za sve $x \in A'$ i $y \in B'$ vrijedi $|x - y| \geqslant |a' - b'| > 0$. $\quad (*)$

Neka je $c = \frac{1}{2}(a' + b')$. Kako su $a', b' \in [a, b]$ mora biti i $c \in [a, b]$.

Ali $|c - b'| = \frac{1}{2}|a' - b'| < |a' - b'|$ pa zbog $(*)$ $c \notin A'$.
Isto tako, $c \notin B'$,
a kako je $[a, b] = A' \cup B'$, dobili smo kontradikciju s $c \in [a, b]$. $\square$

Zaključak na temelju prethodna dva teorema:

Jedini povezani podskupovi od $\mathbb{R}$ su intervali.

Neprekidna slika povezanog prostora je povezana

Neprekidna preslikavanja čuvaju povezanost:

Teorem 21.12

Neka je $f\colon X \to Y$ neprekidno preslikavanje topoloških prostora. Ako je X povezan onda je i slika $f(X)$ povezan potprostor od Y.

Dokaz: *Korestrikcija $f\colon X \to f(X)$* je neprekidno preslikavanje, pa kada $f(X)$ ne bi bio povezan, prema teoremu 21.7 postojala bi neprekidna surjekcija $g\colon f(X) \to \{0,1\}$. Tada bi i kompozicija $g \circ f\colon X \to \{0,1\}$ bila neprekidna surjekcija, tj. X bi bio nepovezan. $\square$

Posljedica 21.13 (Topološka invarijantnost povezanosti)

Povezanost je topološka invarijanta. $\square$

Posljedica 21.14

Graf neprekidnog preslikavanja s povezanog prostora je povezan.

Dokaz: Graf neprekidnog preslikavanja je homeomorfan domeni (teorem 13.2). $\square$

Neprekidna slika povezanog prostora je povezana

Neprekidna preslikavanja čuvaju povezanost:

Teorem 21.12

Neka je $f\colon X \to Y$ neprekidno preslikavanje topoloških prostora. Ako je X povezan onda je i slika $f(X)$ povezan potprostor od Y.

Dokaz: *Korestrikcija* $f\colon X \to f(X)$ je neprekidno preslikavanje, pa kada $f(X)$ ne bi bio povezan, prema teoremu 21.7 postojala bi neprekidna surjekcija $g\colon f(X) \to \{0,1\}$. Tada bi i kompozicija $g \circ f\colon X \to \{0,1\}$ bila neprekidna surjekcija, tj. X bi bio nepovezan. □

Posljedica 21.13 (Topološka invarijantnost povezanosti)

Povezanost je topološka invarijanta. □

Posljedica 21.14

Graf neprekidnog preslikavanja s povezanog prostora je povezan.

Dokaz: Graf neprekidnog preslikavanja je homeomorfan domeni (teorem 13.2). □

Neprekidna slika povezanog prostora je povezana

Neprekidna preslikavanja čuvaju povezanost:

Teorem 21.12

Neka je $f\colon X \to Y$ neprekidno preslikavanje topoloških prostora. Ako je X povezan onda je i slika $f(X)$ povezan potprostor od Y.

Dokaz: *Korestrikcija* $f\colon X \to f(X)$ je neprekidno preslikavanje, pa kada $f(X)$ ne bi bio povezan, prema teoremu 21.7 postojala bi neprekidna surjekcija $g\colon f(X) \to \{0,1\}$. Tada bi i kompozicija $g \circ f\colon X \to \{0,1\}$ bila neprekidna surjekcija, tj. X bi bio nepovezan. □

Posljedica 21.13 (Topološka invarijantnost povezanosti)

Povezanost je topološka invarijanta. □

Posljedica 21.14

Graf neprekidnog preslikavanja s povezanog prostora je povezan.

Dokaz: Graf neprekidnog preslikavanja je homeomorfan domeni (teorem 13.2). □

Neprekidna slika povezanog prostora je povezana

Neprekidna preslikavanja čuvaju povezanost:

Teorem 21.12

Neka je $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje topoloških prostora. Ako je X povezan onda je i slika $f(X)$ povezan potprostor od Y.

Dokaz: *Korestrikcija* $f : X \to f(X)$ je neprekidno preslikavanje, pa kada $f(X)$ ne bi bio povezan, prema teoremu 21.7 postojala bi neprekidna surjekcija $g : f(X) \to \{0, 1\}$. Tada bi i kompozicija $g \circ f : X \to \{0, 1\}$ bila neprekidna surjekcija, tj. X bi bio nepovezan. □

Posljedica 21.13 (Topološka invarijantnost povezanosti)

Povezanost je topološka invarijanta. □

Posljedica 21.14

Graf neprekidnog preslikavanja s povezanog prostora je povezan.

Dokaz: Graf neprekidnog preslikavanja je homeomorfan domeni (teorem 13.2). □

Neprekidna slika povezanog prostora je povezana

Neprekidna preslikavanja čuvaju povezanost:

Teorem 21.12

Neka je $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje topoloških prostora. Ako je X povezan onda je i slika $f(X)$ povezan potprostor od Y.

Dokaz: *Korestrikcija* $f : X \to f(X)$ je neprekidno preslikavanje, pa kada $f(X)$ ne bi bio povezan, prema teoremu 21.7 postojala bi neprekidna surjekcija $g : f(X) \to \{0, 1\}$. Tada bi i kompozicija $g \circ f : X \to \{0, 1\}$ bila neprekidna surjekcija, tj. X bi bio nepovezan. □

Posljedica 21.13 (Topološka invarijantnost povezanosti)

Povezanost je topološka invarijanta. □

Posljedica 21.14

Graf neprekidnog preslikavanja s povezanog prostora je povezan.

Dokaz: Graf neprekidnog preslikavanja je homeomorfan domeni (teorem 13.2). □

Još nekoliko posljedica

Kao posljedicu teorema 21.9 dobivamo:

Posljedica 21.15

Neka je $f\colon X \to \mathbb{R}$ neprekidna realna funkcija. Ako je prostor X povezan onda je slika $f(X)$ interval. □

Na početku smo bili obećali dokazati i ovo (teorem 4.3):

Posljedica 21.16 (Teorem o međuvrijednostima)

Neprekidna funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ poprima sve međuvrijednosti. □

Euklidski prostori različitih dimenzija nisu homeomorfni, ali to nije lako dokazati. Ipak, nešto možemo dokazati već sada:

Posljedica 21.17

Za $n \geqslant 2$ euklidski prostor $\mathbb{E}^n$ nije homeomorfan prostoru $\mathbb{R}$.

Još nekoliko posljedica

Kao posljedicu teorema 21.9 dobivamo:

Posljedica 21.15

Neka je $f\colon X \to \mathbb{R}$ neprekidna realna funkcija. Ako je prostor X povezan onda je slika $f(X)$ interval. □

Na početku smo bili obećali dokazati i ovo (teorem 4.3):

Posljedica 21.16 (Teorem o međuvrijednostima)

Neprekidna funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ poprima sve međuvrijednosti. □

Euklidski prostori različitih dimenzija nisu homeomorfni, ali to nije lako dokazati. Ipak, nešto možemo dokazati već sada:

Posljedica 21.17

Za $n \geqslant 2$ euklidski prostor $\mathbb{E}^n$ nije homeomorfan prostoru $\mathbb{R}$.

Još nekoliko posljedica

Kao posljedicu teorema 21.9 dobivamo:

Posljedica 21.15

Neka je $f\colon X \to \mathbb{R}$ neprekidna realna funkcija. Ako je prostor X povezan onda je slika $f(X)$ interval. □

Na početku smo bili obećali dokazati i ovo (teorem 4.3):

Posljedica 21.16 (Teorem o međuvrijednostima)

Neprekidna funkcija $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ poprima sve međuvrijednosti. □

Euklidski prostori različitih dimenzija nisu homeomorfni, ali to nije lako dokazati. Ipak, nešto možemo dokazati već sada:

Posljedica 21.17

Za $n \geqslant 2$ euklidski prostor $\mathbb{E}^n$ nije homeomorfan prostoru $\mathbb{R}$.

Još nekoliko posljedica

Kao posljedicu teorema 21.9 dobivamo:

Posljedica 21.15

Neka je $f\colon X \to \mathbb{R}$ neprekidna realna funkcija. Ako je prostor X povezan onda je slika $f(X)$ interval. □

Na početku smo bili obećali dokazati i ovo (teorem 4.3):

Posljedica 21.16 (Teorem o međuvrijednostima)

Neprekidna funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ poprima sve međuvrijednosti. □

Euklidski prostori različitih dimenzija nisu homeomorfni, ali to nije lako dokazati. Ipak, nešto možemo dokazati već sada:

Posljedica 21.17

Za $n \geqslant 2$ euklidski prostor $\mathbb{E}^n$ nije homeomorfan prostoru $\mathbb{R}$.

Neke standardne činjenice o povezanosti

Dokažimo sada nekoliko standardnih činjenica o povezanosti.

Propozicija 21.18

Neka je $X = C \sqcup D$ separacija i neka je $Y \subseteq X$ povezan podskup. Tada je ili $Y \subseteq C$ ili $Y \subseteq D$.

Dokaz: Ako je $X = C \sqcup D$ separacija, onda su skupovi $C \cap Y$ i $D \cap Y$ otvoreni u Y. Kada Y ne bi bio sadržan niti u C niti u D, onda bi $C \cap Y$ i $D \cap Y$ bili neprazni, pa bi $Y = (C \cap Y) \sqcup (D \cap Y)$ bila separacija od Y, tj. Y ne bi bio povezan. □

Neke standardne činjenice o povezanosti

Dokažimo sada nekoliko standardnih činjenica o povezanosti.

Propozicija 21.18

Neka je $X = C \sqcup D$ separacija i neka je $Y \subseteq X$ povezan podskup. Tada je ili $Y \subseteq C$ ili $Y \subseteq D$.

Dokaz: Ako je $X = C \sqcup D$ separacija, onda su skupovi $C \cap Y$ i $D \cap Y$ otvoreni u Y. Kada Y ne bi bio sadržan niti u C niti u D, onda bi $C \cap Y$ i $D \cap Y$ bili neprazni, pa bi $Y = (C \cap Y) \sqcup (D \cap Y)$ bila separacija od Y, tj. Y ne bi bio povezan. $\square$

Povezanost unije

Unija povezanih skupova ne mora biti povezan skup, ali

Teorem 21.19

Neka je $\{A_\alpha : \alpha \in J\}$ familija povezanih podskupova topološkog prostora X. Ako je $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$ za sve $\alpha, \beta \in J$, onda je unija $A = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ povezan skup.

Dokaz: Pokažimo da ne postoji neprekidna surjekcija $A \to \{0, 1\}$. Neka je $f : A \to \{0, 1\}$ neprekidna funkcija. Tada su i restrikcije $f|_{A_\alpha} : A_\alpha \to \{0, 1\}$ neprekidne, pa je za svaki α restrikcija $f|_{A_\alpha}$ konstantna funkcija. Označimo $f(A_\alpha) = f|_{A_\alpha}(A_\alpha) = \{\varepsilon_\alpha\}$. Za svaki α, ε_α je ili 0 ili 1, a kako je $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$, mora biti $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta$ za sve $\alpha, \beta \in J$, pa je f konstantna funkcija, dakle nije surjekcija. □

Posljedica 21.20

Unija povezanih skupova koji imaju zajedničku točku je povezana.

Povezanost unije

Unija povezanih skupova ne mora biti povezan skup, ali

Teorem 21.19

Neka je $\{A_\alpha : \alpha \in J\}$ familija povezanih podskupova topološkog prostora X. Ako je $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$ za sve $\alpha, \beta \in J$, onda je unija $A = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ povezan skup.

Dokaz: Pokažimo da ne postoji neprekidna surjekcija $A \to \{0, 1\}$.

Neka je $f : A \to \{0, 1\}$ neprekidna funkcija. Tada su i restrikcije $f|_{A_\alpha} : A_\alpha \to \{0, 1\}$ neprekidne, pa je za svaki α restrikcija $f|_{A_\alpha}$ konstantna funkcija. Označimo $f(A_\alpha) = f|_{A_\alpha}(A_\alpha) = \{\varepsilon_\alpha\}$.
Za svaki α, ε_α je ili 0 ili 1, a kako je $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$, mora biti $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta$ za sve $\alpha, \beta \in J$, pa je f konstantna funkcija, dakle nije surjekcija. $\square$

Posljedica 21.20

Unija povezanih skupova koji imaju zajedničku točku je povezana.

Povezanost unije

Unija povezanih skupova ne mora biti povezan skup, ali

Teorem 21.19

Neka je $\{A_\alpha : \alpha \in J\}$ familija povezanih podskupova topološkog prostora X. Ako je $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$ za sve $\alpha, \beta \in J$, onda je unija $A = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ povezan skup.

Dokaz: Pokažimo da ne postoji neprekidna surjekcija $A \to \{0, 1\}$.
Neka je $f\colon A \to \{0, 1\}$ neprekidna funkcija. Tada su i restrikcije $f|_{A_\alpha}\colon A_\alpha \to \{0, 1\}$ neprekidne, pa je za svaki α restrikcija $f|_{A_\alpha}$ konstantna funkcija. Označimo $f(A_\alpha) = f|_{A_\alpha}(A_\alpha) = \{\varepsilon_\alpha\}$.
Za svaki α, ε_α je ili 0 ili 1, a kako je $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$, mora biti $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta$ za sve $\alpha, \beta \in J$, pa je f konstantna funkcija, dakle nije surjekcija. □

Posljedica 21.20

Unija povezanih skupova koji imaju zajedničku točku je povezana.

Povezanost unije

Unija povezanih skupova ne mora biti povezan skup, ali

Teorem 21.19

Neka je $\{A_\alpha : \alpha \in J\}$ familija povezanih podskupova topološkog prostora X. Ako je $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$ za sve $\alpha, \beta \in J$, onda je unija $A = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ povezan skup.

Dokaz: Pokažimo da ne postoji neprekidna surjekcija $A \to \{0, 1\}$. Neka je $f\colon A \to \{0, 1\}$ neprekidna funkcija. Tada su i restrikcije $f|_{A_\alpha}\colon A_\alpha \to \{0, 1\}$ neprekidne, pa je za svaki α restrikcija $f|_{A_\alpha}$ konstantna funkcija. Označimo $f(A_\alpha) = f|_{A_\alpha}(A_\alpha) = \{\varepsilon_\alpha\}$. Za svaki α, ε_α je ili 0 ili 1, a kako je $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$, mora biti $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta$ za sve $\alpha, \beta \in J$, pa je f konstantna funkcija, dakle nije surjekcija. $\square$

Posljedica 21.20

Unija povezanih skupova koji imaju zajedničku točku je povezana.

Povezanost unije

Unija povezanih skupova ne mora biti povezan skup, ali

Teorem 21.19

Neka je $\{A_\alpha : \alpha \in J\}$ familija povezanih podskupova topološkog prostora X. Ako je $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$ za sve $\alpha, \beta \in J$, onda je unija $A = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ povezan skup.

Dokaz: Pokažimo da ne postoji neprekidna surjekcija $A \to \{0, 1\}$. Neka je $f\colon A \to \{0, 1\}$ neprekidna funkcija. Tada su i restrikcije $f|_{A_\alpha}\colon A_\alpha \to \{0, 1\}$ neprekidne, pa je za svaki α restrikcija $f|_{A_\alpha}$ konstantna funkcija. Označimo $f(A_\alpha) = f|_{A_\alpha}(A_\alpha) = \{\varepsilon_\alpha\}$. Za svaki α, ε_α je ili 0 ili 1, a kako je $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$, mora biti $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta$ za sve $\alpha, \beta \in J$, pa je f konstantna funkcija, dakle nije surjekcija. $\square$

Posljedica 21.20

Unija povezanih skupova koji imaju zajedničku točku je povezana.

Povezanost produkta

Posljedica 21.21

Neka je $\{A_\alpha\}_\alpha$ familija povezanih skupova i neka je B povezan i takav da je je $B \cap A_\alpha \neq \emptyset$ za sve α. Tada je unija $B \cup \bigcup_\alpha A_\alpha$ povezan skup.

Dokaz: Neka je $C_\alpha = B \cup A_\alpha$. Tada je $\{C_\alpha\}_\alpha$ familija povezanih skupova koji imaju zajedničku točku (svaka točka iz B), pa je prema prethodnom korolaru, njihova unija povezan skup. $\square$

Teorem 21.22

Ako su X i Y povezani prostori onda je i produkt $X \times Y$ povezan.

Dokaz: Odaberimo točku $y_0 \in Y$ i neka je $B := X \times \{y_0\}$, a za svaki $x \in X$ neka je $A_x := \{x\} \times Y$. Prostori A_x su svi homeomorfni prostoru Y, sijeku B, a B je homeomorfan prostoru X, pa povezanost produkta $X \times Y$ slijedi iz prethodnog korolara primijenjenog na B i familiju $\{A_x : x \in X\}$, jer je $X \times Y = \bigcup_{x \in X} A_x$. $\square$

Povezanost produkta

Posljedica 21.21

Neka je $\{A_\alpha\}_\alpha$ familija povezanih skupova i neka je B povezan i takav da je je $B \cap A_\alpha \neq \emptyset$ za sve α. Tada je unija $B \cup \bigcup_\alpha A_\alpha$ povezan skup.

Dokaz: Neka je $C_\alpha = B \cup A_\alpha$. Tada je $\{C_\alpha\}_\alpha$ familija povezanih skupova koji imaju zajedničku točku (svaka točka iz B), pa je prema prethodnom korolaru, njihova unija povezan skup. $\square$

Teorem 21.22

Ako su X i Y povezani prostori onda je i produkt $X \times Y$ povezan.

Dokaz: Odaberimo točku $y_0 \in Y$ i neka je $B := X \times \{y_0\}$, a za svaki $x \in X$ neka je $A_x := \{x\} \times Y$. Prostori A_x su svi homeomorfni prostoru Y, sijeku B, a B je homeomorfan prostoru X, pa povezanost produkta $X \times Y$ slijedi iz prethodnog korolara primijenjenog na B i familiju $\{A_x : x \in X\}$, jer je $X \times Y = \bigcup_{x \in X} A_x$. $\square$

Povezanost produkta

Posljedica 21.21

Neka je $\{A_\alpha\}_\alpha$ familija povezanih skupova i neka je B povezan i takav da je je $B \cap A_\alpha \neq \emptyset$ za sve α. Tada je unija $B \cup \bigcup_\alpha A_\alpha$ povezan skup.

Dokaz: Neka je $C_\alpha = B \cup A_\alpha$. Tada je $\{C_\alpha\}_\alpha$ familija povezanih skupova koji imaju zajedničku točku (svaka točka iz B), pa je prema prethodnom korolaru, njihova unija povezan skup. $\square$

Teorem 21.22

Ako su X i Y povezani prostori onda je i produkt $X \times Y$ povezan.

Dokaz: Odaberimo točku $y_0 \in Y$ i neka je $B := X \times \{y_0\}$, a za svaki $x \in X$ neka je $A_x := \{x\} \times Y$. Prostori A_x su svi homeomorfni prostoru Y, sijeku B, a B je homeomorfan prostoru X, pa povezanost produkta $X \times Y$ slijedi iz prethodnog korolara primijenjenog na B i familiju $\{A_x : x \in X\}$, jer je $X \times Y = \bigcup_{x \in X} A_x$. $\square$

Povezanost produkta

Posljedica 21.21

Neka je $\{A_\alpha\}_\alpha$ familija povezanih skupova i neka je B povezan i takav da je je $B \cap A_\alpha \neq \emptyset$ za sve α. Tada je unija $B \cup \bigcup_\alpha A_\alpha$ povezan skup.

Dokaz: Neka je $C_\alpha = B \cup A_\alpha$. Tada je $\{C_\alpha\}_\alpha$ familija povezanih skupova koji imaju zajedničku točku (svaka točka iz B), pa je prema prethodnom korolaru, njihova unija povezan skup. $\square$

Teorem 21.22

Ako su X i Y povezani prostori onda je i produkt $X \times Y$ povezan.

Dokaz: Odaberimo točku $y_0 \in Y$ i neka je $B := X \times \{y_0\}$, a za svaki $x \in X$ neka je $A_x := \{x\} \times Y$. Prostori A_x su svi homeomorfni prostoru Y, sijeku B, a B je homeomorfan prostoru X, pa povezanost produkta $X \times Y$ slijedi iz prethodnog korolara primijenjenog na B i familiju $\{A_x : x \in X\}$, jer je $X \times Y = \bigcup_{x \in X} A_x$. $\square$

Povezanost produkta

Posljedica 21.21

Neka je $\{A_\alpha\}_\alpha$ familija povezanih skupova i neka je B povezan i takav da je je $B \cap A_\alpha \neq \emptyset$ za sve α. Tada je unija $B \cup \bigcup_\alpha A_\alpha$ povezan skup.

Dokaz: Neka je $C_\alpha = B \cup A_\alpha$. Tada je $\{C_\alpha\}_\alpha$ familija povezanih skupova koji imaju zajedničku točku (svaka točka iz B), pa je prema prethodnom korolaru, njihova unija povezan skup. $\square$

Teorem 21.22

Ako su X i Y povezani prostori onda je i produkt $X \times Y$ povezan.

Dokaz: Odaberimo točku $y_0 \in Y$ i neka je $B := X \times \{y_0\}$, a za svaki $x \in X$ neka je $A_x := \{x\} \times Y$. Prostori A_x su svi homeomorfni prostoru Y, sijeku B, a B je homeomorfan prostoru X, pa povezanost produkta $X \times Y$ slijedi iz prethodnog korolara primijenjenog na B i familiju $\{A_x : x \in X\}$, jer je $X \times Y = \bigcup_{x \in X} A_x$. $\square$

Povezanost zatvorenja

Vrlo je koristan sljedeći teorem:

Teorem 21.23

Neka je $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$. Ako je A povezan onda je i B povezan.

Dokaz: Pretpostavimo da je $B = C \sqcup D$ separacija.

Povezanost zatvorenja

Vrlo je koristan sljedeći teorem:

Teorem 21.23

Neka je $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$. Ako je A povezan onda je i B povezan.

Dokaz: Pretpostavimo da je $B = C \sqcup D$ separacija.

Prema propoziciji 21.18 je $A \subseteq C$ (ili $A \subseteq D$), pa je i $B \subseteq \overline{A} \subseteq \overline{C}$.

Kako je $\overline{C} \cap D = \emptyset$ (propozicija 21.5), to je $B \cap D = \emptyset$ $\Rightarrow\Leftarrow$ $B = C \sqcup D$. $\square$

Posljedica 21.24

Ako je $A \subseteq X$ povezan podskup onda je i zatvorenje $\overline{A}$ povezan skup.

Povezanost zatvorenja

Vrlo je koristan sljedeći teorem:

Teorem 21.23

Neka je $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$. Ako je A povezan onda je i B povezan.

Dokaz: Pretpostavimo da je $B = C \sqcup D$ separacija.
Prema propoziciji 21.18 je $A \subseteq C$ (ili $A \subseteq D$), pa je i $B \subseteq \overline{A} \subseteq \overline{C}$.
Kako je $\overline{C} \cap D = \emptyset$ (propozicija 21.5), to je $B \cap D = \emptyset \implies\!\Leftarrow\; B = C \sqcup D$. $\square$

Posljedica 21.24

Ako je $A \subseteq X$ povezan podskup onda je i zatvorenje $\overline{A}$ povezan skup.

Povezanost zatvorenja

Vrlo je koristan sljedeći teorem:

Teorem 21.23

Neka je $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$. Ako je A povezan onda je i B povezan.

Dokaz: Pretpostavimo da je $B = C \sqcup D$ separacija.
Prema propoziciji 21.18 je $A \subseteq C$ (ili $A \subseteq D$), pa je i $B \subseteq \overline{A} \subseteq \overline{C}$.
Kako je $\overline{C} \cap D = \emptyset$ (propozicija 21.5), to je $B \cap D = \emptyset$ $\Rightarrow\!\Leftarrow$ $B = C \sqcup D$. $\square$

Posljedica 21.24

Ako je $A \subseteq X$ povezan podskup onda je i zatvorenje $\overline{A}$ povezan skup.

Povezanost zatvorenja

Vrlo je koristan sljedeći teorem:

Teorem 21.23

Neka je $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$. Ako je A povezan onda je i B povezan.

Dokaz: Pretpostavimo da je $B = C \sqcup D$ separacija.
Prema propoziciji 21.18 je $A \subseteq C$ (ili $A \subseteq D$), pa je i $B \subseteq \overline{A} \subseteq \overline{C}$.
Kako je $\overline{C} \cap D = \emptyset$ (propozicija 21.5), to je $B \cap D = \emptyset$ $\Rightarrow\!\Leftarrow$ $B = C \sqcup D$. $\square$

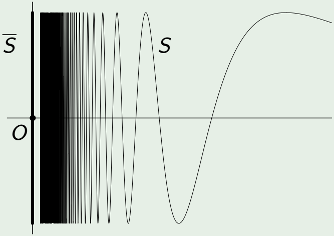
Posljedica 21.24

Ako je $A \subseteq X$ povezan podskup onda je i zatvorenje $\overline{A}$ povezan skup.

Povezanost topološke sinusne krivulje

Primjer 21.25 (Povezanost topološke sinusne krivulje)

Bili smo spomenuli topološku sinusnu krivulju. To je potprostor $\overline{S} = \left\{(x, \sin\frac{1}{x}) : 0 < x \leqslant 1\right\} \cup \left(\{0\} \times [-1, 1]\right) \subseteq \mathbb{R}^2$. Sada možemo dokazati da je $\overline{S}$ povezan. Zaista, potprostor

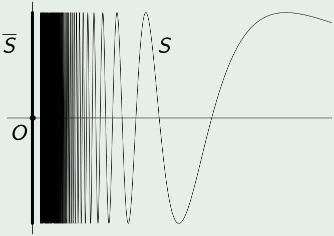


$S = \left\{(x, \sin\frac{1}{x}) : 0 < x \leqslant 1\right\}$ je graf funkcije $\sin\frac{1}{x}$ pa je prema teoremu 13.2 homeomorfan poluotvorenom intervalu $\langle 0, 1]$, te je povezan.
Prema prethodnom korolaru 21.24 je i zatvorenje $\overline{S}$ povezan potprostor ravnine.

Povezanost topološke sinusne krivulje

Primjer 21.25 (Povezanost topološke sinusne krivulje)

Bili smo spomenuli topološku sinusnu krivulju. To je potprostor $\overline{S} = \left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right) : 0 < x \leqslant 1\right\} \cup \left(\{0\} \times [-1, 1]\right) \subseteq \mathbb{R}^2$. Sada možemo dokazati da je $\overline{S}$ povezan. Zaista, potprostor



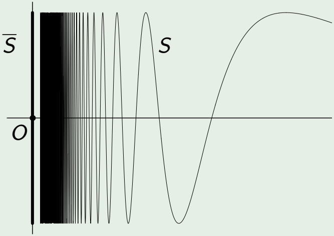
$S = \left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right) : 0 < x \leqslant 1\right\}$ je graf funkcije $\sin\frac{1}{x}$ pa je prema teoremu 13.2 homeomorfan poluotvorenom intervalu $\langle 0, 1]$, te je povezan.

Prema prethodnom korolaru 21.24 je i zatvorenje $\overline{S}$ povezan potprostor ravnine.

Povezanost topološke sinusne krivulje

Primjer 21.25 (Povezanost topološke sinusne krivulje)

Bili smo spomenuli topološku sinusnu krivulju. To je potprostor $\overline{S} = \left\{(x, \sin \frac{1}{x}) : 0 < x \leqslant 1\right\} \cup \left(\{0\} \times [-1, 1]\right) \subseteq \mathbb{R}^2$. Sada možemo dokazati da je $\overline{S}$ povezan. Zaista, potprostor



$S = \left\{(x, \sin \frac{1}{x}) : 0 < x \leqslant 1\right\}$ je graf funkcije $\sin \frac{1}{x}$ pa je prema teoremu 13.2 homeomorfan poluotvorenom intervalu $\langle 0, 1]$, te je povezan.

Prema prethodnom korolaru 21.24 je i zatvorenje $\overline{S}$ povezan potprostor ravnine.

Povezanost putevima

Intuitivno osjećamo da bi povezanost potprostora u $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ trebala značiti da se svake dvije točke tog potprostora mogu unutar njega spojiti neprekidnom krivuljom. Ta ideja vodi do definicije svojstva jačeg od povezanosti, ali mnogo intuitivnijeg.

Definicija 22.1

Neka je X topološki prostor i neka su $a, b \in X$ dvije točke. *Put* u X od a do b je svako neprekidno preslikavanje $f\colon [0,1] \to X$ takvo da je $f(0) = a$ i $f(1) = b$.

Definicija 22.2

Topološki prostor je *putevima povezan* ako se svake dvije točke mogu spojiti putem.

Povezanost putevima

Intuitivno osjećamo da bi povezanost potprostora u $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ trebala značiti da se svake dvije točke tog potprostora mogu unutar njega spojiti neprekidnom krivuljom. Ta ideja vodi do definicije svojstva jačeg od povezanosti, ali mnogo intuitivnijeg.

Definicija 22.1

Neka je X topološki prostor i neka su $a, b \in X$ dvije točke. *Put* u X od a do b je svako neprekidno preslikavanje $f\colon [0,1] \to X$ takvo da je $f(0) = a$ i $f(1) = b$.

Definicija 22.2

Topološki prostor je *putevima povezan* ako se svake dvije točke mogu spojiti putem.

Povezanost putevima

Intuitivno osjećamo da bi povezanost potprostora u $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ trebala značiti da se svake dvije točke tog potprostora mogu unutar njega spojiti neprekidnom krivuljom. Ta ideja vodi do definicije svojstva jačeg od povezanosti, ali mnogo intuitivnijeg.

Definicija 22.1

Neka je X topološki prostor i neka su $a, b \in X$ dvije točke. *Put* u X od a do b je svako neprekidno preslikavanje $f\colon [0,1] \to X$ takvo da je $f(0) = a$ i $f(1) = b$.

Definicija 22.2

Topološki prostor je *putevima povezan* ako se svake dvije točke mogu spojiti putem.

Primjeri

Primjer 22.3 (Primjeri putevima povezanih prostora)

- Svi intervali.
- $\mathbb{E}^n$ i svi konveksni podskupovi od $\mathbb{E}^n$.
- Kružni vijenac $\{(x, y) : a^2 < x^2+y^2 < b^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ za neke $a < b$.
- Ravnina bez ishodišta: $\mathbb{E}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

U mnogim je dokazima korisna sljedeća lema:

Lema 22.4 (Konkatenacija puteva)

Neka su $f, g \colon [0, 1] \to X$ putevi od a do b odnosno od b do c. Tada je preslikavanje $f * g \colon [0, 1] \to X$ definirano s

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & , 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & , \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

put od a do c. $\square$

Kaže se i da je put h dobiven *nadovezivanjem* puteva f i g.

Primjeri

Primjer 22.3 (Primjeri putevima povezanih prostora)

- Svi intervali.
- $\mathbb{E}^n$ i svi konveksni podskupovi od $\mathbb{E}^n$.
- Kružni vijenac $\{(x, y) : a^2 < x^2+y^2 < b^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ za neke $a < b$.
- Ravnina bez ishodišta: $\mathbb{E}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

U mnogim je dokazima korisna sljedeća lema:

Lema 22.4 (Konkatenacija puteva)

Neka su $f, g\colon [0, 1] \to X$ putevi od a do b odnosno od b do c. Tada je preslikavanje $f * g\colon [0, 1] \to X$ definirano s

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & , 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & , \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

put od a do c. □

Kaže se i da je put h dobiven *nadovezivanjem* puteva f i g.

Primjeri

Primjer 22.3 (Primjeri putevima povezanih prostora)

- Svi intervali.
- $\mathbb{E}^n$ i svi konveksni podskupovi od $\mathbb{E}^n$.
- Kružni vijenac $\{(x, y) : a^2 < x^2+y^2 < b^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ za neke $a < b$.
- Ravnina bez ishodišta: $\mathbb{E}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

U mnogim je dokazima korisna sljedeća lema:

Lema 22.4 (Konkatenacija puteva)

Neka su $f, g\colon [0, 1] \to X$ putevi od a do b odnosno od b do c. Tada je preslikavanje $f * g\colon [0, 1] \to X$ definirano s

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & , 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & , \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$ *put od a do c.* □

Kaže se i da je put h dobiven *nadovezivanjem* puteva f i g.

Primjeri

Primjer 22.3 (Primjeri putevima povezanih prostora)

- Svi intervali.
- $\mathbb{E}^n$ i svi konveksni podskupovi od $\mathbb{E}^n$.
- Kružni vijenac $\{(x,y) : a^2 < x^2+y^2 < b^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ za neke $a < b$.
- Ravnina bez ishodišta: $\mathbb{E}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

U mnogim je dokazima korisna sljedeća lema:

Lema 22.4 (Konkatenacija puteva)

Neka su $f, g\colon [0,1] \to X$ putevi od a do b odnosno od b do c. Tada je preslikavanje $f * g\colon [0,1] \to X$ definirano s

$$(f*g)(t) = \begin{cases} f(2t) & , 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & , \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

put od a do c. □

Kaže se i da je put h dobiven *nadovezivanjem* puteva f i g.

Primjeri

Primjer 22.3 (Primjeri putevima povezanih prostora)

- Svi intervali.
- $\mathbb{E}^n$ i svi konveksni podskupovi od $\mathbb{E}^n$.
- Kružni vijenac $\{(x,y) : a^2 < x^2+y^2 < b^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ za neke $a < b$.
- Ravnina bez ishodišta: $\mathbb{E}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

U mnogim je dokazima korisna sljedeća lema:

Lema 22.4 (Konkatenacija puteva)

Neka su $f, g\colon [0,1] \to X$ putevi od a do b odnosno od b do c. Tada je preslikavanje $f * g\colon [0,1] \to X$ definirano s

$$(f*g)(t) = \begin{cases} f(2t) & , 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & , \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

put od a do c. □

Kaže se i da je put h dobiven *nadovezivanjem* puteva f i g.

Primjeri

Primjer 22.3 (Primjeri putevima povezanih prostora)

- Svi intervali.
- $\mathbb{E}^n$ i svi konveksni podskupovi od $\mathbb{E}^n$.
- Kružni vijenac $\{(x, y) : a^2 < x^2+y^2 < b^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ za neke $a < b$.
- Ravnina bez ishodišta: $\mathbb{E}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

U mnogim je dokazima korisna sljedeća lema:

Lema 22.4 (Konkatenacija puteva)

Neka su $f, g\colon [0,1] \to X$ putevi od a do b odnosno od b do c. Tada je preslikavanje $f * g\colon [0,1] \to X$ definirano s

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & , 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & , \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

put od a do c. □

Kaže se i da je put h dobiven *nadovezivanjem* puteva f i g.

Primjeri

Primjer 22.3 (Primjeri putevima povezanih prostora)

- Svi intervali.
- $\mathbb{E}^n$ i svi konveksni podskupovi od $\mathbb{E}^n$.
- Kružni vijenac $\{(x, y) : a^2 < x^2+y^2 < b^2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ za neke $a < b$.
- Ravnina bez ishodišta: $\mathbb{E}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

U mnogim je dokazima korisna sljedeća lema:

Lema 22.4 (Konkatenacija puteva)

Neka su $f, g\colon [0, 1] \to X$ putevi od a do b odnosno od b do c. Tada je preslikavanje $f * g\colon [0, 1] \to X$ definirano s

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & , 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ g(2t-1) \, , & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

put od a do c. $\square$

Kaže se i da je put h dobiven *nadovezivanjem* puteva f i g.

Osnovni teoremi 1

Zbog potpunosti navest ćemo osnovne činjenice o povezanosti putevima, analogne odgovarajućim činjenicama o povezanosti. Dokazi su slični onima za povezanost i ostavljamo ih za vježbe.

Teorem 22.5

Neka je $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje topoloških prostora. Ako je X putevima povezan onda je i slika $f(X)$ putevima povezan potprostor od Y.

Posljedica 22.6 (Topološka invarijantnost povezanosti putevima)

Povezanost putevima je topološka invarijanta. □

Teorem 22.7

Neka je $\{A_\alpha : \alpha \in J\}$ familija putevima povezanih podskupova topološkog prostora X. Ako je $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$ za sve $\alpha, \beta \in J$, onda je unija $A = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ putevima povezana.

Osnovni teoremi 1

Zbog potpunosti navest ćemo osnovne činjenice o povezanosti putevima, analogne odgovarajućim činjenicama o povezanosti. Dokazi su slični onima za povezanost i ostavljamo ih za vježbe.

Teorem 22.5

Neka je $f\colon X \to Y$ neprekidno preslikavanje topoloških prostora. Ako je X putevima povezan onda je i slika $f(X)$ putevima povezan potprostor od Y.

Posljedica 22.6 (Topološka invarijantnost povezanosti putevima)

Povezanost putevima je topološka invarijanta. □

Teorem 22.7

Neka je $\{A_\alpha : \alpha \in J\}$ familija putevima povezanih podskupova topološkog prostora X. Ako je $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$ za sve $\alpha, \beta \in J$, onda je unija $A = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ putevima povezana.

Osnovni teoremi 1

Zbog potpunosti navest ćemo osnovne činjenice o povezanosti putevima, analogne odgovarajućim činjenicama o povezanosti. Dokazi su slični onima za povezanost i ostavljamo ih za vježbe.

Teorem 22.5

Neka je $f\colon X \to Y$ neprekidno preslikavanje topoloških prostora. Ako je X putevima povezan onda je i slika $f(X)$ putevima povezan potprostor od Y.

Posljedica 22.6 (Topološka invarijantnost povezanosti putevima)

Povezanost putevima je topološka invarijanta. $\square$

Teorem 22.7

Neka je $\{A_\alpha : \alpha \in J\}$ familija putevima povezanih podskupova topološkog prostora X. Ako je $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$ za sve $\alpha, \beta \in J$, onda je unija $A = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ putevima povezana.

Osnovni teoremi 1

Zbog potpunosti navest ćemo osnovne činjenice o povezanosti putevima, analogne odgovarajućim činjenicama o povezanosti. Dokazi su slični onima za povezanost i ostavljamo ih za vježbe.

Teorem 22.5

Neka je $f\colon X \to Y$ neprekidno preslikavanje topoloških prostora. Ako je X putevima povezan onda je i slika $f(X)$ putevima povezan potprostor od Y.

Posljedica 22.6 (Topološka invarijantnost povezanosti putevima)

Povezanost putevima je topološka invarijanta. □

Teorem 22.7

Neka je $\{A_\alpha : \alpha \in J\}$ familija putevima povezanih podskupova topološkog prostora X. Ako je $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$ za sve $\alpha, \beta \in J$, onda je unija $A = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ putevima povezana.

Osnovni teoremi 2

Posljedica 22.8

Unija putevima povezanih skupova koji imaju zajedničku točku je putevima povezana.

Posljedica 22.9

Neka je $\{A_\alpha\}_\alpha$ familija putevima povezanih skupova i neka je B putevima povezan i takav da je je $B \cap A_\alpha \neq \emptyset$ za sve α. Tada je unija $B \cup \bigcup_\alpha A_\alpha$ putevima povezana.

Teorem 22.10

Ako su X i Y putevima povezani prostori onda je i produkt $X \times Y$ putevima povezan.

Osnovni teoremi 2

Posljedica 22.8

Unija putevima povezanih skupova koji imaju zajedničku točku je putevima povezana.

Posljedica 22.9

Neka je $\{A_\alpha\}_\alpha$ familija putevima povezanih skupova i neka je B putevima povezan i takav da je je $B \cap A_\alpha \neq \emptyset$ za sve α. Tada je unija $B \cup \bigcup_\alpha A_\alpha$ putevima povezana.

Teorem 22.10

Ako su X i Y putevima povezani prostori onda je i produkt $X \times Y$ putevima povezan.

Osnovni teoremi 2

Posljedica 22.8

Unija putevima povezanih skupova koji imaju zajedničku točku je putevima povezana.

Posljedica 22.9

Neka je $\{A_\alpha\}_\alpha$ familija putevima povezanih skupova i neka je B putevima povezan i takav da je je $B \cap A_\alpha \neq \emptyset$ za sve α. Tada je unija $B \cup \bigcup_\alpha A_\alpha$ putevima povezana.

Teorem 22.10

Ako su X i Y putevima povezani prostori onda je i produkt $X \times Y$ putevima povezan.

Ali. . .

Ipak, za povezanost putevima ne vrijedi sve što vrijedi za povezanost. Specijalno, analogoni teorema 21.23 i korolara 21.24 ne vrijede, tj. zatvorenje putevima povezanog prostora ne mora biti putevima povezano.

Primjer 22.11 (Topološka sinusna krivulja nije putevima povezana)

Ali...

Ipak, za povezanost putevima ne vrijedi sve što vrijedi za povezanost. Specijalno, analogoni teorema 21.23 i korolara 21.24 ne vrijede, tj. zatvorenje putevima povezanog prostora ne mora biti putevima povezano.

Primjer 22.11 (Topološka sinusna krivulja nije putevima povezana)

Neka je $f = (f_1, f_2) \colon [0,1] \to \overline{S}$ put od O do p i neka je $b := \max f_1^{-1}(0)$. Zamijenimo $[b,1]$ s $[0,1]$ i dobivamo (rabimo za put opet oznaku f) $f = (f_1, f_2) \colon [0,1] \to \overline{S}$ t.d. je $f_1(0) = 0$ i $f(\langle 0,1]) \subseteq S$.

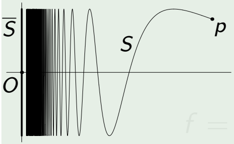
Za $n \in \mathbb{N}$ neka je $0 < u_n < f_1(\frac{1}{n})$ t.d. je $\sin \frac{1}{u_n} = (-1)^n$, i neka je $0 < t_n < \frac{1}{n}$ t.d. je $f_1(t_n) = u_n$, tj. $f(t_n) = (u_n, (-1)^n)$.

Kako je f_1 neprekidno, zbog $t_n \to 0$, niz $f(t_n)$ ima dva gomilišta: $(0,1)$ i $(0,-1)$, pa f nije neprekidno, tj. $\overline{S}$ ***nije*** putevima povezan.

Ali. . .

Ipak, za povezanost putevima ne vrijedi sve što vrijedi za povezanost. Specijalno, analogoni teorema 21.23 i korolara 21.24 ne vrijede, tj. zatvorenje putevima povezanog prostora ne mora biti putevima povezano.

Primjer 22.11 (Topološka sinusna krivulja nije putevima povezana)



Neka je $f = (f_1, f_2)\colon [0, 1] \to \overline{S}$ put od O do p i neka je $b := \max f_1^{-1}(0)$. Zamijenimo $[b, 1]$ s $[0, 1]$ i dobivamo (rabimo za put opet oznaku f)

$$f = (f_1, f_2)\colon [0, 1] \to \overline{S} \text{ t.d. je } f_1(0) = 0 \text{ i } f(\langle 0, 1]) \subseteq S.$$

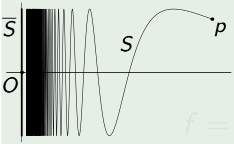
Za $n \in \mathbb{N}$ neka je $0 < u_n < f_1(\frac{1}{n})$ t.d. je $\sin \frac{1}{u_n} = (-1)^n$, i neka je $0 < t_n < \frac{1}{n}$ t.d. je $f_1(t_n) = u_n$, tj. $f(t_n) = (u_n, (-1)^n)$.

Kako je f_1 neprekidno, zbog $t_n \to 0$, niz $f(t_n)$ ima dva gomilišta: $(0, 1)$ i $(0, -1)$, pa f nije neprekidno, tj. $\overline{S}$ ***nije*** putevima povezan.

Ali. . .

Ipak, za povezanost putevima ne vrijedi sve što vrijedi za povezanost. Specijalno, analogoni teorema 21.23 i korolara 21.24 ne vrijede, tj. zatvorenje putevima povezanog prostora ne mora biti putevima povezano.

Primjer 22.11 (Topološka sinusna krivulja nije putevima povezana)

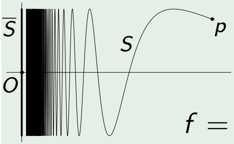


Neka je $f = (f_1, f_2)\colon [0,1] \to \overline{S}$ put od O do p i neka je $b := \max f_1^{-1}(0)$. Zamijenimo $[b,1]$ s $[0,1]$ i dobivamo (rabimo za put opet oznaku f) $f = (f_1, f_2)\colon [0,1] \to \overline{S}$ t.d. je $f_1(0) = 0$ i $f(\langle 0,1]) \subseteq S$.
Za $n \in \mathbb{N}$ neka je $0 < u_n < f_1(\frac{1}{n})$ t.d. je $\sin \frac{1}{u_n} = (-1)^n$, i neka je $0 < t_n < \frac{1}{n}$ t.d. je $f_1(t_n) = u_n$, tj. $f(t_n) = (u_n, (-1)^n)$.
Kako je f_1 neprekidno, zbog $t_n \to 0$, niz $f(t_n)$ ima dva gomilišta: $(0,1)$ i $(0,-1)$, pa f nije neprekidno, tj. $\overline{S}$ ***nije*** putevima povezan.

Ali. . .

Ipak, za povezanost putevima ne vrijedi sve što vrijedi za povezanost. Specijalno, analogoni teorema 21.23 i korolara 21.24 ne vrijede, tj. zatvorenje putevima povezanog prostora ne mora biti putevima povezano.

Primjer 22.11 (Topološka sinusna krivulja nije putevima povezana)



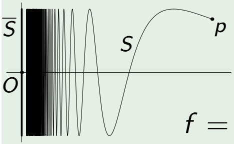
Neka je $f = (f_1, f_2)\colon [0,1] \to \overline{S}$ put od O do p i neka je $b := \max f_1^{-1}(0)$. Zamijenimo $[b,1]$ s $[0,1]$ i dobivamo (rabimo za put opet oznaku f) $f = (f_1, f_2)\colon [0,1] \to \overline{S}$ t.d. je $f_1(0) = 0$ i $f(\langle 0,1]) \subseteq S$.

Za $n \in \mathbb{N}$ neka je $0 < u_n < f_1(\frac{1}{n})$ t.d. je $\sin\frac{1}{u_n} = (-1)^n$, i neka je $0 < t_n < \frac{1}{n}$ t.d. je $f_1(t_n) = u_n$, tj. $f(t_n) = (u_n, (-1)^n)$.
Kako je f_1 neprekidno, zbog $t_n \to 0$, niz $f(t_n)$ ima dva gomilišta: $(0,1)$ i $(0,-1)$, pa f nije neprekidno, tj. $\overline{S}$ ***nije*** putevima povezan.

Ali. . .

Ipak, za povezanost putevima ne vrijedi sve što vrijedi za povezanost. Specijalno, analogoni teorema 21.23 i korolara 21.24 ne vrijede, tj. zatvorenje putevima povezanog prostora ne mora biti putevima povezano.

Primjer 22.11 (Topološka sinusna krivulja nije putevima povezana)



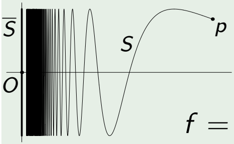
Neka je $f = (f_1, f_2)\colon [0,1] \to \overline{S}$ put od O do p i neka je $b := \max f_1^{-1}(0)$. Zamijenimo $[b,1]$ s $[0,1]$ i dobivamo (rabimo za put opet oznaku f) $f = (f_1, f_2)\colon [0,1] \to \overline{S}$ t.d. je $f_1(0) = 0$ i $f(\langle 0,1]) \subseteq S$.

Za $n \in \mathbb{N}$ neka je $0 < u_n < f_1(\frac{1}{n})$ t.d. je $\sin\frac{1}{u_n} = (-1)^n$, i neka je $0 < t_n < \frac{1}{n}$ t.d. je $f_1(t_n) = u_n$, tj. $f(t_n) = (u_n, (-1)^n)$.
Kako je f_1 neprekidno, zbog $t_n \to 0$, niz $f(t_n)$ ima dva gomilišta: $(0,1)$ i $(0,-1)$, pa f nije neprekidno, tj. $\overline{S}$ ***nije*** putevima povezan.

Ali. . .

Ipak, za povezanost putevima ne vrijedi sve što vrijedi za povezanost. Specijalno, analogoni teorema 21.23 i korolara 21.24 ne vrijede, tj. zatvorenje putevima povezanog prostora ne mora biti putevima povezano.

Primjer 22.11 (Topološka sinusna krivulja nije putevima povezana)

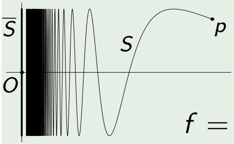


Neka je $f = (f_1, f_2)\colon [0,1] \to \overline{S}$ put od O do p i neka je $b := \max f_1^{-1}(0)$. Zamijenimo $[b, 1]$ s $[0, 1]$ i dobivamo (rabimo za put opet oznaku f) $f = (f_1, f_2)\colon [0,1] \to \overline{S}$ t.d. je $f_1(0) = 0$ i $f(\langle 0, 1]) \subseteq S$.
Za $n \in \mathbb{N}$ neka je $0 < u_n < f_1(\frac{1}{n})$ t.d. je $\sin \frac{1}{u_n} = (-1)^n$, i neka je $0 < t_n < \frac{1}{n}$ t.d. je $f_1(t_n) = u_n$, tj. $f(t_n) = (u_n, (-1)^n)$.
Kako je f_1 neprekidno, zbog $t_n \to 0$, niz $f(t_n)$ ima dva gomilišta: $(0, 1)$ i $(0, -1)$, pa f nije neprekidno, tj. $\overline{S}$ ***nije*** putevima povezan.

Ali. . .

Ipak, za povezanost putevima ne vrijedi sve što vrijedi za povezanost. Specijalno, analogoni teorema 21.23 i korolara 21.24 ne vrijede, tj. zatvorenje putevima povezanog prostora ne mora biti putevima povezano.

Primjer 22.11 (Topološka sinusna krivulja nije putevima povezana)



Neka je $f = (f_1, f_2)\colon [0,1] \to \overline{S}$ put od O do p i neka je $b := \max f_1^{-1}(0)$. Zamijenimo $[b,1]$ s $[0,1]$ i dobivamo (rabimo za put opet oznaku f) $f = (f_1, f_2)\colon [0,1] \to \overline{S}$ t.d. je $f_1(0) = 0$ i $f(\langle 0,1]) \subseteq S$.

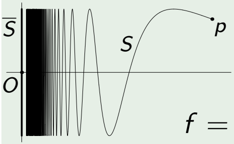
Za $n \in \mathbb{N}$ neka je $0 < u_n < f_1(\frac{1}{n})$ t.d. je $\sin \frac{1}{u_n} = (-1)^n$, i neka je $0 < t_n < \frac{1}{n}$ t.d. je $f_1(t_n) = u_n$, tj. $f(t_n) = (u_n, (-1)^n)$.

Kako je f_1 neprekidno, zbog $t_n \to 0$, niz $f(t_n)$ ima dva gomilišta: $(0,1)$ i $(0,-1)$, pa f nije neprekidno, tj. $\overline{S}$ ***nije*** putevima povezan.

Ali. . .

Ipak, za povezanost putevima ne vrijedi sve što vrijedi za povezanost. Specijalno, analogoni teorema 21.23 i korolara 21.24 ne vrijede, tj. zatvorenje putevima povezanog prostora ne mora biti putevima povezano.

Primjer 22.11 (Topološka sinusna krivulja nije putevima povezana)



Neka je $f = (f_1, f_2)\colon [0,1] \to \overline{S}$ put od O do p i neka je $b := \max f_1^{-1}(0)$. Zamijenimo $[b,1]$ s $[0,1]$ i dobivamo (rabimo za put opet oznaku f)

$f = (f_1, f_2)\colon [0,1] \to \overline{S}$ t.d. je $f_1(0) = 0$ i $f(\langle 0,1]) \subseteq S$.

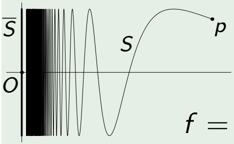
Za $n \in \mathbb{N}$ neka je $0 < u_n < f_1(\frac{1}{n})$ t.d. je $\sin \frac{1}{u_n} = (-1)^n$, i neka je $0 < t_n < \frac{1}{n}$ t.d. je $f_1(t_n) = u_n$, tj. $f(t_n) = (u_n, (-1)^n)$.

Kako je f_1 neprekidno, zbog $t_n \to 0$, niz $f(t_n)$ ima dva gomilišta: $(0,1)$ i $(0,-1)$, pa f nije neprekidno, tj. $\overline{S}$ ***nije*** putevima povezan.

Ali. . .

Ipak, za povezanost putevima ne vrijedi sve što vrijedi za povezanost. Specijalno, analogoni teorema 21.23 i korolara 21.24 ne vrijede, tj. zatvorenje putevima povezanog prostora ne mora biti putevima povezano.

Primjer 22.11 (Topološka sinusna krivulja nije putevima povezana)



Neka je $f=(f_1,f_2)\colon[0,1]\to\overline{S}$ put od O do p i neka je $b:=\max f_1^{-1}(0)$. Zamijenimo $[b,1]$ s $[0,1]$ i dobivamo (rabimo za put opet oznaku f) $f=(f_1,f_2)\colon[0,1]\to\overline{S}$ t.d. je $f_1(0)=0$ i $f(\langle 0,1])\subseteq S$.
Za $n\in\mathbb{N}$ neka je $0<u_n<f_1(\frac{1}{n})$ t.d. je $\sin\frac{1}{u_n}=(-1)^n$, i neka je $0<t_n<\frac{1}{n}$ t.d. je $f_1(t_n)=u_n$, tj. $f(t_n)=(u_n,(-1)^n)$.
Kako je f_1 neprekidno, zbog $t_n\to 0$, niz $f(t_n)$ ima dva gomilišta: $(0,1)$ i $(0,-1)$, pa f nije neprekidno, tj. $\overline{S}$ ***nije*** putevima povezan.

Povezanost *vs.* povezanost putevima

Teorem 22.12

Svaki putevima povezan prostor X je povezan.

Dokaz: Pretpostavimo da putevima povezan prostor X nije povezan. Onda postoji neprekidna surjekcija $f: X \to \{0,1\}$ na dvočlan skup s diskretnom topologijom (teorem 21.7). Odaberimo točke $x, y \in X$ takve da je $f(x) = 0$ i $f(y) = 1$ i neka je $g: [0,1] \to X$ put od x do y. Tada je kompozicija $f \circ g: [0,1] \to \{0,1\}$ neprekidna surjekcija, u suprotnosti s povezanošću segmenta $[0,1]$. $\square$

Povezanost *vs.* povezanost putevima

Teorem 22.12

Svaki putevima povezan prostor X je povezan.

Dokaz: Pretpostavimo da putevima povezan prostor X nije povezan. Onda postoji neprekidna surjekcija $f\colon X \to \{0,1\}$ na dvočlan skup s diskretnom topologijom (teorem 21.7). Odaberimo točke $x, y \in X$ takve da je $f(x) = 0$ i $f(y) = 1$ i neka je $g\colon [0,1] \to X$ put od x do y. Tada je kompozicija $f \circ g\colon [0,1] \to \{0,1\}$ neprekidna surjekcija, u suprotnosti s povezanošću segmenta $[0,1]$. $\square$

Povezanost *vs.* povezanost putevima

Teorem 22.12

Svaki putevima povezan prostor X je povezan.

Dokaz: Pretpostavimo da putevima povezan prostor X nije povezan. Onda postoji neprekidna surjekcija $f\colon X \to \{0,1\}$ na dvočlan skup s diskretnom topologijom (teorem 21.7). Odaberimo točke $x, y \in X$ takve da je $f(x) = 0$ i $f(y) = 1$ i neka je $g\colon [0,1] \to X$ put od x do y. Tada je kompozicija $f \circ g\colon [0,1] \to \{0,1\}$ neprekidna surjekcija, u suprotnosti s povezanošću segmenta $[0,1]$. $\square$

Povezanost otvorenih skupova u $\mathbb{E}^n$

Sretna je okolnost da se za ***otvorene*** skupove u $\mathbb{E}^n$ povezanost i povezanost putevima podudaraju:

Teorem 22.13

Otvoren skup $U \subseteq \mathbb{E}^n$ je povezan ako i samo ako je putevima povezan.

Dokaz: $\Leftarrow$ Ova implikacija je dokazana prethodnim teoremom 22.12.

$\Rightarrow$ Neka je $a \in U$ i neka je $A \subseteq U$ skup točaka koje se unutar U mogu spojiti putem s točkom a. Pokažimo da je skup A otvoren.

Neka je $x \in A$. Tada je $K(x;\varepsilon) \subseteq U$ za neki $\varepsilon > 0$. Svaka točka $y \in K(x;\varepsilon)$ može se unutar $K(x;\varepsilon)$ spojiti segmentom s x, a kako se x može spojiti putem s točkom a, to u U postoji put od a do y. Dakle $K(x;\varepsilon) \subseteq A$, tj. A je otvoren.

Slično se pokaže da je i skup $B = U \setminus A$ otvoren. Naime, za $x \in B$ je $K(x;\varepsilon) \subseteq U$ za neki $\varepsilon > 0$, pa kada bi se neka točka iz te kugle mogla spojiti putem s a, onda bi se mogao spojiti i x, pa bi bio $x \in A$. Tako dobivamo separaciju $U = A \sqcup B$, protivno povezanosti od U. $\square$

Povezanost otvorenih skupova u $\mathbb{E}^n$

Sretna je okolnost da se za ***otvorene*** skupove u $\mathbb{E}^n$ povezanost i povezanost putevima podudaraju:

Teorem 22.13

Otvoren skup $U \subseteq \mathbb{E}^n$ je povezan ako i samo ako je putevima povezan.

Dokaz: $\Leftarrow$ Ova implikacija je dokazana prethodnim teoremom 22.12.

$\Rightarrow$ Neka je $a \in U$ i neka je $A \subseteq U$ skup točaka koje se unutar U mogu spojiti putem s točkom a. Pokažimo da je skup A otvoren.
Neka je $x \in A$. Tada je $K(x;\varepsilon) \subseteq U$ za neki $\varepsilon > 0$. Svaka točka $y \in K(x;\varepsilon)$ može se unutar $K(x;\varepsilon)$ spojiti segmentom s x, a kako se x može spojiti putem s točkom a, to u U postoji put od a do y.
Dakle $K(x;\varepsilon) \subseteq A$, tj. A je otvoren.

Slično se pokaže da je i skup $B = U \setminus A$ otvoren. Naime, za $x \in B$ je $K(x;\varepsilon) \subseteq U$ za neki $\varepsilon > 0$, pa kada bi se neka točka iz te kugle mogla spojiti putem s a, onda bi se mogao spojiti i x, pa bi bio $x \in A$.
Tako dobivamo separaciju $U = A \sqcup B$, protivno povezanosti od U. $\square$

Povezanost otvorenih skupova u $\mathbb{E}^n$

Sretna je okolnost da se za ***otvorene*** skupove u $\mathbb{E}^n$ povezanost i povezanost putevima podudaraju:

Teorem 22.13

Otvoren skup $U \subseteq \mathbb{E}^n$ je povezan ako i samo ako je putevima povezan.

Dokaz: $\boxed{\Leftarrow}$ Ova implikacija je dokazana prethodnim teoremom 22.12.

$\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $a \in U$ i neka je $A \subseteq U$ skup točaka koje se unutar U mogu spojiti putem s točkom a. Pokažimo da je skup A otvoren.

Neka je $x \in A$. Tada je $K(x;\varepsilon) \subseteq U$ za neki $\varepsilon > 0$. Svaka točka $y \in K(x;\varepsilon)$ može se unutar $K(x;\varepsilon)$ spojiti segmentom s x, a kako se x može spojiti putem s točkom a, to u U postoji put od a do y. Dakle $K(x;\varepsilon) \subseteq A$, tj. A je otvoren.

Slično se pokaže da je i skup $B = U \setminus A$ otvoren. Naime, za $x \in B$ je $K(x;\varepsilon) \subseteq U$ za neki $\varepsilon > 0$, pa kada bi se neka točka iz te kugle mogla spojiti putem s a, onda bi se mogao spojiti i x, pa bi bio $x \in A$. Tako dobivamo separaciju $U = A \sqcup B$, protivno povezanosti od U. $\square$

Povezanost otvorenih skupova u $\mathbb{E}^n$

Sretna je okolnost da se za ***otvorene*** skupove u $\mathbb{E}^n$ povezanost i povezanost putevima podudaraju:

Teorem 22.13

Otvoren skup $U \subseteq \mathbb{E}^n$ je povezan ako i samo ako je putevima povezan.

Dokaz: $\Leftarrow$ Ova implikacija je dokazana prethodnim teoremom 22.12.

$\Rightarrow$ Neka je $a \in U$ i neka je $A \subseteq U$ skup točaka koje se unutar U mogu spojiti putem s točkom a. Pokažimo da je skup A otvoren.
Neka je $x \in A$. Tada je $K(x;\varepsilon) \subseteq U$ za neki $\varepsilon > 0$. Svaka točka $y \in K(x;\varepsilon)$ može se unutar $K(x;\varepsilon)$ spojiti segmentom s x, a kako se x može spojiti putem s točkom a, to u U postoji put od a do y.
Dakle $K(x;\varepsilon) \subseteq A$, tj. A je otvoren.

Slično se pokaže da je i skup $B = U \setminus A$ otvoren. Naime, za $x \in B$ je $K(x;\varepsilon) \subseteq U$ za neki $\varepsilon > 0$, pa kada bi se neka točka iz te kugle mogla spojiti putem s a, onda bi se mogao spojiti i x, pa bi bio $x \in A$.
Tako dobivamo separaciju $U = A \sqcup B$, protivno povezanosti od U. $\square$

Povezanost otvorenih skupova u $\mathbb{E}^n$

Sretna je okolnost da se za ***otvorene*** skupove u $\mathbb{E}^n$ povezanost i povezanost putevima podudaraju:

Teorem 22.13

Otvoren skup $U \subseteq \mathbb{E}^n$ je povezan ako i samo ako je putevima povezan.

Dokaz: $\Leftarrow$ Ova implikacija je dokazana prethodnim teoremom 22.12.

$\Rightarrow$ Neka je $a \in U$ i neka je $A \subseteq U$ skup točaka koje se unutar U mogu spojiti putem s točkom a. Pokažimo da je skup A otvoren.
Neka je $x \in A$. Tada je $K(x;\varepsilon) \subseteq U$ za neki $\varepsilon > 0$. Svaka točka $y \in K(x;\varepsilon)$ može se unutar $K(x;\varepsilon)$ spojiti segmentom s x, a kako se x može spojiti putem s točkom a, to u U postoji put od a do y. Dakle $K(x;\varepsilon) \subseteq A$, tj. A je otvoren.

Slično se pokaže da je i skup $B = U \setminus A$ otvoren. Naime, za $x \in B$ je $K(x;\varepsilon) \subseteq U$ za neki $\varepsilon > 0$, pa kada bi se neka točka iz te kugle mogla spojiti putem s a, onda bi se mogao spojiti i x, pa bi bio $x \in A$.

Tako dobivamo separaciju $U = A \sqcup B$, protivno povezanosti od U.

Povezanost otvorenih skupova u $\mathbb{E}^n$

Sretna je okolnost da se za ***otvorene*** skupove u $\mathbb{E}^n$ povezanost i povezanost putevima podudaraju:

Teorem 22.13

Otvoren skup $U \subseteq \mathbb{E}^n$ je povezan ako i samo ako je putevima povezan.

Dokaz: $\Leftarrow$ Ova implikacija je dokazana prethodnim teoremom 22.12.

$\Rightarrow$ Neka je $a \in U$ i neka je $A \subseteq U$ skup točaka koje se unutar U mogu spojiti putem s točkom a. Pokažimo da je skup A otvoren.
Neka je $x \in A$. Tada je $K(x;\varepsilon) \subseteq U$ za neki $\varepsilon > 0$. Svaka točka $y \in K(x;\varepsilon)$ može se unutar $K(x;\varepsilon)$ spojiti segmentom s x, a kako se x može spojiti putem s točkom a, to u U postoji put od a do y. Dakle $K(x;\varepsilon) \subseteq A$, tj. A je otvoren.

Slično se pokaže da je i skup $B = U \setminus A$ otvoren. Naime, za $x \in B$ je $K(x;\varepsilon) \subseteq U$ za neki $\varepsilon > 0$, pa kada bi se neka točka iz te kugle mogla spojiti putem s a, onda bi se mogao spojiti i x, pa bi bio $x \in A$. Tako dobivamo separaciju $U = A \sqcup B$, protivno povezanosti od U. $\square$

Komponente povezanosti

Prostor koji nije povezan sastoji se od „više komada”. Točnije,

Definicija 23.1

Neka je X topološki prostor. Definirajmo na X relaciju $\div$ tako da je $x \div y$ ako postoji povezan podskup koji sadrži x i y. Lako se vidi da je $\div$ relacija ekvivalencije. Klase ekvivalencije nazivaju se *komponente povezanosti*, ili jednostavno *komponente* prostora X.

Primjer 23.2

Komponente povezanosti

Prostor koji nije povezan sastoji se od „više komada". Točnije,

Definicija 23.1

Neka je X topološki prostor. Definirajmo na X relaciju $\div$ tako da je $x \div y$ ako postoji povezan podskup koji sadrži x i y. Lako se vidi da je $\div$ relacija ekvivalencije. Klase ekvivalencije nazivaju se *komponente povezanosti*, ili jednostavno *komponente* prostora X.

Primjer 23.2

- Komponente od $[0, 1] \cup [2, 3]$ su $[0, 1]$ i $[2, 3]$.
- Komponente od $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ su intervali $\langle n, n+1 \rangle$, $n \in \mathbb{Z}$.
- Komponente od $\mathbb{Q}$ su jednočlani skupovi.

Komponente povezanosti

Prostor koji nije povezan sastoji se od „više komada". Točnije,

Definicija 23.1

Neka je X topološki prostor. Definirajmo na X relaciju $\div$ tako da je $x \div y$ ako postoji povezan podskup koji sadrži x i y. Lako se vidi da je $\div$ relacija ekvivalencije. Klase ekvivalencije nazivaju se *komponente povezanosti*, ili jednostavno *komponente* prostora X.

Primjer 23.2

- Komponente od $[0,1] \cup [2,3]$ su $[0,1]$ i $[2,3]$.
- Komponente od $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ su intervali $\langle n, n+1 \rangle$, $n \in \mathbb{Z}$.
- Komponente od $\mathbb{Q}$ su jednočlani skupovi.

Komponente povezanosti

Prostor koji nije povezan sastoji se od „više komada”. Točnije,

Definicija 23.1

Neka je X topološki prostor. Definirajmo na X relaciju $\div$ tako da je $x \div y$ ako postoji povezan podskup koji sadrži x i y. Lako se vidi da je $\div$ relacija ekvivalencije. Klase ekvivalencije nazivaju se *komponente povezanosti*, ili jednostavno *komponente* prostora X.

Primjer 23.2

- Komponente od $[0, 1] \cup [2, 3]$ su $[0, 1]$ i $[2, 3]$.
- Komponente od $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ su intervali $\langle n, n + 1\rangle$, $n \in \mathbb{Z}$.
- Komponente od $\mathbb{Q}$ su jednočlani skupovi.

Maksimalnost komponenata

Komponente su maksimalni povezani potprostori. Točnije:

Propozicija 23.3

Komponenta točke $x \in X$ je maksimalan, u smislu inkluzije, povezan potprostor od X koji sadrži točku x.

Dakle, komponente su maksimalni povezani potprostori od X.

Dokaz: Neka je C_x komponenta povezanosti koja sadrži točku x.
Za svaki $y \in C_x$ postoji povezan potprostor A_y t.d. su $x, y \in A_y$, pa je, prema korolaru 21.20, $\bigcup_{y \in C_x} A_y = C_x$ povezan potprostor.

S druge strane, ako je A povezan potprostor koji sadrži točku x, onda za svaki $y \in A$ vrijedi $y \div x$, pa je $y \in C_x$, tj. $A \subseteq C_x$. $\square$

Maksimalnost komponenata

Komponente su maksimalni povezani potprostori. Točnije:

Propozicija 23.3

Komponenta točke $x \in X$ je maksimalan, u smislu inkluzije, povezan potprostor od X koji sadrži točku x.

Dakle, komponente su maksimalni povezani potprostori od X.

Dokaz: Neka je C_x komponenta povezanosti koja sadrži točku x.
Za svaki $y \in C_x$ postoji povezan potprostor A_y t.d. su $x, y \in A_y$, pa je, prema korolaru 21.20, $\bigcup_{y \in C_x} A_y = C_x$ povezan potprostor.

S druge strane, ako je A povezan potprostor koji sadrži točku x, onda za svaki $y \in A$ vrijedi $y \div x$, pa je $y \in C_x$, tj. $A \subseteq C_x$. $\square$

Maksimalnost komponenata

Komponente su maksimalni povezani potprostori. Točnije:

Propozicija 23.3

Komponenta točke $x \in X$ je maksimalan, u smislu inkluzije, povezan potprostor od X koji sadrži točku x.

Dakle, komponente su maksimalni povezani potprostori od X.

Dokaz: Neka je C_x komponenta povezanosti koja sadrži točku x.
Za svaki $y \in C_x$ postoji povezan potprostor A_y t.d. su $x, y \in A_y$, pa je, prema korolaru 21.20, $\bigcup\limits_{y \in C_x} A_y = C_x$ povezan potprostor.

S druge strane, ako je A povezan potprostor koji sadrži točku x, onda za svaki $y \in A$ vrijedi $y \div x$, pa je $y \in C_x$, tj. $A \subseteq C_x$. $\square$

Maksimalnost komponenata

Komponente su maksimalni povezani potprostori. Točnije:

Propozicija 23.3

Komponenta točke $x \in X$ je maksimalan, u smislu inkluzije, povezan potprostor od X koji sadrži točku x.

Dakle, komponente su maksimalni povezani potprostori od X.

Dokaz: Neka je C_x komponenta povezanosti koja sadrži točku x.
Za svaki $y \in C_x$ postoji povezan potprostor A_y t.d. su $x, y \in A_y$, pa je, prema korolaru 21.20, $\bigcup_{y \in C_x} A_y = C_x$ povezan potprostor.

S druge strane, ako je A povezan potprostor koji sadrži točku x, onda za svaki $y \in A$ vrijedi $y \div x$, pa je $y \in C_x$, tj. $A \subseteq C_x$. $\square$

Maksimalnost komponenata

Komponente su maksimalni povezani potprostori. Točnije:

Propozicija 23.3

Komponenta točke $x \in X$ je maksimalan, u smislu inkluzije, povezan potprostor od X koji sadrži točku x.

Dakle, komponente su maksimalni povezani potprostori od X.

Dokaz: Neka je C_x komponenta povezanosti koja sadrži točku x.
Za svaki $y \in C_x$ postoji povezan potprostor A_y t.d. su $x, y \in A_y$, pa je, prema korolaru 21.20, $\bigcup_{y \in C_x} A_y = C_x$ povezan potprostor.
S druge strane, ako je A povezan potprostor koji sadrži točku x, onda za svaki $y \in A$ vrijedi $y \div x$, pa je $y \in C_x$, tj. $A \subseteq C_x$. $\square$

Zatvorenost komponenata

Posljedica 23.4

Sve komponente povezanosti su zatvoreni potprostori.

Dokaz: Neka je $C \subseteq X$ neka komponenta. Prema prethodnoj propoziciji 23.3 je C povezan potprostor, pa je, prema korolaru 21.24, i zatvorenje $\overline{C}$ povezan potprostor. Kako je $C \subseteq \overline{C}$, zbog maksimalnosti je $C = \overline{C}$, tj. C je zatvoren potprostor. $\square$

Definicija 23.5

Za topološki prostor s barem dvije točke, čije su sve komponente jednočlani skupovi kaže se da je *totalno nepovezan*.

Napomena 23.6

Svaki diskretan prostor je totalno nepovezan, ali obratno ne vrijedi. Naprimjer, $\mathbb{Q}$ je totalno nepovezan iako nije diskretan.

Zatvorenost komponenata

Posljedica 23.4

Sve komponente povezanosti su zatvoreni potprostori.

Dokaz: Neka je $C \subseteq X$ neka komponenta. Prema prethodnoj propoziciji 23.3 je C povezan potprostor, pa je, prema korolaru 21.24, i zatvorenje $\overline{C}$ povezan potprostor. Kako je $C \subseteq \overline{C}$, zbog maksimalnosti je $C = \overline{C}$, tj. C je zatvoren potprostor. □

Definicija 23.5

Za topološki prostor s barem dvije točke, čije su sve komponente jednočlani skupovi kaže se da je *totalno nepovezan*.

Napomena 23.6

Svaki diskretan prostor je totalno nepovezan, ali obratno ne vrijedi. Naprimjer, $\mathbb{Q}$ je totalno nepovezan iako nije diskretan.

Zatvorenost komponenenata

Posljedica 23.4

Sve komponente povezanosti su zatvoreni potprostori.

Dokaz: Neka je $C \subseteq X$ neka komponenta. Prema prethodnoj propoziciji 23.3 je C povezan potprostor, pa je, prema korolaru 21.24, i zatvorenje $\overline{C}$ povezan potprostor. Kako je $C \subseteq \overline{C}$, zbog maksimalnosti je $C = \overline{C}$, tj. C je zatvoren potprostor. $\square$

Definicija 23.5

Za topološki prostor s barem dvije točke, čije su sve komponente jednočlani skupovi kaže se da je *totalno nepovezan*.

Napomena 23.6

Svaki diskretan prostor je totalno nepovezan, ali obratno ne vrijedi. Naprimjer, $\mathbb{Q}$ je totalno nepovezan iako nije diskretan.

Zatvorenost komponenata

Posljedica 23.4

Sve komponente povezanosti su zatvoreni potprostori.

Dokaz: Neka je $C \subseteq X$ neka komponenta. Prema prethodnoj propoziciji 23.3 je C povezan potprostor, pa je, prema korolaru 21.24, i zatvorenje $\overline{C}$ povezan potprostor. Kako je $C \subseteq \overline{C}$, zbog maksimalnosti je $C = \overline{C}$, tj. C je zatvoren potprostor. □

Definicija 23.5

Za topološki prostor s barem dvije točke, čije su sve komponente jednočlani skupovi kaže se da je *totalno nepovezan*.

Napomena 23.6

Svaki diskretan prostor je totalno nepovezan, ali obratno ne vrijedi. Naprimjer, $\mathbb{Q}$ je totalno nepovezan iako nije diskretan.

Zatvorenost komponenata

Posljedica 23.4

Sve komponente povezanosti su zatvoreni potprostori.

Dokaz: Neka je $C \subseteq X$ neka komponenta. Prema prethodnoj propoziciji 23.3 je C povezan potprostor, pa je, prema korolaru 21.24, i zatvorenje $\overline{C}$ povezan potprostor. Kako je $C \subseteq \overline{C}$, zbog maksimalnosti je $C = \overline{C}$, tj. C je zatvoren potprostor. $\square$

Definicija 23.5

Za topološki prostor s barem dvije točke, čije su sve komponente jednočlani skupovi kaže se da je *totalno nepovezan*.

Napomena 23.6

Svaki diskretan prostor je totalno nepovezan, ali obratno ne vrijedi. Naprimjer, $\mathbb{Q}$ je totalno nepovezan iako nije diskretan.

Preslikavanje komponenata

Označimo s $\mathcal{K}(X)$ skup komponenata prostora X, dakle kvocijentni skup $X/\div$. Neprekidno preslikavanje $f\colon X \to Y$ inducira (skupovnu) funkciju $f_*\colon \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(Y)$ tako da je $f_*([x]) := [f(x)]$, gdje je s $[x]$ označena komponenta određena točkom x.

Propozicija 23.7

(a) *Ako su $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$ neprekidna preslikavanja onda je $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*\colon \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(Z)$.*

(b) *Ako je $\mathbb{1}_X\colon X \to X$ identiteta na X onda je $(\mathbb{1}_X)_* = \mathbb{1}_{\mathcal{K}(X)}\colon \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X)$ identiteta na skupu komponenata.*

Posljedica 23.8

Ako je $f\colon X \to Y$ homeomorfizam onda je $f_*\colon \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(Y)$ bijekcija.

Preslikavanje komponenata

Označimo s $\mathcal{K}(X)$ skup komponenenata prostora X, dakle kvocijentni skup $X/\div$. Neprekidno preslikavanje $f\colon X \to Y$ inducira (skupovnu) funkciju $f_*\colon \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(Y)$ tako da je $f_*([x]) := [f(x)]$, gdje je s $[x]$ označena komponenta određena točkom x.

Propozicija 23.7

(a) *Ako su $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$ neprekidna preslikavanja onda je $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*\colon \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(Z)$.*

(b) *Ako je $\mathbb{1}_X\colon X \to X$ identiteta na X onda je $(\mathbb{1}_X)_* = \mathbb{1}_{\mathcal{K}(X)}\colon \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X)$ identiteta na skupu komponenata.*

Posljedica 23.8

Ako je $f\colon X \to Y$ homeomorfizam onda je $f_*\colon \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(Y)$ bijekcija.

Preslikavanje komponenata

Označimo s $\mathcal{K}(X)$ skup komponenata prostora X, dakle kvocijentni skup $X/\div$. Neprekidno preslikavanje $f\colon X \to Y$ inducira (skupovnu) funkciju $f_*\colon \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(Y)$ tako da je $f_*([x]) := [f(x)]$, gdje je s $[x]$ označena komponenta određena točkom x.

Propozicija 23.7

(a) *Ako su $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$ neprekidna preslikavanja onda je $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*\colon \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(Z)$.*

(b) *Ako je $\mathbb{1}_X\colon X \to X$ identiteta na X onda je $(\mathbb{1}_X)_* = \mathbb{1}_{\mathcal{K}(X)}\colon \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X)$ identiteta na skupu komponenata.*

Posljedica 23.8

Ako je $f\colon X \to Y$ homeomorfizam onda je $f_*\colon \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(Y)$ bijekcija.

Preslikavanje komponenata

Označimo s $\mathcal{K}(X)$ skup komponenata prostora X, dakle kvocijentni skup $X/\div$. Neprekidno preslikavanje $f\colon X \to Y$ inducira (skupovnu) funkciju $f_*\colon \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(Y)$ tako da je $f_*([x]) := [f(x)]$, gdje je s $[x]$ označena komponenta određena točkom x.

Propozicija 23.7

(a) *Ako su $f\colon X \to Y$ i $g\colon Y \to Z$ neprekidna preslikavanja onda je $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*\colon \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(Z)$.*

(b) *Ako je $\mathbb{1}_X\colon X \to X$ identiteta na X onda je $(\mathbb{1}_X)_* = \mathbb{1}_{\mathcal{K}(X)}\colon \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X)$ identiteta na skupu komponenata.*

Posljedica 23.8

Ako je $f\colon X \to Y$ homeomorfizam onda je $f_*\colon \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(Y)$ bijekcija.

Lokalna povezanost

Definicija 23.9

Topološki prostor X je *lokalno povezan* ako za svaku točku $x \in X$ i okolinu $U \ni x$ postoji povezana okolina $V \ni x$ takva da je $V \subseteq U$.

Primjer 23.10

Lokalna povezanost

Definicija 23.9

Topološki prostor X je *lokalno povezan* ako za svaku točku $x \in X$ i okolinu $U \ni x$ postoji povezana okolina $V \ni x$ takva da je $V \subseteq U$.

Primjer 23.10

- Intervali su lokalno povezani.
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{E}^n$, $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{E}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ su lokalno povezani.
- $[0,1\rangle \cup \langle 1,2] \subseteq \mathbb{R}$ je lokalno povezan ali nije povezan.
- $\mathbb{Q}$ nije povezan niti lokalno povezan.
- $\mathbb{N}$ nije povezan ali *je* lokalno povezan.
- Topološka sinusna krivulja $\overline{S}$ *nije* lokalno povezana iako je povezana (primjer 21.25).

Lokalna povezanost

Definicija 23.9

Topološki prostor X je *lokalno povezan* ako za svaku točku $x \in X$ i okolinu $U \ni x$ postoji povezana okolina $V \ni x$ takva da je $V \subseteq U$.

Primjer 23.10

- Intervali su lokalno povezani.
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{E}^n$, $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{E}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ su lokalno povezani.
- $[0,1\rangle \cup \langle 1,2] \subseteq \mathbb{R}$ je lokalno povezan ali nije povezan.
- $\mathbb{Q}$ nije povezan niti lokalno povezan.
- $\mathbb{N}$ nije povezan ali *je* lokalno povezan.
- Topološka sinusna krivulja $\overline{S}$ *nije* lokalno povezana iako je povezana (primjer 21.25).

Lokalna povezanost

Definicija 23.9

Topološki prostor X je *lokalno povezan* ako za svaku točku $x \in X$ i okolinu $U \ni x$ postoji povezana okolina $V \ni x$ takva da je $V \subseteq U$.

Primjer 23.10

- Intervali su lokalno povezani.
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{E}^n$, $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{E}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ su lokalno povezani.
- $[0, 1\rangle \cup \langle 1, 2] \subseteq \mathbb{R}$ je lokalno povezan ali nije povezan.
- $\mathbb{Q}$ nije povezan niti lokalno povezan.
- $\mathbb{N}$ nije povezan ali *je* lokalno povezan.
- Topološka sinusna krivulja $\overline{S}$ *nije* lokalno povezana iako je povezana (primjer 21.25).

Lokalna povezanost

Definicija 23.9

Topološki prostor X je *lokalno povezan* ako za svaku točku $x \in X$ i okolinu $U \ni x$ postoji povezana okolina $V \ni x$ takva da je $V \subseteq U$.

Primjer 23.10

- Intervali su lokalno povezani.
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{E}^n$, $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{E}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ su lokalno povezani.
- $[0,1\rangle \cup \langle 1,2] \subseteq \mathbb{R}$ je lokalno povezan ali nije povezan.
- $\mathbb{Q}$ nije povezan niti lokalno povezan.
- $\mathbb{N}$ nije povezan ali *je* lokalno povezan.
- Topološka sinusna krivulja $\overline{S}$ *nije* lokalno povezana iako je povezana (primjer 21.25).

Lokalna povezanost

Definicija 23.9

Topološki prostor X je *lokalno povezan* ako za svaku točku $x \in X$ i okolinu $U \ni x$ postoji povezana okolina $V \ni x$ takva da je $V \subseteq U$.

Primjer 23.10

- Intervali su lokalno povezani.
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{E}^n$, $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{E}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ su lokalno povezani.
- $[0,1\rangle \cup \langle 1,2] \subseteq \mathbb{R}$ je lokalno povezan ali nije povezan.
- $\mathbb{Q}$ nije povezan niti lokalno povezan.
- $\mathbb{N}$ nije povezan ali *je* lokalno povezan.
- Topološka sinusna krivulja $\overline{S}$ *nije* lokalno povezana iako je povezana (primjer 21.25).

Lokalna povezanost

Definicija 23.9

Topološki prostor X je *lokalno povezan* ako za svaku točku $x \in X$ i okolinu $U \ni x$ postoji povezana okolina $V \ni x$ takva da je $V \subseteq U$.

Primjer 23.10

- Intervali su lokalno povezani.
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{E}^n$, $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{E}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ su lokalno povezani.
- $[0,1\rangle \cup \langle 1,2] \subseteq \mathbb{R}$ je lokalno povezan ali nije povezan.
- $\mathbb{Q}$ nije povezan niti lokalno povezan.
- $\mathbb{N}$ nije povezan ali *je* lokalno povezan.
- Topološka sinusna krivulja $\overline{S}$ *nije* lokalno povezana iako je povezana (primjer 21.25).

Komponente u lokalno povezanom prostoru

Komponente su uvijek zatvoreni skupovi (korolar 23.4), ali općenito nisu otvoreni (npr. komponente od $\mathbb{Q}$ su jednočlani skupovi, i nisu otvoreni). Ali u lokalno povezanim prostorima situacija je bolja:

Teorem 23.11

Topološki prostor X je lokalno povezan ako i samo ako su komponente svakog otvorenog skupa otvoreni skupovi u X.

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka je X lokalno povezan, $U \subseteq X$ otvoren i C komponenta od U. Za $x \in C$ neka je V povezana okolina t.d. je $x \in V \subseteq U$. Zbog povezanosti je $V \subseteq C$ pa je C otvoren u X. $\triangle$

$\Leftarrow$ Neka su komponente otvorene. Za okolinu $U \ni x$ neka je C komponenta od U koja sadrži x. Skup C je otvoren, povezan i sadržan je u U pa je X lokalno povezan. $\square$

Posljedica 23.12

Sve komponente u lokalno povezanom prostoru su otvoreni skupovi.

Komponente u lokalno povezanom prostoru

Komponente su uvijek zatvoreni skupovi (korolar 23.4), ali općenito nisu otvoreni (npr. komponente od $\mathbb{Q}$ su jednočlani skupovi, i nisu otvoreni). Ali u lokalno povezanim prostorima situacija je bolja:

Teorem 23.11

Topološki prostor X je lokalno povezan ako i samo ako su komponente svakog otvorenog skupa otvoreni skupovi u X.

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka je X lokalno povezan, $U \subseteq X$ otvoren i C komponenta od U. Za $x \in C$ neka je V povezana okolina t.d. je $x \in V \subseteq U$. Zbog povezanosti je $V \subseteq C$ pa je C otvoren u X. $\triangle$

$\Leftarrow$ Neka su komponente otvorene. Za okolinu $U \ni x$ neka je C komponenta od U koja sadrži x. Skup C je otvoren, povezan i sadržan je u U pa je X lokalno povezan. $\square$

Posljedica 23.12

Sve komponente u lokalno povezanom prostoru su otvoreni skupovi.

Komponente u lokalno povezanom prostoru

Komponente su uvijek zatvoreni skupovi (korolar 23.4), ali općenito nisu otvoreni (npr. komponente od $\mathbb{Q}$ su jednočlani skupovi, i nisu otvoreni). Ali u lokalno povezanim prostorima situacija je bolja:

Teorem 23.11

Topološki prostor X je lokalno povezan ako i samo ako su komponente svakog otvorenog skupa otvoreni skupovi u X.

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka je X lokalno povezan, $U \subseteq X$ otvoren i C komponenta od U. Za $x \in C$ neka je V povezana okolina t.d. je $x \in V \subseteq U$. Zbog povezanosti je $V \subseteq C$ pa je C otvoren u X. $\triangle$

$\Leftarrow$ Neka su komponente otvorene. Za okolinu $U \ni x$ neka je C komponenta od U koja sadrži x. Skup C je otvoren, povezan i sadržan je u U pa je X lokalno povezan. $\square$

Posljedica 23.12

Sve komponente u lokalno povezanom prostoru su otvoreni skupovi.

Komponente u lokalno povezanom prostoru

Komponente su uvijek zatvoreni skupovi (korolar 23.4), ali općenito nisu otvoreni (npr. komponente od $\mathbb{Q}$ su jednočlani skupovi, i nisu otvoreni). Ali u lokalno povezanim prostorima situacija je bolja:

Teorem 23.11

Topološki prostor X je lokalno povezan ako i samo ako su komponente svakog otvorenog skupa otvoreni skupovi u X.

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je X lokalno povezan, $U \subseteq X$ otvoren i C komponenta od U. Za $x \in C$ neka je V povezana okolina t.d. je $x \in V \subseteq U$. Zbog povezanosti je $V \subseteq C$ pa je C otvoren u X. $\triangle$

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka su komponente otvorene. Za okolinu $U \ni x$ neka je C komponenta od U koja sadrži x. Skup C je otvoren, povezan i sadržan je u U pa je X lokalno povezan. $\square$

Posljedica 23.12

Sve komponente u lokalno povezanom prostoru su otvoreni skupovi.

Komponente u lokalno povezanom prostoru

Komponente su uvijek zatvoreni skupovi (korolar 23.4), ali općenito nisu otvoreni (npr. komponente od $\mathbb{Q}$ su jednočlani skupovi, i nisu otvoreni). Ali u lokalno povezanim prostorima situacija je bolja:

Teorem 23.11

Topološki prostor X je lokalno povezan ako i samo ako su komponente svakog otvorenog skupa otvoreni skupovi u X.

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je X lokalno povezan, $U \subseteq X$ otvoren i C komponenta od U. Za $x \in C$ neka je V povezana okolina t.d. je $x \in V \subseteq U$. Zbog povezanosti je $V \subseteq C$ pa je C otvoren u X. $\triangle$

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka su komponente otvorene. Za okolinu $U \ni x$ neka je C komponenta od U koja sadrži x. Skup C je otvoren, povezan i sadržan je u U pa je X lokalno povezan. $\square$

Posljedica 23.12

Sve komponente u lokalno povezanom prostoru su otvoreni skupovi.

Komponente u lokalno povezanom prostoru

Komponente su uvijek zatvoreni skupovi (korolar 23.4), ali općenito nisu otvoreni (npr. komponente od $\mathbb{Q}$ su jednočlani skupovi, i nisu otvoreni). Ali u lokalno povezanim prostorima situacija je bolja:

Teorem 23.11

Topološki prostor X je lokalno povezan ako i samo ako su komponente svakog otvorenog skupa otvoreni skupovi u X.

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka je X lokalno povezan, $U \subseteq X$ otvoren i C komponenta od U. Za $x \in C$ neka je V povezana okolina t.d. je $x \in V \subseteq U$. Zbog povezanosti je $V \subseteq C$ pa je C otvoren u X. $\triangle$

$\Leftarrow$ Neka su komponente otvorene. Za okolinu $U \ni x$ neka je C komponenta od U koja sadrži x. Skup C je otvoren, povezan i sadržan je u U pa je X lokalno povezan. $\square$

Posljedica 23.12

Sve komponente u lokalno povezanom prostoru su otvoreni skupovi.

Komponente u lokalno povezanom prostoru

Komponente su uvijek zatvoreni skupovi (korolar 23.4), ali općenito nisu otvoreni (npr. komponente od $\mathbb{Q}$ su jednočlani skupovi, i nisu otvoreni). Ali u lokalno povezanim prostorima situacija je bolja:

Teorem 23.11

Topološki prostor X je lokalno povezan ako i samo ako su komponente svakog otvorenog skupa otvoreni skupovi u X.

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je X lokalno povezan, $U \subseteq X$ otvoren i C komponenta od U. Za $x \in C$ neka je V povezana okolina t.d. je $x \in V \subseteq U$. Zbog povezanosti je $V \subseteq C$ pa je C otvoren u X. $\triangle$

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka su komponente otvorene. Za okolinu $U \ni x$ neka je C komponenta od U koja sadrži x. Skup C je otvoren, povezan i sadržan je u U pa je X lokalno povezan. $\square$

Posljedica 23.12

Sve komponente u lokalno povezanom prostoru su otvoreni skupovi.

Komponente povezanosti putevima
Lokalna povezanost putevima

Komponente povezanosti putevima definiraju se analogno komponentama povezanosti, i isto se tako dokazuju činjenice analogne propozicijama 23.3 i 23.7, i korolaru 23.8, ali analogon korolara 23.4 ***ne*** vrijedi, tj. komponente povezanosti putevima ne moraju biti zatvoreni skupovi.

Također se definira *lokalna povezanost putevima* i dokazuju analogoni teorema 23.11 i korolara 23.12.

Komponente povezanosti putevima
Lokalna povezanost putevima

Komponente povezanosti putevima definiraju se analogno komponentama povezanosti, i isto se tako dokazuju činjenice analogne propozicijama 23.3 i 23.7, i korolaru 23.8, ali analogon korolara 23.4 ***ne*** vrijedi, tj. komponente povezanosti putevima ne moraju biti zatvoreni skupovi.

Također se definira *lokalna povezanost putevima* i dokazuju analogoni teorema 23.11 i korolara 23.12.

6 KOMPAKTNOST U METRIČKIM PROSTORIMA

- Nizovi u metričkim prostorima
- Nizovna kompaktnost

Nizovi i neprekidnost

U metričkim se prostorima neprekidnost može karakterizirati pomoću nizova.

Teorem 24.1 (Heineova karakterizacija neprekidnosti)

Neka su X i Y metrički prostori. Preslikavanje $f\colon X \to Y$ je neprekidno u točki $x_0 \in X$ ako i samo ako za svaki niz $(x_n)_n$ u X koji konvergira k x_0, niz $\big(f(x_n)\big)_n$ konvergira točki $f(x_0)$.

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka je $f\colon X \to Y$ neprekidno u x_0 i neka niz $(x_n)_n$ konvergira k x_0. Za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ t.d. je $d\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$ čim je $d(x, x_0) < \delta$. Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, za taj δ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $d(x_n, x_0) < \delta$ čim je $n \geqslant n_0$. Dakle, za sve $n \geqslant n_0$ vrijedi $d\big(f(x_n), f(x_0)\big) < \varepsilon$ pa niz $\big(f(x_n)\big)_n$ konvergira vrijednosti $f(x_0)$.

Nizovi i neprekidnost

U metričkim se prostorima neprekidnost može karakterizirati pomoću nizova.

Teorem 24.1 (Heineova karakterizacija neprekidnosti)

Neka su X i Y metrički prostori. Preslikavanje $f\colon X \to Y$ je neprekidno u točki $x_0 \in X$ ako i samo ako za svaki niz $(x_n)_n$ u X koji konvergira k x_0, niz $\big(f(x_n)\big)_n$ konvergira točki $f(x_0)$.

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $f\colon X \to Y$ neprekidno u x_0 i neka niz $(x_n)_n$ konvergira k x_0. Za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ t.d. je $d\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$ čim je $d(x, x_0) < \delta$. Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, za taj δ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $d(x_n, x_0) < \delta$ čim je $n \geqslant n_0$. Dakle, za sve $n \geqslant n_0$ vrijedi $d\big(f(x_n), f(x_0)\big) < \varepsilon$ pa niz $\big(f(x_n)\big)_n$ konvergira vrijednosti $f(x_0)$.

Nizovi i neprekidnost

U metričkim se prostorima neprekidnost može karakterizirati pomoću nizova.

Teorem 24.1 (Heineova karakterizacija neprekidnosti)

Neka su X i Y metrički prostori. Preslikavanje $f\colon X \to Y$ je neprekidno u točki $x_0 \in X$ ako i samo ako za svaki niz $(x_n)_n$ u X koji konvergira k x_0, niz $\big(f(x_n)\big)_n$ konvergira točki $f(x_0)$.

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $f\colon X \to Y$ neprekidno u x_0 i neka niz $(x_n)_n$ konvergira k x_0. Za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ t.d. je $d\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$ čim je $d(x, x_0) < \delta$. Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, za taj δ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $d(x_n, x_0) < \delta$ čim je $n \geqslant n_0$. Dakle, za sve $n \geqslant n_0$ vrijedi $d\big(f(x_n), f(x_0)\big) < \varepsilon$ pa niz $\big(f(x_n)\big)_n$ konvergira vrijednosti $f(x_0)$.

Nizovi i neprekidnost

U metričkim se prostorima neprekidnost može karakterizirati pomoću nizova.

Teorem 24.1 (Heineova karakterizacija neprekidnosti)

Neka su X i Y metrički prostori. Preslikavanje $f\colon X \to Y$ je neprekidno u točki $x_0 \in X$ ako i samo ako za svaki niz $(x_n)_n$ u X koji konvergira k x_0, niz $\big(f(x_n)\big)_n$ konvergira točki $f(x_0)$.

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $f\colon X \to Y$ neprekidno u x_0 i neka niz $(x_n)_n$ konvergira k x_0. Za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ t.d. je $d\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$ čim je $d(x, x_0) < \delta$. Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, za taj δ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $d(x_n, x_0) < \delta$ čim je $n \geqslant n_0$. Dakle, za sve $n \geqslant n_0$ vrijedi $d\big(f(x_n), f(x_0)\big) < \varepsilon$ pa niz $\big(f(x_n)\big)_n$ konvergira vrijednosti $f(x_0)$.

$\Leftarrow$

$\Leftarrow$ Pretpostavimo da za svaki niz $(x_n)_n$ koji konvergira k x_0, niz $\big(f(x_n)\big)_n$ konvergira k $f(x_0)$, ali da f nije neprekidna u x_0.
Tada postoji $\varepsilon > 0$ t.d. za svaki $\delta > 0$ postoji $x_\delta \in X$ t.d. je $d(x_\delta, x_0) < \delta$ i $d\big(f(x_\delta), f(x_0)\big) \geqslant \varepsilon$.
Uzmemo li za δ redom brojeve $\frac{1}{n}$ za sve $n \in \mathbb{N}$, zaključujemo da za svaki n postoji $x_n \in X$ t.d. je $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ i $d\big(f(x_n), f(x_0)\big) \geqslant \varepsilon$.
Niz $(x_n)_n$ očito konvergira k x_0, ali niz $\big(f(x_n)\big)_n$ ne konvergira k $f(x_0)$. $\square$

- Napomena 1: Uoči da nužnost ($\Rightarrow$) u teoremu vrijedi i za preslikavanje proizvoljnih topoloških prostora — samo umjesto ε–δ jezika treba koristiti okoline točaka $f(x_0)$ odnosno x_0.
  Kaže se da „neprekidna preslikavanja čuvaju konvergenciju nizova”.
- Napomena 2: Sličan teorem vrijedi i za limes funkcije.

$\Leftarrow$

$\Leftarrow$ Pretpostavimo da za svaki niz $(x_n)_n$ koji konvergira k x_0, niz $\big(f(x_n)\big)_n$ konvergira k $f(x_0)$, ali da f nije neprekidna u x_0. Tada postoji $\varepsilon > 0$ t.d. za svaki $\delta > 0$ postoji $x_\delta \in X$ t.d. je $d(x_\delta, x_0) < \delta$ i $d\big(f(x_\delta), f(x_0)\big) \geqslant \varepsilon$.

Uzmemo li za δ redom brojeve $\frac{1}{n}$ za sve $n \in \mathbb{N}$, zaključujemo da za svaki n postoji $x_n \in X$ t.d. je $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ i $d\big(f(x_n), f(x_0)\big) \geqslant \varepsilon$.

Niz $(x_n)_n$ očito konvergira k x_0, ali niz $\big(f(x_n)\big)_n$ ne konvergira k $f(x_0)$. $\square$

- Napomena 1: Uoči da nužnost ($\Rightarrow$) u teoremu vrijedi i za preslikavanje proizvoljnih topoloških prostora — samo umjesto ε–δ jezika treba koristiti okoline točaka $f(x_0)$ odnosno x_0.

  Kaže se da „neprekidna preslikavanja čuvaju konvergenciju nizova".

- Napomena 2: Sličan teorem vrijedi i za limes funkcije.

$\Leftarrow$

$\Leftarrow$ Pretpostavimo da za svaki niz $(x_n)_n$ koji konvergira k x_0, niz $\big(f(x_n)\big)_n$ konvergira k $f(x_0)$, ali da f nije neprekidna u x_0.
Tada postoji $\varepsilon > 0$ t.d. za svaki $\delta > 0$ postoji $x_\delta \in X$ t.d. je $d(x_\delta, x_0) < \delta$ i $d\big(f(x_\delta), f(x_0)\big) \geqslant \varepsilon$.

Uzmemo li za δ redom brojeve $\frac{1}{n}$ za sve $n \in \mathbb{N}$, zaključujemo da za svaki n postoji $x_n \in X$ t.d. je $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ i $d\big(f(x_n), f(x_0)\big) \geqslant \varepsilon$.

Niz $(x_n)_n$ očito konvergira k x_0, ali niz $\big(f(x_n)\big)_n$ ne konvergira k $f(x_0)$. $\square$

- Napomena 1: Uoči da nužnost ($\Rightarrow$) u teoremu vrijedi i za preslikavanje proizvoljnih topoloških prostora — samo umjesto ε–δ jezika treba koristiti okoline točaka $f(x_0)$ odnosno x_0.

  Kaže se da „neprekidna preslikavanja čuvaju konvergenciju nizova”.

- Napomena 2: Sličan teorem vrijedi i za limes funkcije.

$\Leftarrow$ Pretpostavimo da za svaki niz $(x_n)_n$ koji konvergira k x_0, niz $\big(f(x_n)\big)_n$ konvergira k $f(x_0)$, ali da f nije neprekidna u x_0.
Tada postoji $\varepsilon > 0$ t.d. za svaki $\delta > 0$ postoji $x_\delta \in X$ t.d. je $d(x_\delta, x_0) < \delta$ i $d\big(f(x_\delta), f(x_0)\big) \geqslant \varepsilon$.
Uzmemo li za δ redom brojeve $\frac{1}{n}$ za sve $n \in \mathbb{N}$, zaključujemo da za svaki n postoji $x_n \in X$ t.d. je $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ i $d\big(f(x_n), f(x_0)\big) \geqslant \varepsilon$.
Niz $(x_n)_n$ očito konvergira k x_0, ali niz $\big(f(x_n)\big)_n$ ne konvergira k $f(x_0)$. $\square$

- Napomena 1: Uoči da nužnost ($\Rightarrow$) u teoremu vrijedi i za preslikavanje proizvoljnih topoloških prostora — samo umjesto ε–δ jezika treba koristiti okoline točaka $f(x_0)$ odnosno x_0.
Kaže se da „neprekidna preslikavanja čuvaju konvergenciju nizova".
- Napomena 2: Sličan teorem vrijedi i za limes funkcije.

$\Leftarrow$

$\Leftarrow$ Pretpostavimo da za svaki niz $(x_n)_n$ koji konvergira k x_0, niz $\big(f(x_n)\big)_n$ konvergira k $f(x_0)$, ali da f nije neprekidna u x_0.
Tada postoji $\varepsilon > 0$ t.d. za svaki $\delta > 0$ postoji $x_\delta \in X$ t.d. je $d(x_\delta, x_0) < \delta$ i $d\big(f(x_\delta), f(x_0)\big) \geqslant \varepsilon$.

Uzmemo li za δ redom brojeve $\frac{1}{n}$ za sve $n \in \mathbb{N}$, zaključujemo da za svaki n postoji $x_n \in X$ t.d. je $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ i $d\big(f(x_n), f(x_0)\big) \geqslant \varepsilon$.

Niz $(x_n)_n$ očito konvergira k x_0, ali niz $\big(f(x_n)\big)_n$ ne konvergira k $f(x_0)$. $\square$

- **Napomena 1:** Uoči da nužnost ($\Rightarrow$) u teoremu vrijedi i za preslikavanje proizvoljnih topoloških prostora — samo umjesto ε–δ jezika treba koristiti okoline točaka $f(x_0)$ odnosno x_0.

  Kaže se da „neprekidna preslikavanja čuvaju konvergenciju nizova”.

- **Napomena 2:** Sličan teorem vrijedi i za limes funkcije.

$\Leftarrow$

$\Leftarrow$ Pretpostavimo da za svaki niz $(x_n)_n$ koji konvergira k x_0, niz $\big(f(x_n)\big)_n$ konvergira k $f(x_0)$, ali da f nije neprekidna u x_0.
Tada postoji $\varepsilon > 0$ t.d. za svaki $\delta > 0$ postoji $x_\delta \in X$ t.d. je $d(x_\delta, x_0) < \delta$ i $d\big(f(x_\delta), f(x_0)\big) \geqslant \varepsilon$.
Uzmemo li za δ redom brojeve $\frac{1}{n}$ za sve $n \in \mathbb{N}$, zaključujemo da za svaki n postoji $x_n \in X$ t.d. je $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ i $d\big(f(x_n), f(x_0)\big) \geqslant \varepsilon$.
Niz $(x_n)_n$ očito konvergira k x_0, ali niz $\big(f(x_n)\big)_n$ ne konvergira k $f(x_0)$. $\square$

- Napomena 1: Uoči da nužnost ($\Rightarrow$) u teoremu vrijedi i za preslikavanje proizvoljnih topoloških prostora — samo umjesto ε–δ jezika treba koristiti okoline točaka $f(x_0)$ odnosno x_0.
  Kaže se da „neprekidna preslikavanja čuvaju konvergenciju nizova”.
- Napomena 2: Sličan teorem vrijedi i za limes funkcije.

Nizovi i zatvorenje skupa

Vidjeli smo kako se neprekidnost i limes u metričkim prostorima mogu karakterizirati pomoću nizova. I mnoga se druga svojstva u metričkim prostorima mogu izraziti pomoću nizova.

Lema 24.2

Neka je A podskup metričkog prostora X. Točka $x \in X$ pripada zatvorenju skupa A, $x \in \overline{A}$, ako i samo ako postoji niz $(x_n)_n$ u A koji konvergira k x.

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka je $x \in \overline{A}$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in A \cap K(x; \frac{1}{n})$, pa je $(x_n)_n$ niz u A koji konvergira k x.

$\Leftarrow$ Neka je $(x_n)_n$ niz u A koji konvergira k $x \in X$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. za sve $n \geqslant n_0$ vrijedi $x_n \in K(x; \varepsilon)$, pa je $K(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Dakle, $x \in \overline{A}$. $\square$

Nizovi i zatvorenje skupa

Vidjeli smo kako se neprekidnost i limes u metričkim prostorima mogu karakterizirati pomoću nizova. I mnoga se druga svojstva u metričkim prostorima mogu izraziti pomoću nizova.

Lema 24.2

Neka je A podskup metričkog prostora X. Točka $x \in X$ pripada zatvorenju skupa A, $x \in \overline{A}$, ako i samo ako postoji niz $(x_n)_n$ u A koji konvergira k x.

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka je $x \in \overline{A}$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in A \cap K(x; \frac{1}{n})$, pa je $(x_n)_n$ niz u A koji konvergira k x.

$\Leftarrow$ Neka je $(x_n)_n$ niz u A koji konvergira k $x \in X$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. za sve $n \geqslant n_0$ vrijedi $x_n \in K(x; \varepsilon)$, pa je $K(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Dakle, $x \in \overline{A}$. $\square$

Nizovi i zatvorenje skupa

Vidjeli smo kako se neprekidnost i limes u metričkim prostorima mogu karakterizirati pomoću nizova. I mnoga se druga svojstva u metričkim prostorima mogu izraziti pomoću nizova.

Lema 24.2

Neka je A podskup metričkog prostora X. Točka $x \in X$ pripada zatvorenju skupa A, $x \in \overline{A}$, ako i samo ako postoji niz $(x_n)_n$ u A koji konvergira k x.

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka je $x \in \overline{A}$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in A \cap K(x; \frac{1}{n})$, pa je $(x_n)_n$ niz u A koji konvergira k x.

$\Leftarrow$ Neka je $(x_n)_n$ niz u A koji konvergira k $x \in X$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. za sve $n \geqslant n_0$ vrijedi $x_n \in K(x; \varepsilon)$, pa je $K(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Dakle, $x \in \overline{A}$. $\square$

Nizovi i zatvorenje skupa

Vidjeli smo kako se neprekidnost i limes u metričkim prostorima mogu karakterizirati pomoću nizova. I mnoga se druga svojstva u metričkim prostorima mogu izraziti pomoću nizova.

Lema 24.2

Neka je A podskup metričkog prostora X. Točka $x \in X$ pripada zatvorenju skupa A, $x \in \overline{A}$, ako i samo ako postoji niz $(x_n)_n$ u A koji konvergira k x.

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka je $x \in \overline{A}$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in A \cap K(x; \frac{1}{n})$, pa je $(x_n)_n$ niz u A koji konvergira k x.

$\Leftarrow$ Neka je $(x_n)_n$ niz u A koji konvergira k $x \in X$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. za sve $n \geqslant n_0$ vrijedi $x_n \in K(x; \varepsilon)$, pa je $K(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Dakle, $x \in \overline{A}$. $\square$

Nizovi su dovoljni

Dakle, u metričkim prostorima se zatvorenje proizvoljnog skupa A može *definirati* kao unija skupa A i limesa svih konvergentnih nizova u A. A onda se zatvorenim *proglase* oni skupovi koji su jednaki svojem zatvorenju. I konačno, otvorenim se skupovima *proglase* komplementi zatvorenih, i dobije se topološka struktura samo pomoću nizova.

U ovom ćemo se poglavlju pozabaviti nekim karakterizacijama kompaktnosti u metričkim prostorima.

Nizovi su dovoljni

Dakle, u metričkim prostorima se zatvorenje proizvoljnog skupa A može *definirati* kao unija skupa A i limesa svih konvergentnih nizova u A. A onda se zatvorenim *proglase* oni skupovi koji su jednaki svojem zatvorenju. I konačno, otvorenim se skupovima *proglase* komplementi zatvorenih, i dobije se topološka struktura samo pomoću nizova.

U ovom ćemo se poglavlju pozabaviti nekim karakterizacijama kompaktnosti u metričkim prostorima.

Nizovi su dovoljni

Dakle, u metričkim prostorima se zatvorenje proizvoljnog skupa A može *definirati* kao unija skupa A i limesa svih konvergentnih nizova u A. A onda se zatvorenim *proglase* oni skupovi koji su jednaki svojem zatvorenju. I konačno, otvorenim se skupovima *proglase* komplementi zatvorenih, i dobije se topološka struktura samo pomoću nizova.

U ovom ćemo se poglavlju pozabaviti nekim karakterizacijama kompaktnosti u metričkim prostorima.

Nizovi su dovoljni

Dakle, u metričkim prostorima se zatvorenje proizvoljnog skupa A može *definirati* kao unija skupa A i limesa svih konvergentnih nizova u A. A onda se zatvorenim *proglase* oni skupovi koji su jednaki svojem zatvorenju. I konačno, otvorenim se skupovima *proglase* komplementi zatvorenih, i dobije se topološka struktura samo pomoću nizova.

U ovom ćemo se poglavlju pozabaviti nekim karakterizacijama kompaktnosti u metričkim prostorima.

Gomilište skupa u metričkom prostoru

Prisjetimo se: neka je A potprostor topološkog prostora X. Točka $x \in X$ je gomilište skupa A ako u svakoj okolini $U \ni x$ postoji barem jedna točka iz A *različita* od x. U metričkim prostorima gomilište ima jače svojstvo:

Lema 24.3

Neka je X metrički prostor. Točka $x \in X$ je gomilište skupa $A \subseteq X$ ako i samo ako u svakoj okolini U točke x ima beskonačno mnogo točaka skupa A.[3]

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka je $\varepsilon > 0$ t.d. je $K(x;\varepsilon) \subseteq U$. Kako je x gomilište od A, za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in K(x; \frac{\varepsilon}{n}) \cap (A \setminus \{x\})$. Očito je $x_n \in U$, a zbog $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varepsilon}{n} = 0$ je skup $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ beskonačan (iako $(n \neq m) \not\Rightarrow (x_n \neq x_m)$).

$\Leftarrow$ Ovaj smjer je očit. $\square$

Gomilište skupa u metričkom prostoru

Prisjetimo se: neka je A potprostor topološkog prostora X. Točka $x \in X$ je gomilište skupa A ako u svakoj okolini $U \ni x$ postoji barem jedna točka iz A *različita* od x. U metričkim prostorima gomilište ima jače svojstvo:

Lema 24.3

Neka je X metrički prostor. Točka $x \in X$ je gomilište skupa $A \subseteq X$ ako i samo ako u svakoj okolini U točke x ima beskonačno mnogo točaka skupa A.[3]

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $\varepsilon > 0$ t.d. je $K(x;\varepsilon) \subseteq U$. Kako je x gomilište od A, za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in K(x; \frac{\varepsilon}{n}) \cap (A \setminus \{x\})$. Očito je $x_n \in U$, a zbog $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varepsilon}{n} = 0$ je skup $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ beskonačan
(iako $(n \neq m) \not\Rightarrow (x_n \neq x_m)$).

$\boxed{\Leftarrow}$ Ovaj smjer je očit. $\square$

Gomilište skupa u metričkom prostoru

Prisjetimo se: neka je A potprostor topološkog prostora X. Točka $x \in X$ je gomilište skupa A ako u svakoj okolini $U \ni x$ postoji barem jedna točka iz A *različita* od x. U metričkim prostorima gomilište ima jače svojstvo:

Lema 24.3

Neka je X metrički prostor. Točka $x \in X$ je gomilište skupa $A \subseteq X$ ako i samo ako u svakoj okolini U točke x ima beskonačno mnogo točaka skupa A.[3]

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka je $\varepsilon > 0$ t.d. je $K(x;\varepsilon) \subseteq U$. Kako je x gomilište od A, za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in K(x; \frac{\varepsilon}{n}) \cap (A \setminus \{x\})$. Očito je $x_n \in U$, a zbog $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varepsilon}{n} = 0$ je skup $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ beskonačan (iako $(n \neq m) \not\Rightarrow (x_n \neq x_m)$).

$\Leftarrow$ Ovaj smjer je očit. $\square$

[3]Vidi i zadatak 27 u vježbama uz treće poglavlje.

Gomilište skupa u metričkom prostoru

Prisjetimo se: neka je A potprostor topološkog prostora X. Točka $x \in X$ je gomilište skupa A ako u svakoj okolini $U \ni x$ postoji barem jedna točka iz A *različita* od x. U metričkim prostorima gomilište ima jače svojstvo:

Lema 24.3

Neka je X metrički prostor. Točka $x \in X$ je gomilište skupa $A \subseteq X$ ako i samo ako u svakoj okolini U točke x ima beskonačno mnogo točaka skupa A.[3]

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $\varepsilon > 0$ t.d. je $K(x;\varepsilon) \subseteq U$. Kako je x gomilište od A, za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in K(x; \frac{\varepsilon}{n}) \cap (A \setminus \{x\})$. Očito je $x_n \in U$, a zbog $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varepsilon}{n} = 0$ je skup $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ beskonačan (iako $(n \neq m) \not\Rightarrow (x_n \neq x_m)$).

$\boxed{\Leftarrow}$ Ovaj smjer je očit. $\square$

---

[3]Vidi i zadatak 27 u vježbama uz treće poglavlje.

Gomilište skupa u metričkom prostoru

Prisjetimo se: neka je A potprostor topološkog prostora X. Točka $x \in X$ je gomilište skupa A ako u svakoj okolini $U \ni x$ postoji barem jedna točka iz A *različita* od x. U metričkim prostorima gomilište ima jače svojstvo:

Lema 24.3

Neka je X metrički prostor. Točka $x \in X$ je gomilište skupa $A \subseteq X$ ako i samo ako u svakoj okolini U točke x ima beskonačno mnogo točaka skupa A.[3]

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $\varepsilon > 0$ t.d. je $K(x;\varepsilon) \subseteq U$. Kako je x gomilište od A, za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in K(x; \frac{\varepsilon}{n}) \cap (A \setminus \{x\})$. Očito je $x_n \in U$, a zbog $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varepsilon}{n} = 0$ je skup $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ beskonačan (iako $(n \neq m) \not\Rightarrow (x_n \neq x_m)$).

$\boxed{\Leftarrow}$ Ovaj smjer je očit. $\square$

[3] Vidi i zadatak 27 u vježbama uz treće poglavlje.

Gomilište skupa u metričkom prostoru

Prisjetimo se: neka je A potprostor topološkog prostora X. Točka $x \in X$ je gomilište skupa A ako u svakoj okolini $U \ni x$ postoji barem jedna točka iz A *različita* od x. U metričkim prostorima gomilište ima jače svojstvo:

Lema 24.3

Neka je X metrički prostor. Točka $x \in X$ je gomilište skupa $A \subseteq X$ ako i samo ako u svakoj okolini U točke x ima beskonačno mnogo točaka skupa A.[3]

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $\varepsilon > 0$ t.d. je $K(x;\varepsilon) \subseteq U$. Kako je x gomilište od A, za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in K(x; \frac{\varepsilon}{n}) \cap (A \setminus \{x\})$. Očito je $x_n \in U$, a zbog $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varepsilon}{n} = 0$ je skup $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ beskonačan (iako $(n \neq m) \not\Rightarrow (x_n \neq x_m)$).

$\boxed{\Leftarrow}$ Ovaj smjer je očit.

[3] Vidi i zadatak 27 u vježbama uz treće poglavlje.

Gomilište skupa u metričkom prostoru

Prisjetimo se: neka je A potprostor topološkog prostora X. Točka $x \in X$ je gomilište skupa A ako u svakoj okolini $U \ni x$ postoji barem jedna točka iz A *različita* od x. U metričkim prostorima gomilište ima jače svojstvo:

Lema 24.3

Neka je X metrički prostor. Točka $x \in X$ je gomilište skupa $A \subseteq X$ ako i samo ako u svakoj okolini U točke x ima beskonačno mnogo točaka skupa A.[3]

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $\varepsilon > 0$ t.d. je $K(x;\varepsilon) \subseteq U$. Kako je x gomilište od A, za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in K(x;\frac{\varepsilon}{n}) \cap (A \setminus \{x\})$. Očito je $x_n \in U$, a zbog $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varepsilon}{n} = 0$ je skup $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ beskonačan (iako $(n \neq m) \not\Rightarrow (x_n \neq x_m)$).

$\boxed{\Leftarrow}$ Ovaj smjer je očit. □

[3] Vidi i zadatak 27 u vježbama uz treće poglavlje.

Podnizovi i gomilišta nizova

Kao što znamo, niz u prostoru X je svaka funkcija $f\colon \mathbb{N} \to X$, i uobičajeno je vrijednosti $f(n)$ označavati s x_n i govoriti o nizu $(x_n)_n$.

Napomena: Točke $x_n \in X$ nazivaju se *članovi* niza, i dogovorno se smatra da se za $m \neq n$ radi o dva člana niza, iako je možda $x_m = x_n$.

A što je podniz? To je opet niz koji se dobije restrikcijom polaznog niza na neki podskup od $\mathbb{N}$, kojeg međutim treba „prenumerirati”. Točnije, *podniz* niza f je kompozicija $f \circ u$, gdje je $u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ neka strogo uzlazna (rastuća) funkcija. Označimo li $u(k) =: n_k$ dobivamo i uobičajenu oznaku podniza $(x_{n_k})_k$.

Definicija 24.4

Za točku $x \in X$ kažemo da je *gomilište niza* $(x_n)_n$ ako postoji podniz $(x_{n_k})_k$ koji konvergira točki x.

Podnizovi i gomilišta nizova

Kao što znamo, niz u prostoru X je svaka funkcija $f\colon \mathbb{N} \to X$, i uobičajeno je vrijednosti $f(n)$ označavati s x_n i govoriti o nizu $(x_n)_n$.

Napomena: Točke $x_n \in X$ nazivaju se *članovi* niza, i dogovorno se smatra da se za $m \neq n$ radi o dva člana niza, iako je možda $x_m = x_n$.

A što je podniz? To je opet niz koji se dobije restrikcijom polaznog niza na neki podskup od $\mathbb{N}$, kojeg međutim treba „prenumerirati”. Točnije, *podniz* niza f je kompozicija $f \circ u$, gdje je $u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ neka strogo uzlazna (rastuća) funkcija. Označimo li $u(k) =: n_k$ dobivamo i uobičajenu oznaku podniza $(x_{n_k})_k$.

Definicija 24.4

Za točku $x \in X$ kažemo da je *gomilište niza* $(x_n)_n$ ako postoji podniz $(x_{n_k})_k$ koji konvergira točki x.

Podnizovi i gomilišta nizova

Kao što znamo, niz u prostoru X je svaka funkcija $f\colon \mathbb{N} \to X$, i uobičajeno je vrijednosti $f(n)$ označavati s x_n i govoriti o nizu $(x_n)_n$.

Napomena: Točke $x_n \in X$ nazivaju se *članovi* niza, i dogovorno se smatra da se za $m \neq n$ radi o dva člana niza, iako je možda $x_m = x_n$.

A što je podniz? To je opet niz koji se dobije restrikcijom polaznog niza na neki podskup od $\mathbb{N}$, kojeg međutim treba „prenumerirati".
Točnije, *podniz* niza f je kompozicija $f \circ u$, gdje je $u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ neka strogo uzlazna (rastuća) funkcija. Označimo li $u(k) =: n_k$ dobivamo i uobičajenu oznaku podniza $(x_{n_k})_k$.

Definicija 24.4

Za točku $x \in X$ kažemo da je *gomilište niza* $(x_n)_n$ ako postoji podniz $(x_{n_k})_k$ koji konvergira točki x.

Podnizovi i gomilišta nizova

Kao što znamo, niz u prostoru X je svaka funkcija $f\colon \mathbb{N} \to X$, i uobičajeno je vrijednosti $f(n)$ označavati s x_n i govoriti o nizu $(x_n)_n$.

Napomena: Točke $x_n \in X$ nazivaju se *članovi* niza, i dogovorno se smatra da se za $m \neq n$ radi o dva člana niza, iako je možda $x_m = x_n$.

A što je podniz? To je opet niz koji se dobije restrikcijom polaznog niza na neki podskup od $\mathbb{N}$, kojeg međutim treba „prenumerirati”. Točnije, *podniz* niza f je kompozicija $f \circ u$, gdje je $u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ neka strogo uzlazna (rastuća) funkcija. Označimo li $u(k) =: n_k$ dobivamo i uobičajenu oznaku podniza $(x_{n_k})_k$.

Definicija 24.4

Za točku $x \in X$ kažemo da je *gomilište niza* $(x_n)_n$ ako postoji podniz $(x_{n_k})_k$ koji konvergira točki x.

Podnizovi i gomilišta nizova

Kao što znamo, niz u prostoru X je svaka funkcija $f : \mathbb{N} \to X$, i uobičajeno je vrijednosti $f(n)$ označavati s x_n i govoriti o nizu $(x_n)_n$.

Napomena: Točke $x_n \in X$ nazivaju se *članovi* niza, i dogovorno se smatra da se za $m \neq n$ radi o dva člana niza, iako je možda $x_m = x_n$.

A što je podniz? To je opet niz koji se dobije restrikcijom polaznog niza na neki podskup od $\mathbb{N}$, kojeg međutim treba „prenumerirati". Točnije, *podniz* niza f je kompozicija $f \circ u$, gdje je $u : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ neka strogo uzlazna (rastuća) funkcija. Označimo li $u(k) =: n_k$ dobivamo i uobičajenu oznaku podniza $(x_{n_k})_k$.

Definicija 24.4

Za točku $x \in X$ kažemo da je *gomilište niza* $(x_n)_n$ ako postoji podniz $(x_{n_k})_k$ koji konvergira točki x.

Podnizovi i gomilišta nizova

Kao što znamo, niz u prostoru X je svaka funkcija $f\colon \mathbb{N} \to X$, i uobičajeno je vrijednosti $f(n)$ označavati s x_n i govoriti o nizu $(x_n)_n$.

Napomena: Točke $x_n \in X$ nazivaju se *članovi* niza, i dogovorno se smatra da se za $m \neq n$ radi o dva člana niza, iako je možda $x_m = x_n$.

A što je podniz? To je opet niz koji se dobije restrikcijom polaznog niza na neki podskup od $\mathbb{N}$, kojeg međutim treba „prenumerirati". Točnije, *podniz* niza f je kompozicija $f \circ u$, gdje je $u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ neka strogo uzlazna (rastuća) funkcija. Označimo li $u(k) =: n_k$ dobivamo i uobičajenu oznaku podniza $(x_{n_k})_k$.

Definicija 24.4

Za točku $x \in X$ kažemo da je *gomilište niza* $(x_n)_n$ ako postoji podniz $(x_{n_k})_k$ koji konvergira točki x.

Gomilište skupa vrijednosti niza

Lema 24.5

Neka je $(x_n)_n$ niz u metričkom prostoru X, neka je $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ skup vrijednosti toga niza, i točka $x \in S^d$ gomilište skupa S. Tada je x i gomilište niza $(x_n)_n$, tj. postoji podniz $(x_{n_k})_k$ koji konvergira k x.

Dokaz: Neka je $n_1 \in \mathbb{N}$ t.d. je $x_{n_1} \in K(x;1)$.
Prema prethodnoj lemi, u okolini $K(x;\frac{1}{2})$ ima beskonačno mnogo točaka skupa S, pa neka je $n_2 > n_1$ t.d. je $x_{n_2} \in K(x;\frac{1}{2})$.
Induktivno, postoji $n_k > n_{k-1}$ t.d. je $x_{n_k} \in K(x;\frac{1}{k})$.
Tada je $(x_{n_k})_k$ traženi podniz za koji je $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. □

Gomilište skupa vrijednosti niza

Lema 24.5

Neka je $(x_n)_n$ niz u metričkom prostoru X, neka je $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ skup vrijednosti toga niza, i točka $x \in S^d$ gomilište skupa S. Tada je x i gomilište niza $(x_n)_n$, tj. postoji podniz $(x_{n_k})_k$ koji konvergira k x.

Dokaz: Neka je $n_1 \in \mathbb{N}$ t.d. je $x_{n_1} \in K(x;1)$.

Prema prethodnoj lemi, u okolini $K(x;\frac{1}{2})$ ima beskonačno mnogo točaka skupa S, pa neka je $n_2 > n_1$ t.d. je $x_{n_2} \in K(x;\frac{1}{2})$.

Induktivno, postoji $n_k > n_{k-1}$ t.d. je $x_{n_k} \in K(x;\frac{1}{k})$.

Tada je $(x_{n_k})_k$ traženi podniz za koji je $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. $\square$

Gomilište skupa vrijednosti niza

Lema 24.5

Neka je $(x_n)_n$ niz u metričkom prostoru X, neka je $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ skup vrijednosti toga niza, i točka $x \in S^d$ gomilište skupa S. Tada je x i gomilište niza $(x_n)_n$, tj. postoji podniz $(x_{n_k})_k$ koji konvergira k x.

Dokaz: Neka je $n_1 \in \mathbb{N}$ t.d. je $x_{n_1} \in K(x; 1)$.

Prema prethodnoj lemi, u okolini $K(x; \frac{1}{2})$ ima beskonačno mnogo točaka skupa S, pa neka je $n_2 > n_1$ t.d. je $x_{n_2} \in K(x; \frac{1}{2})$.

Induktivno, postoji $n_k > n_{k-1}$ t.d. je $x_{n_k} \in K(x; \frac{1}{k})$.

Tada je $(x_{n_k})_k$ traženi podniz za koji je $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. $\square$

Gomilište skupa vrijednosti niza

Lema 24.5

Neka je $(x_n)_n$ niz u metričkom prostoru X, neka je $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ skup vrijednosti toga niza, i točka $x \in S^d$ gomilište skupa S. Tada je x i gomilište niza $(x_n)_n$, tj. postoji podniz $(x_{n_k})_k$ koji konvergira k x.

Dokaz: Neka je $n_1 \in \mathbb{N}$ t.d. je $x_{n_1} \in K(x; 1)$.

Prema prethodnoj lemi, u okolini $K(x; \frac{1}{2})$ ima beskonačno mnogo točaka skupa S, pa neka je $n_2 > n_1$ t.d. je $x_{n_2} \in K(x; \frac{1}{2})$.

Induktivno, postoji $n_k > n_{k-1}$ t.d. je $x_{n_k} \in K(x; \frac{1}{k})$.

Tada je $(x_{n_k})_k$ traženi podniz za koji je $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = x$. □

Gomilište skupa vrijednosti niza

Lema 24.5

Neka je $(x_n)_n$ niz u metričkom prostoru X, neka je $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ skup vrijednosti toga niza, i točka $x \in S^d$ gomilište skupa S. Tada je x i gomilište niza $(x_n)_n$, tj. postoji podniz $(x_{n_k})_k$ koji konvergira k x.

Dokaz: Neka je $n_1 \in \mathbb{N}$ t.d. je $x_{n_1} \in K(x; 1)$.
Prema prethodnoj lemi, u okolini $K(x; \frac{1}{2})$ ima beskonačno mnogo točaka skupa S, pa neka je $n_2 > n_1$ t.d. je $x_{n_2} \in K(x; \frac{1}{2})$.
Induktivno, postoji $n_k > n_{k-1}$ t.d. je $x_{n_k} \in K(x; \frac{1}{k})$.
Tada je $(x_{n_k})_k$ traženi podniz za koji je $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. □

Gomilište niza u metričkom prostoru

Za gomilišta nizova u metričkim prostorima vrijedi tvrdnja slična lemi 24.3 za gomilišta skupova:

Lema 24.6

Neka je X metrički prostor. Točka $x \in X$ je gomilište niza $(x_n)_n$ ako i samo ako u svakoj okolini $U \ni x$ postoji beskonačno mnogo članova toga niza.

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka je x gomilište niza $(x_n)_n$, $U \ni x$ proizvoljna okolina, i $(x_{n_k})_k$ podniz koji konvergira ka x. Za $\varepsilon > 0$ t.d. je $K(x;\varepsilon) \subseteq U$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $x_{n_k} \in K(x;\varepsilon) \subseteq U$ za sve $k \geq k_0$, pa U sadrži beskonačno mnogo članova niza (x_n).

$\Leftarrow$ Neka je $n_1 \in \mathbb{N}$ t.d. je $x_{n_1} \in K(x;1)$. U kugli $K(x;\frac{1}{2})$ postoji beskonačno mnogo članova niza $(x_n)_n$, pa neka je $n_2 > n_1$ t.d. je $x_{n_2} \in K(x;\frac{1}{2})$. Indukcijom dobivamo podniz $(x_{n_k})_k$ koji konvergira k x. $\square$

Gomilište niza u metričkom prostoru

Za gomilišta nizova u metričkim prostorima vrijedi tvrdnja slična lemi 24.3 za gomilišta skupova:

Lema 24.6

Neka je X metrički prostor. Točka $x \in X$ je gomilište niza $(x_n)_n$ ako i samo ako u svakoj okolini $U \ni x$ postoji beskonačno mnogo članova toga niza.

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je x gomilište niza $(x_n)_n$, $U \ni x$ proizvoljna okolina, i $(x_{n_k})_k$ podniz koji konvergira ka x. Za $\varepsilon > 0$ t.d. je $K(x;\varepsilon) \subseteq U$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $x_{n_k} \in K(x;\varepsilon) \subseteq U$ za sve $k \geq k_0$, pa U sadrži beskonačno mnogo članova niza (x_n).

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka je $n_1 \in \mathbb{N}$ t.d. je $x_{n_1} \in K(x;1)$. U kugli $K(x;\frac{1}{2})$ postoji beskonačno mnogo članova niza $(x_n)_n$, pa neka je $n_2 > n_1$ t.d. je $x_{n_2} \in K(x;\frac{1}{2})$. Indukcijom dobivamo podniz $(x_{n_k})_k$ koji konvergira k x. $\square$

Gomilište niza u metričkom prostoru

Za gomilišta nizova u metričkim prostorima vrijedi tvrdnja slična lemi 24.3 za gomilišta skupova:

Lema 24.6

Neka je X metrički prostor. Točka $x \in X$ je gomilište niza $(x_n)_n$ ako i samo ako u svakoj okolini $U \ni x$ postoji beskonačno mnogo članova toga niza.

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka je x gomilište niza $(x_n)_n$, $U \ni x$ proizvoljna okolina, i $(x_{n_k})_k$ podniz koji konvergira ka x. Za $\varepsilon > 0$ t.d. je $K(x;\varepsilon) \subseteq U$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $x_{n_k} \in K(x;\varepsilon) \subseteq U$ za sve $k \geqslant k_0$, pa U sadrži beskonačno mnogo članova niza (x_n).

$\Leftarrow$ Neka je $n_1 \in \mathbb{N}$ t.d. je $x_{n_1} \in K(x;1)$. U kugli $K(x;\frac{1}{2})$ postoji beskonačno mnogo članova niza $(x_n)_n$, pa neka je $n_2 > n_1$ t.d. je $x_{n_2} \in K(x;\frac{1}{2})$. Indukcijom dobivamo podniz $(x_{n_k})_k$ koji konvergira k x. □

Gomilište niza u metričkom prostoru

Za gomilišta nizova u metričkim prostorima vrijedi tvrdnja slična lemi 24.3 za gomilišta skupova:

Lema 24.6

Neka je X metrički prostor. Točka $x \in X$ je gomilište niza $(x_n)_n$ ako i samo ako u svakoj okolini $U \ni x$ postoji beskonačno mnogo članova toga niza.

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka je x gomilište niza $(x_n)_n$, $U \ni x$ proizvoljna okolina, i $(x_{n_k})_k$ podniz koji konvergira ka x. Za $\varepsilon > 0$ t.d. je $K(x;\varepsilon) \subseteq U$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $x_{n_k} \in K(x;\varepsilon) \subseteq U$ za sve $k \geqslant k_0$, pa U sadrži beskonačno mnogo članova niza (x_n).

$\Leftarrow$ Neka je $n_1 \in \mathbb{N}$ t.d. je $x_{n_1} \in K(x;1)$. U kugli $K(x;\frac{1}{2})$ postoji beskonačno mnogo članova niza $(x_n)_n$, pa neka je $n_2 > n_1$ t.d. je $x_{n_2} \in K(x;\frac{1}{2})$. Indukcijom dobivamo podniz $(x_{n_k})_k$ koji konvergira k x. $\square$

Gomilište niza u metričkom prostoru

Za gomilišta nizova u metričkim prostorima vrijedi tvrdnja slična lemi 24.3 za gomilišta skupova:

Lema 24.6

Neka je X metrički prostor. Točka $x \in X$ je gomilište niza $(x_n)_n$ ako i samo ako u svakoj okolini $U \ni x$ postoji beskonačno mnogo članova toga niza.

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka je x gomilište niza $(x_n)_n$, $U \ni x$ proizvoljna okolina, i $(x_{n_k})_k$ podniz koji konvergira ka x. Za $\varepsilon > 0$ t.d. je $K(x;\varepsilon) \subseteq U$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $x_{n_k} \in K(x;\varepsilon) \subseteq U$ za sve $k \geqslant k_0$, pa U sadrži beskonačno mnogo članova niza (x_n).

$\Leftarrow$ Neka je $n_1 \in \mathbb{N}$ t.d. je $x_{n_1} \in K(x;1)$. U kugli $K(x;\frac{1}{2})$ postoji beskonačno mnogo članova niza $(x_n)_n$, pa neka je $n_2 > n_1$ t.d. je $x_{n_2} \in K(x;\frac{1}{2})$. Indukcijom dobivamo podniz $(x_{n_k})_k$ koji konvergira k x. $\square$

Gomilište niza u metričkom prostoru

Za gomilišta nizova u metričkim prostorima vrijedi tvrdnja slična lemi 24.3 za gomilišta skupova:

Lema 24.6

Neka je X metrički prostor. Točka $x \in X$ je gomilište niza $(x_n)_n$ ako i samo ako u svakoj okolini $U \ni x$ postoji beskonačno mnogo članova toga niza.

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka je x gomilište niza $(x_n)_n$, $U \ni x$ proizvoljna okolina, i $(x_{n_k})_k$ podniz koji konvergira ka x. Za $\varepsilon > 0$ t.d. je $K(x;\varepsilon) \subseteq U$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $x_{n_k} \in K(x;\varepsilon) \subseteq U$ za sve $k \geqslant k_0$, pa U sadrži beskonačno mnogo članova niza (x_n).

$\Leftarrow$ Neka je $n_1 \in \mathbb{N}$ t.d. je $x_{n_1} \in K(x;1)$. U kugli $K(x;\frac{1}{2})$ postoji beskonačno mnogo članova niza $(x_n)_n$, pa neka je $n_2 > n_1$ t.d. je $x_{n_2} \in K(x;\frac{1}{2})$. Indukcijom dobivamo podniz $(x_{n_k})_k$ koji konvergira k x. $\square$

Cauchyjevo svojstvo

Cauchyjevo svojstvo se definira jednako kao i u $\mathbb{R}$:

Definicija 24.7

Za niz $(x_n)_n$ u metričkom prostoru (X, d) kaže se da ima *Cauchyjevo svojstvo* ili da je *Cauchyjev niz* ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ za sve $m, n \geqslant n_0$. Dakle,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ takav da } \forall m, n \geqslant n_0 \text{ vrijedi } d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Propozicija 24.8

Svaki konvergentan niz u metričkom prostoru (X, d) je Cauchyjev.

Dokaz: Neka $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x^*$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. za $\forall n \geqslant n_0$ vrijedi $d(x_n, x^*) < \frac{\varepsilon}{2}$, pa za $m, n \geqslant n_0$ vrijedi $d(x_m, x_n) \leqslant d(x_m, x^*) + d(x^*, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. $\square$

Napomena: Za razliku od $\mathbb{R}$, u općenitom metričkom prostoru (X, d) nije svaki Cauchyjev niz konvergentan.

Cauchyjevo svojstvo

Cauchyjevo svojstvo se definira jednako kao i u $\mathbb{R}$:

Definicija 24.7

Za niz $(x_n)_n$ u metričkom prostoru (X, d) kaže se da ima *Cauchyjevo svojstvo* ili da je *Cauchyjev niz* ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ za sve $m, n \geqslant n_0$. Dakle,

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ takav da } \forall m, n \geqslant n_0 \text{ vrijedi } d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Propozicija 24.8

Svaki konvergentan niz u metričkom prostoru (X, d) je Cauchyjev.

Dokaz: Neka $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x^*$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. za $\forall n \geqslant n_0$ vrijedi $d(x_n, x^*) < \frac{\varepsilon}{2}$, pa za $m, n \geqslant n_0$ vrijedi $d(x_m, x_n) \leqslant d(x_m, x^*) + d(x^*, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. □

Napomena: Za razliku od $\mathbb{R}$, u općenitom metričkom prostoru (X, d) nije svaki Cauchyjev niz konvergentan.

Cauchyjevo svojstvo

Cauchyjevo svojstvo se definira jednako kao i u $\mathbb{R}$:

Definicija 24.7

Za niz $(x_n)_n$ u metričkom prostoru (X, d) kaže se da ima *Cauchyjevo svojstvo* ili da je *Cauchyjev niz* ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ za sve $m, n \geqslant n_0$. Dakle,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ takav da } \forall m, n \geqslant n_0 \text{ vrijedi } d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Propozicija 24.8

Svaki konvergentan niz u metričkom prostoru (X, d) je Cauchyjev.

Dokaz: Neka $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x^*$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. za $\forall n \geqslant n_0$ vrijedi $d(x_n, x^*) < \frac{\varepsilon}{2}$, pa za $m, n \geqslant n_0$ vrijedi
$d(x_m, x_n) \leqslant d(x_m, x^*) + d(x^*, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. □

Napomena: Za razliku od $\mathbb{R}$, u općenitom metričkom prostoru (X, d) nije svaki Cauchyjev niz konvergentan.

Cauchyjevo svojstvo

Cauchyjevo svojstvo se definira jednako kao i u $\mathbb{R}$:

Definicija 24.7

Za niz $(x_n)_n$ u metričkom prostoru (X, d) kaže se da ima *Cauchyjevo svojstvo* ili da je *Cauchyjev niz* ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ za sve $m, n \geqslant n_0$. Dakle,

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ takav da } \forall m, n \geqslant n_0 \text{ vrijedi } d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Propozicija 24.8

Svaki konvergentan niz u metričkom prostoru (X, d) je Cauchyjev.

Dokaz: Neka $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x^*$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. za $\forall n \geqslant n_0$ vrijedi $d(x_n, x^*) < \frac{\varepsilon}{2}$, pa za $m, n \geqslant n_0$ vrijedi $d(x_m, x_n) \leqslant d(x_m, x^*) + d(x^*, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. □

Napomena: Za razliku od $\mathbb{R}$, u općenitom metričkom prostoru (X, d) nije svaki Cauchyjev niz konvergentan.

Cauchyjevo svojstvo

Cauchyjevo svojstvo se definira jednako kao i u $\mathbb{R}$:

Definicija 24.7

Za niz $(x_n)_n$ u metričkom prostoru (X, d) kaže se da ima *Cauchyjevo svojstvo* ili da je *Cauchyjev niz* ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ za sve $m, n \geqslant n_0$. Dakle,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ takav da } \forall m, n \geqslant n_0 \text{ vrijedi } d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Propozicija 24.8

Svaki konvergentan niz u metričkom prostoru (X, d) je Cauchyjev.

Dokaz: Neka $x_n \xrightarrow{n \to \infty} x^*$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. za $\forall n \geqslant n_0$ vrijedi $d(x_n, x^*) < \frac{\varepsilon}{2}$, pa za $m, n \geqslant n_0$ vrijedi

$$d(x_m, x_n) \leqslant d(x_m, x^*) + d(x^*, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

Napomena: Za razliku od $\mathbb{R}$, u općenitom metričkom prostoru (X, d) nije svaki Cauchyjev niz konvergentan.

Nizovna kompaktnost

Sljedeći nam je cilj naći neke nužne i dovoljne uvjete za kompaktnost u metričkim prostorima.

Definicija 25.1

Za topološki prostor X kažemo da je *nizovno kompaktan* ako svaki niz u X ima gomilište, tj. ima konvergentan podniz.

Da je podskup $A \subseteq X$ nizovno kompaktan znači da je on nizovno kompaktan kao potprostor, dakle u relativnoj topologiji, tj. ako svaki niz u A ima podniz koji konvergira k nekoj točki iz A.

Pokazat ćemo da se u metričkim prostorima kompaktnost podudara s nizovnom kompaktnošću.

Nizovna kompaktnost

Sljedeći nam je cilj naći neke nužne i dovoljne uvjete za kompaktnost u metričkim prostorima.

Definicija 25.1

Za topološki prostor X kažemo da je *nizovno kompaktan* ako svaki niz u X ima gomilište, tj. ima konvergentan podniz.

Da je podskup $A \subseteq X$ nizovno kompaktan znači da je on nizovno kompaktan kao potprostor, dakle u relativnoj topologiji, tj. ako svaki niz u A ima podniz koji konvergira k nekoj točki iz A.

Pokazat ćemo da se u metričkim prostorima kompaktnost podudara s nizovnom kompaktnošću.

Nizovna kompaktnost

Sljedeći nam je cilj naći neke nužne i dovoljne uvjete za kompaktnost u metričkim prostorima.

Definicija 25.1

Za topološki prostor X kažemo da je *nizovno kompaktan* ako svaki niz u X ima gomilište, tj. ima konvergentan podniz.

Da je podskup $A \subseteq X$ nizovno kompaktan znači da je on nizovno kompaktan kao potprostor, dakle u relativnoj topologiji, tj. ako svaki niz u A ima podniz koji konvergira k nekoj točki iz A.

Pokazat ćemo da se u metričkim prostorima kompaktnost podudara s nizovnom kompaktnošću.

Kompaktni metrički prostori su nizovno kompaktni

Zasada možemo dokazati jedan smjer

Propozicija 25.2

Svaki kompaktan metrički prostor je nizovno kompaktan.

Dokaz: Neka je X kompaktan metrički prostor, i pretpostavimo da X nije nizovno kompaktan. To znači da postoji niz $(x_n)_n$ koji nema gomilište, pa prema lemi 24.6 oko svake točke $x \in X$ postoji okolina U_x koja sadrži najviše konačno mnogo članova niza $(x_n)_n$. Kako je X kompaktan, postoje točke $x_1, \dots, x_k$ t.d. je $X = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_k}$, pa kako svaka okolina U_{x_j} sadrži samo konačno mnogo članova niza, to bi značilo da i niz ima samo konačno mnogo članova, tj. da je skup $\mathbb{N}$ konačan, kontradikcija $\square$

Kompaktni metrički prostori su nizovno kompaktni

Zasada možemo dokazati jedan smjer

Propozicija 25.2

Svaki kompaktan metrički prostor je nizovno kompaktan.

Dokaz: Neka je X kompaktan metrički prostor, i pretpostavimo da X nije nizovno kompaktan. To znači da postoji niz $(x_n)_n$ koji nema gomilište, pa prema lemi 24.6 oko svake točke $x \in X$ postoji okolina U_x koja sadrži najviše konačno mnogo članova niza $(x_n)_n$. Kako je X kompaktan, postoje točke $x_1, \ldots, x_k$ t.d. je $X = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_k}$, pa kako svaka okolina U_{x_j} sadrži samo konačno mnogo članova niza, to bi značilo da i niz ima samo konačno mnogo članova, tj. da je skup $\mathbb{N}$ konačan, kontradikcija $\square$

Kompaktni metrički prostori su nizovno kompaktni

Zasada možemo dokazati jedan smjer

Propozicija 25.2

Svaki kompaktan metrički prostor je nizovno kompaktan.

Dokaz: Neka je X kompaktan metrički prostor, i pretpostavimo da X nije nizovno kompaktan. To znači da postoji niz $(x_n)_n$ koji nema gomilište, pa prema lemi 24.6 oko svake točke $x \in X$ postoji okolina U_x koja sadrži najviše konačno mnogo članova niza $(x_n)_n$. Kako je X kompaktan, postoje točke $x_1, \ldots, x_k$ t.d. je $X = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_k}$, pa kako svaka okolina U_{x_j} sadrži samo konačno mnogo članova niza, to bi značilo da i niz ima samo konačno mnogo članova, tj. da je skup $\mathbb{N}$ konačan, kontradikcija $\square$

Kompaktni metrički prostori su nizovno kompaktni

Zasada možemo dokazati jedan smjer

Propozicija 25.2

Svaki kompaktan metrički prostor je nizovno kompaktan.

Dokaz: Neka je X kompaktan metrički prostor, i pretpostavimo da X nije nizovno kompaktan. To znači da postoji niz $(x_n)_n$ koji nema gomilište, pa prema lemi 24.6 oko svake točke $x \in X$ postoji okolina U_x koja sadrži najviše konačno mnogo članova niza $(x_n)_n$. Kako je X kompaktan, postoje točke $x_1, \dots, x_k$ t.d. je $X = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_k}$, pa kako svaka okolina U_{x_j} sadrži samo konačno mnogo članova niza, to bi značilo da i niz ima samo konačno mnogo članova, tj. da je skup $\mathbb{N}$ konačan, kontradikcija $\square$

Bolzano-Weierstrassov teorem za nizove

Kao jednostavnu posljedicu prethodne propozicije dobivamo dobro poznatu tvrdnju

Posljedica 25.3 (Bolzano-Weierstrassov teorem za nizove)

Svaki omeđen niz u $\mathbb{E}^n$ ima konvergentan podniz.

Dokaz: Neka je $(x_n)_n$ omeđen niz u $\mathbb{E}^n$. Skup vrijednosti $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je omeđen, pa je skup $\overline{S}$ omeđen i zatvoren, dakle kompaktan (teorem 20.2). Prema prethodnoj propoziciji $\overline{S}$ je nizovno kompaktan pa niz $(x_n)_n$, koji je niz u S, dakle i u $\overline{S}$, ima konvergentan podniz (čak s limesom u $\overline{S}$). $\square$

Bolzano-Weierstrassov teorem za nizove

Kao jednostavnu posljedicu prethodne propozicije dobivamo dobro poznatu tvrdnju

Posljedica 25.3 (Bolzano-Weierstrassov teorem za nizove)

Svaki omeđen niz u $\mathbb{E}^n$ ima konvergentan podniz.

Dokaz: Neka je $(x_n)_n$ omeđen niz u $\mathbb{E}^n$. Skup vrijednosti $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je omeđen, pa je skup $\overline{S}$ omeđen i zatvoren, dakle kompaktan (teorem 20.2). Prema prethodnoj propoziciji $\overline{S}$ je nizovno kompaktan pa niz $(x_n)_n$, koji je niz u S, dakle i u $\overline{S}$, ima konvergentan podniz (čak s limesom u $\overline{S}$). $\square$

Bolzano-Weierstrassov teorem za nizove

Kao jednostavnu posljedicu prethodne propozicije dobivamo dobro poznatu tvrdnju

Posljedica 25.3 (Bolzano-Weierstrassov teorem za nizove)

Svaki omeđen niz u $\mathbb{E}^n$ ima konvergentan podniz.

Dokaz: Neka je $(x_n)_n$ omeđen niz u $\mathbb{E}^n$. Skup vrijednosti $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je omeđen, pa je skup $\overline{S}$ omeđen i zatvoren, dakle kompaktan (teorem 20.2). Prema prethodnoj propoziciji $\overline{S}$ je nizovno kompaktan pa niz $(x_n)_n$, koji je niz u S, dakle i u $\overline{S}$, ima konvergentan podniz (čak s limesom u $\overline{S}$). $\square$

ε-mreže

Definicija 25.4

Neka je (X, d) metrički prostor i $\varepsilon > 0$. *ε-mreža* za X je podskup $A \subseteq X$ takav da je $X = \bigcup\limits_{a \in A} K(a; \varepsilon)$.

Dakle, ε-mreža je skup centara ε-kugala koje pokrivaju X. Ili, na ε-mrežu možemo gledati kao na skup čvorova t.d. je svaka točka iz X udaljena za manje od ε od nekog od tih čvorova.

Naravno, svaki metrički prostor ima ε-mrežu, i to za svaki $\varepsilon > 0$ — uzmemo $A = X$. Ali zanimljive, i korisne, su ε-mreže sa „što manjim brojem čvorova”.

ε-mreže

Definicija 25.4

Neka je (X, d) metrički prostor i $\varepsilon > 0$. *ε-mreža* za X je podskup $A \subseteq X$ takav da je $X = \bigcup_{a \in A} K(a; \varepsilon)$.

Dakle, ε-mreža je skup centara ε-kugala koje pokrivaju X. Ili, na ε-mrežu možemo gledati kao na skup čvorova t.d. je svaka točka iz X udaljena za manje od ε od nekog od tih čvorova.

Naravno, svaki metrički prostor ima ε-mrežu, i to za svaki $\varepsilon > 0$ — uzmemo $A = X$. Ali zanimljive, i korisne, su ε-mreže sa „što manjim brojem čvorova".

ε-mreže

Definicija 25.4

Neka je (X, d) metrički prostor i $\varepsilon > 0$. *ε-mreža* za X je podskup $A \subseteq X$ takav da je $X = \bigcup_{a \in A} K(a; \varepsilon)$.

Dakle, ε-mreža je skup centara ε-kugala koje pokrivaju X. Ili, na ε-mrežu možemo gledati kao na skup čvorova t.d. je svaka točka iz X udaljena za manje od ε od nekog od tih čvorova.

Naravno, svaki metrički prostor ima ε-mrežu, i to za svaki $\varepsilon > 0$ — uzmemo $A = X$. Ali zanimljive, i korisne, su ε-mreže sa „što manjim brojem čvorova".

Nizovna kompaktnost i ε-mreže

Propozicija 25.5

Ako je (X, d) nizovno kompaktan metrički prostor onda za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačna ε-mreža za X, tj. za svaki $\varepsilon > 0$, X se može pokriti s konačno mnogo ε-kugala.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $\varepsilon > 0$ za koji ne postoji konačna ε-mreža. Neka je $x_1 \in X$ proizvoljna točka. Odaberimo $x_2 \in X$ t.d. je $d(x_2, x_1) > \varepsilon$. Zatim odaberimo $x_3 \in X$ t.d. je $d(x_3, x_1) > \varepsilon$ i $d(x_3, x_2) > \varepsilon$ (takav x_3 postoji jer skup $\{x_1, x_2\}$ nije ε-mreža). Induktivno, za svaki n nalazimo x_n t.d. je $d(x_n, x_k) > \varepsilon$ za sve $k \leqslant n-1$, pa dobivamo niz $(x_n)_n$ t.d. je $d(x_m, x_n) > \varepsilon$ za sve $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$. Taj niz očito nema Cauchyjev podniz, dakle niti konvergentan podniz, protivno pretpostavci da je X nizovno kompaktan. $\square$

Definicija 25.6

Metrički prostor (X, d) je *potpuno omeđen* ili *pretkompaktan* ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačna ε-mreža za X.

Nizovna kompaktnost i ε-mreže

Propozicija 25.5

Ako je (X,d) nizovno kompaktan metrički prostor onda za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačna ε-mreža za X, tj. za svaki $\varepsilon > 0$, X se može pokriti s konačno mnogo ε-kugala.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $\varepsilon > 0$ za koji ne postoji konačna ε-mreža. Neka je $x_1 \in X$ proizvoljna točka. Odaberimo $x_2 \in X$ t.d. je $d(x_2, x_1) > \varepsilon$. Zatim odaberimo $x_3 \in X$ t.d. je $d(x_3, x_1) > \varepsilon$ i $d(x_3, x_2) > \varepsilon$ (takav x_3 postoji jer skup $\{x_1, x_2\}$ nije ε-mreža). Induktivno, za svaki n nalazimo x_n t.d. je $d(x_n, x_k) > \varepsilon$ za sve $k \leqslant n-1$, pa dobivamo niz $(x_n)_n$ t.d. je $d(x_m, x_n) > \varepsilon$ za sve $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$. Taj niz očito nema Cauchyjev podniz, dakle niti konvergentan podniz, protivno pretpostavci da je X nizovno kompaktan. $\square$

Definicija 25.6

Metrički prostor (X,d) je *potpuno omeđen* ili *pretkompaktan* ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačna ε-mreža za X.

Nizovna kompaktnost i ε-mreže

Propozicija 25.5

Ako je (X,d) nizovno kompaktan metrički prostor onda za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačna ε-mreža za X, tj. za svaki $\varepsilon > 0$, X se može pokriti s konačno mnogo ε-kugala.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $\varepsilon > 0$ za koji ne postoji konačna ε-mreža. Neka je $x_1 \in X$ proizvoljna točka. Odaberimo $x_2 \in X$ t.d. je $d(x_2, x_1) > \varepsilon$. Zatim odaberimo $x_3 \in X$ t.d. je $d(x_3, x_1) > \varepsilon$ i $d(x_3, x_2) > \varepsilon$ (takav x_3 postoji jer skup $\{x_1, x_2\}$ nije ε-mreža). Induktivno, za svaki n nalazimo x_n t.d. je $d(x_n, x_k) > \varepsilon$ za sve $k \leq n-1$, pa dobivamo niz $(x_n)_n$ t.d. je $d(x_m, x_n) > \varepsilon$ za sve $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$. Taj niz očito nema Cauchyjev podniz, dakle niti konvergentan podniz, protivno pretpostavci da je X nizovno kompaktan. $\square$

Definicija 25.6

Metrički prostor (X, d) je *potpuno omeđen* ili *pretkompaktan* ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačna ε-mreža za X.

Nizovna kompaktnost i ε-mreže

Propozicija 25.5

Ako je (X,d) nizovno kompaktan metrički prostor onda za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačna ε-mreža za X, tj. za svaki $\varepsilon > 0$, X se može pokriti s konačno mnogo ε-kugala.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $\varepsilon > 0$ za koji ne postoji konačna ε-mreža. Neka je $x_1 \in X$ proizvoljna točka. Odaberimo $x_2 \in X$ t.d. je $d(x_2, x_1) > \varepsilon$. Zatim odaberimo $x_3 \in X$ t.d. je $d(x_3, x_1) > \varepsilon$ i $d(x_3, x_2) > \varepsilon$ (takav x_3 postoji jer skup $\{x_1, x_2\}$ nije ε-mreža). Induktivno, za svaki n nalazimo x_n t.d. je $d(x_n, x_k) > \varepsilon$ za sve $k \leqslant n-1$, pa dobivamo niz $(x_n)_n$ t.d. je $d(x_m, x_n) > \varepsilon$ za sve $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$. Taj niz očito nema Cauchyjev podniz, dakle niti konvergentan podniz, protivno pretpostavci da je X nizovno kompaktan. $\square$

Definicija 25.6

Metrički prostor (X, d) je *potpuno omeđen* ili *pretkompaktan* ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačna ε-mreža za X.

Nizovna kompaktnost i ε-mreže

Propozicija 25.5

Ako je (X, d) nizovno kompaktan metrički prostor onda za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačna ε-mreža za X, tj. za svaki $\varepsilon > 0$, X se može pokriti s konačno mnogo ε-kugala.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $\varepsilon > 0$ za koji ne postoji konačna ε-mreža. Neka je $x_1 \in X$ proizvoljna točka. Odaberimo $x_2 \in X$ t.d. je $d(x_2, x_1) > \varepsilon$. Zatim odaberimo $x_3 \in X$ t.d. je $d(x_3, x_1) > \varepsilon$ i $d(x_3, x_2) > \varepsilon$ (takav x_3 postoji jer skup $\{x_1, x_2\}$ nije ε-mreža). Induktivno, za svaki n nalazimo x_n t.d. je $d(x_n, x_k) > \varepsilon$ za sve $k \leqslant n-1$, pa dobivamo niz $(x_n)_n$ t.d. je $d(x_m, x_n) > \varepsilon$ za sve $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$. Taj niz očito nema Cauchyjev podniz, dakle niti konvergentan podniz, protivno pretpostavci da je X nizovno kompaktan. $\square$

Definicija 25.6

Metrički prostor (X, d) je *potpuno omeđen* ili *pretkompaktan* ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačna ε-mreža za X.

Nizovna kompaktnost i ε-mreže

Propozicija 25.5

Ako je (X, d) nizovno kompaktan metrički prostor onda za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačna ε-mreža za X, tj. za svaki $\varepsilon > 0$, X se može pokriti s konačno mnogo ε-kugala.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $\varepsilon > 0$ za koji ne postoji konačna ε-mreža. Neka je $x_1 \in X$ proizvoljna točka. Odaberimo $x_2 \in X$ t.d. je $d(x_2, x_1) > \varepsilon$. Zatim odaberimo $x_3 \in X$ t.d. je $d(x_3, x_1) > \varepsilon$ i $d(x_3, x_2) > \varepsilon$ (takav x_3 postoji jer skup $\{x_1, x_2\}$ nije ε-mreža). Induktivno, za svaki n nalazimo x_n t.d. je $d(x_n, x_k) > \varepsilon$ za sve $k \leqslant n-1$, pa dobivamo niz $(x_n)_n$ t.d. je $d(x_m, x_n) > \varepsilon$ za sve $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$.
Taj niz očito nema Cauchyjev podniz, dakle niti konvergentan podniz, protivno pretpostavci da je X nizovno kompaktan. $\square$

Definicija 25.6

Metrički prostor (X, d) je *potpuno omeđen* ili *pretkompaktan* ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačna ε-mreža za X.

Nizovna kompaktnost i ε-mreže

Propozicija 25.5

Ako je (X,d) nizovno kompaktan metrički prostor onda za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačna ε-mreža za X, tj. za svaki $\varepsilon > 0$, X se može pokriti s konačno mnogo ε-kugala.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $\varepsilon > 0$ za koji ne postoji konačna ε-mreža. Neka je $x_1 \in X$ proizvoljna točka. Odaberimo $x_2 \in X$ t.d. je $d(x_2, x_1) > \varepsilon$. Zatim odaberimo $x_3 \in X$ t.d. je $d(x_3, x_1) > \varepsilon$ i $d(x_3, x_2) > \varepsilon$ (takav x_3 postoji jer skup $\{x_1, x_2\}$ nije ε-mreža). Induktivno, za svaki n nalazimo x_n t.d. je $d(x_n, x_k) > \varepsilon$ za sve $k \leqslant n-1$, pa dobivamo niz $(x_n)_n$ t.d. je $d(x_m, x_n) > \varepsilon$ za sve $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$. Taj niz očito nema Cauchyjev podniz, dakle niti konvergentan podniz, protivno pretpostavci da je X nizovno kompaktan. $\square$

Definicija 25.6

Metrički prostor (X, d) je *potpuno omeđen* ili *pretkompaktan* ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačna ε-mreža za X.

Nizovna kompaktnost i ε-mreže

Propozicija 25.5

Ako je (X,d) nizovno kompaktan metrički prostor onda za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačna ε-mreža za X, tj. za svaki $\varepsilon > 0$, X se može pokriti s konačno mnogo ε-kugala.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $\varepsilon > 0$ za koji ne postoji konačna ε-mreža. Neka je $x_1 \in X$ proizvoljna točka. Odaberimo $x_2 \in X$ t.d. je $d(x_2, x_1) > \varepsilon$. Zatim odaberimo $x_3 \in X$ t.d. je $d(x_3, x_1) > \varepsilon$ i $d(x_3, x_2) > \varepsilon$ (takav x_3 postoji jer skup $\{x_1, x_2\}$ nije ε-mreža). Induktivno, za svaki n nalazimo x_n t.d. je $d(x_n, x_k) > \varepsilon$ za sve $k \leqslant n-1$, pa dobivamo niz $(x_n)_n$ t.d. je $d(x_m, x_n) > \varepsilon$ za sve $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$. Taj niz očito nema Cauchyjev podniz, dakle niti konvergentan podniz, protivno pretpostavci da je X nizovno kompaktan. $\square$

Definicija 25.6

Metrički prostor (X, d) je *potpuno omeđen* ili *pretkompaktan* ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačna ε-mreža za X.

Lebesgueov broj

Definicija 25.7

Neka je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač metričkog prostora (X, d). Realan broj $\lambda > 0$ je *Lebesgueov broj* pokrivača $\mathcal{U}$ ako za svaki skup $A \subseteq X$ takav da je $\operatorname{diam} A < \lambda$, postoji $U \in \mathcal{U}$ t.d. je $A \subseteq U$.

Primjer 25.8

Ne mora svaki otvoren pokrivač nekog metričkog prostora imati Lebesgueov broj. Naprimjer, pokrivač $\{\langle \frac{1}{n}, 1\rangle : n \geqslant 2\}$ intervala $\langle 0, 1\rangle$ nema Lebesgueov broj.

Lebesgueov broj

Definicija 25.7

Neka je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač metričkog prostora (X, d). Realan broj $\lambda > 0$ je *Lebesgueov broj* pokrivača $\mathcal{U}$ ako za svaki skup $A \subseteq X$ takav da je $\operatorname{diam} A < \lambda$, postoji $U \in \mathcal{U}$ t.d. je $A \subseteq U$.

Primjer 25.8

Ne mora svaki otvoren pokrivač nekog metričkog prostora imati Lebesgueov broj. Naprimjer, pokrivač $\{\langle \frac{1}{n}, 1\rangle : n \geqslant 2\}$ intervala $\langle 0, 1\rangle$ nema Lebesgueov broj.

Zaista, niti za jedan $\lambda > 0$ ne postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\langle 0, \lambda\rangle \subseteq \langle \frac{1}{n}, 1\rangle$.

Lebesgueov broj

Definicija 25.7

Neka je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač metričkog prostora (X, d). Realan broj $\lambda > 0$ je *Lebesgueov broj* pokrivača $\mathcal{U}$ ako za svaki skup $A \subseteq X$ takav da je $\operatorname{diam} A < \lambda$, postoji $U \in \mathcal{U}$ t.d. je $A \subseteq U$.

Primjer 25.8

Ne mora svaki otvoren pokrivač nekog metričkog prostora imati Lebesgueov broj. Naprimjer, pokrivač $\left\{\langle \frac{1}{n}, 1\rangle : n \geqslant 2\right\}$ intervala $\langle 0, 1\rangle$ nema Lebesgueov broj.

Zaista, niti za jedan $\lambda > 0$ ne postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\langle 0, \lambda\rangle \subseteq \langle \frac{1}{n}, 1\rangle$.

Lema o Lebesgueovu broju

Teorem 25.9 (Lema o Lebesgueovu broju)

Za svaki otvoren pokrivač nizovno kompaktnog metričkog prostora (X, d) *postoji Lebesgueov broj.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $\mathscr{U}$ otvoren pokrivač za koji ne postoji Lebesgueov broj. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in X$ t.d. $K(x_n; \frac{1}{n})$ nije sadržana niti u jednom članu pokrivača $\mathscr{U}$ (inače bi npr. $\frac{1}{n}$ bio Lebesgueov broj).
Neka je $(x_{n_k})_k$ podniz s limesom x_0 i neka je $U \in \mathscr{U}$ t.d. je $x_0 \in U$.
U je otvoren, pa neka je $m \in \mathbb{N}$ t.d. je $K(x_0; \frac{2}{m}) \subseteq U$, i neka je $k_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $x_{n_k} \in K(x_0; \frac{1}{m})$ za sve $k \geqslant k_0$.
Odaberimo $k \geqslant k_0$ t.d. je $n_k \geqslant m$.

Tvrdnja: $K(x_{n_k}; \frac{1}{n_k}) \subseteq K(x_0; \frac{2}{m})$. Zaista, za svaki $y \in K(x_{n_k}; \frac{1}{n_k})$ je $d(y, x_0) \leqslant d(y, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) < \frac{1}{n_k} + \frac{1}{m} \leqslant \frac{2}{m}$. △

Dakle, $K(x_{n_k}; \frac{1}{n_k}) \subseteq K(x_0; \frac{2}{m}) \subseteq U$, suprotno izboru točke x_{n_k}. □

Lema o Lebesgueovu broju

Teorem 25.9 (Lema o Lebesgueovu broju)

Za svaki otvoren pokrivač nizovno kompaktnog metričkog prostora (X, d) postoji Lebesgueov broj.

Dokaz: Pretpostavimo da je $\mathscr{U}$ otvoren pokrivač za koji ne postoji Lebesgueov broj. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in X$ t.d. $K\left(x_n; \frac{1}{n}\right)$ nije sadržana niti u jednom članu pokrivača $\mathscr{U}$ (inače bi npr. $\frac{1}{n}$ bio Lebesgueov broj).

Neka je $(x_{n_k})_k$ podniz s limesom x_0 i neka je $U \in \mathscr{U}$ t.d. je $x_0 \in U$. U je otvoren, pa neka je $m \in \mathbb{N}$ t.d. je $K\left(x_0; \frac{2}{m}\right) \subseteq U$, i neka je $k_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $x_{n_k} \in K\left(x_0; \frac{1}{m}\right)$ za sve $k \geqslant k_0$.
Odaberimo $k \geqslant k_0$ t.d. je $n_k \geqslant m$.

Tvrdnja: $K\left(x_{n_k}; \frac{1}{n_k}\right) \subseteq K\left(x_0; \frac{2}{m}\right)$. Zaista, za svaki $y \in K\left(x_{n_k}; \frac{1}{n_k}\right)$ je
$d(y, x_0) \leqslant d(y, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) < \frac{1}{n_k} + \frac{1}{m} \leqslant \frac{2}{m}$. △

Dakle, $K\left(x_{n_k}; \frac{1}{n_k}\right) \subseteq K\left(x_0; \frac{2}{m}\right) \subseteq U$, suprotno izboru točke x_{n_k}. □

Lema o Lebesgueovu broju

Teorem 25.9 (Lema o Lebesgueovu broju)

Za svaki otvoren pokrivač nizovno kompaktnog metričkog prostora (X, d) postoji Lebesgueov broj.

Dokaz: Pretpostavimo da je $\mathscr{U}$ otvoren pokrivač za koji ne postoji Lebesgueov broj. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in X$ t.d. $K\left(x_n; \frac{1}{n}\right)$ nije sadržana niti u jednom članu pokrivača $\mathscr{U}$ (inače bi npr. $\frac{1}{n}$ bio Lebesgueov broj). Neka je $(x_{n_k})_k$ podniz s limesom x_0 i neka je $U \in \mathscr{U}$ t.d. je $x_0 \in U$.
U je otvoren, pa neka je $m \in \mathbb{N}$ t.d. je $K\left(x_0; \frac{2}{m}\right) \subseteq U$, i neka je $k_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $x_{n_k} \in K\left(x_0; \frac{1}{m}\right)$ za sve $k \geq k_0$.
Odaberimo $k \geq k_0$ t.d. je $n_k \geq m$.

Tvrdnja: $K\left(x_{n_k}; \frac{1}{n_k}\right) \subseteq K\left(x_0; \frac{2}{m}\right)$. Zaista, za svaki $y \in K\left(x_{n_k}; \frac{1}{n_k}\right)$ je $d(y, x_0) \leq d(y, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) < \frac{1}{n_k} + \frac{1}{m} \leq \frac{2}{m}$. △

Dakle, $K\left(x_{n_k}; \frac{1}{n_k}\right) \subseteq K\left(x_0; \frac{2}{m}\right) \subseteq U$, suprotno izboru točke x_{n_k}. □

Lema o Lebesgueovu broju

Teorem 25.9 (Lema o Lebesgueovu broju)

Za svaki otvoren pokrivač nizovno kompaktnog metričkog prostora (X, d) *postoji Lebesgueov broj.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $\mathscr{U}$ otvoren pokrivač za koji ne postoji Lebesgueov broj. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in X$ t.d. $K\left(x_n; \frac{1}{n}\right)$ nije sadržana niti u jednom članu pokrivača $\mathscr{U}$ (inače bi npr. $\frac{1}{n}$ bio Lebesgueov broj). Neka je $(x_{n_k})_k$ podniz s limesom x_0 i neka je $U \in \mathscr{U}$ t.d. je $x_0 \in U$. U je otvoren, pa neka je $m \in \mathbb{N}$ t.d. je $K\left(x_0; \frac{2}{m}\right) \subseteq U$, i neka je $k_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $x_{n_k} \in K\left(x_0; \frac{1}{m}\right)$ za sve $k \geqslant k_0$.

Odaberimo $k \geqslant k_0$ t.d. je $n_k \geqslant m$.

Tvrdnja: $K\left(x_{n_k}; \frac{1}{n_k}\right) \subseteq K\left(x_0; \frac{2}{m}\right)$. Zaista, za svaki $y \in K\left(x_{n_k}; \frac{1}{n_k}\right)$ je $d(y, x_0) \leqslant d(y, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) < \frac{1}{n_k} + \frac{1}{m} \leqslant \frac{2}{m}$. △

Dakle, $K\left(x_{n_k}; \frac{1}{n_k}\right) \subseteq K\left(x_0; \frac{2}{m}\right) \subseteq U$, suprotno izboru točke x_{n_k}. □

Lema o Lebesgueovu broju

Teorem 25.9 (Lema o Lebesgueovu broju)

Za svaki otvoren pokrivač nizovno kompaktnog metričkog prostora (X, d) postoji Lebesgueov broj.

Dokaz: Pretpostavimo da je $\mathscr{U}$ otvoren pokrivač za koji ne postoji Lebesgueov broj. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in X$ t.d. $K\left(x_n; \frac{1}{n}\right)$ nije sadržana niti u jednom članu pokrivača $\mathscr{U}$ (inače bi npr. $\frac{1}{n}$ bio Lebesgueov broj).
Neka je $(x_{n_k})_k$ podniz s limesom x_0 i neka je $U \in \mathscr{U}$ t.d. je $x_0 \in U$. U je otvoren, pa neka je $m \in \mathbb{N}$ t.d. je $K\left(x_0; \frac{2}{m}\right) \subseteq U$, i neka je $k_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $x_{n_k} \in K\left(x_0; \frac{1}{m}\right)$ za sve $k \geqslant k_0$.
Odaberimo $k \geqslant k_0$ t.d. je $n_k \geqslant m$.

Tvrdnja: $K\left(x_{n_k}; \frac{1}{n_k}\right) \subseteq K\left(x_0; \frac{2}{m}\right)$. Zaista, za svaki $y \in K\left(x_{n_k}; \frac{1}{n_k}\right)$ je $d(y, x_0) \leqslant d(y, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) < \frac{1}{n_k} + \frac{1}{m} \leqslant \frac{2}{m}$. △
Dakle, $K\left(x_{n_k}; \frac{1}{n_k}\right) \subseteq K\left(x_0; \frac{2}{m}\right) \subseteq U$, suprotno izboru točke x_{n_k}. □

Lema o Lebesgueovu broju

Teorem 25.9 (Lema o Lebesgueovu broju)

Za svaki otvoren pokrivač nizovno kompaktnog metričkog prostora (X, d) postoji Lebesgueov broj.

Dokaz: Pretpostavimo da je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač za koji ne postoji Lebesgueov broj. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in X$ t.d. $K\left(x_n; \frac{1}{n}\right)$ nije sadržana niti u jednom članu pokrivača $\mathcal{U}$ (inače bi npr. $\frac{1}{n}$ bio Lebesgueov broj).
Neka je $(x_{n_k})_k$ podniz s limesom x_0 i neka je $U \in \mathcal{U}$ t.d. je $x_0 \in U$.
U je otvoren, pa neka je $m \in \mathbb{N}$ t.d. je $K\left(x_0; \frac{2}{m}\right) \subseteq U$, i neka je $k_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $x_{n_k} \in K\left(x_0; \frac{1}{m}\right)$ za sve $k \geqslant k_0$.
Odaberimo $k \geqslant k_0$ t.d. je $n_k \geqslant m$.

Tvrdnja: $K\left(x_{n_k}; \frac{1}{n_k}\right) \subseteq K\left(x_0; \frac{2}{m}\right)$. Zaista, za svaki $y \in K\left(x_{n_k}; \frac{1}{n_k}\right)$ je
$d(y, x_0) \leqslant d(y, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) < \frac{1}{n_k} + \frac{1}{m} \leqslant \frac{2}{m}$. △

Dakle, $K\left(x_{n_k}; \frac{1}{n_k}\right) \subseteq K\left(x_0; \frac{2}{m}\right) \subseteq U$, suprotno izboru točke x_{n_k}. □

Lema o Lebesgueovu broju

Teorem 25.9 (Lema o Lebesgueovu broju)

Za svaki otvoren pokrivač nizovno kompaktnog metričkog prostora (X, d) postoji Lebesgueov broj.

Dokaz: Pretpostavimo da je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač za koji ne postoji Lebesgueov broj. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in X$ t.d. $K(x_n; \frac{1}{n})$ nije sadržana niti u jednom članu pokrivača $\mathcal{U}$ (inače bi npr. $\frac{1}{n}$ bio Lebesgueov broj).
Neka je $(x_{n_k})_k$ podniz s limesom x_0 i neka je $U \in \mathcal{U}$ t.d. je $x_0 \in U$.
U je otvoren, pa neka je $m \in \mathbb{N}$ t.d. je $K(x_0; \frac{2}{m}) \subseteq U$, i neka je $k_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $x_{n_k} \in K(x_0; \frac{1}{m})$ za sve $k \geqslant k_0$.
Odaberimo $k \geqslant k_0$ t.d. je $n_k \geqslant m$.

Tvrdnja: $K(x_{n_k}; \frac{1}{n_k}) \subseteq K(x_0; \frac{2}{m})$. Zaista, za svaki $y \in K(x_{n_k}; \frac{1}{n_k})$ je $d(y, x_0) \leqslant d(y, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) < \frac{1}{n_k} + \frac{1}{m} \leqslant \frac{2}{m}$. △

Dakle, $K(x_{n_k}; \frac{1}{n_k}) \subseteq K(x_0; \frac{2}{m}) \subseteq U$, suprotno izboru točke x_{n_k}. □

Lema o Lebesgueovu broju

Teorem 25.9 (Lema o Lebesgueovu broju)

Za svaki otvoren pokrivač nizovno kompaktnog metričkog prostora (X, d) postoji Lebesgueov broj.

Dokaz: Pretpostavimo da je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač za koji ne postoji Lebesgueov broj. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in X$ t.d. $K\left(x_n; \frac{1}{n}\right)$ nije sadržana niti u jednom članu pokrivača $\mathcal{U}$ (inače bi npr. $\frac{1}{n}$ bio Lebesgueov broj).
Neka je $(x_{n_k})_k$ podniz s limesom x_0 i neka je $U \in \mathcal{U}$ t.d. je $x_0 \in U$. U je otvoren, pa neka je $m \in \mathbb{N}$ t.d. je $K\left(x_0; \frac{2}{m}\right) \subseteq U$, i neka je $k_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $x_{n_k} \in K\left(x_0; \frac{1}{m}\right)$ za sve $k \geqslant k_0$.
Odaberimo $k \geqslant k_0$ t.d. je $n_k \geqslant m$.

Tvrdnja: $K\left(x_{n_k}; \frac{1}{n_k}\right) \subseteq K\left(x_0; \frac{2}{m}\right)$. Zaista, za svaki $y \in K\left(x_{n_k}; \frac{1}{n_k}\right)$ je $d(y, x_0) \leqslant d(y, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) < \frac{1}{n_k} + \frac{1}{m} \leqslant \frac{2}{m}$. △

Dakle, $K\left(x_{n_k}; \frac{1}{n_k}\right) \subseteq K\left(x_0; \frac{2}{m}\right) \subseteq U$, suprotno izboru točke x_{n_k}. □

Kompaktnost *vs.* nizovna kompaktnost

U metričkim prostorima nizovi definiraju topološku strukturu, pa je bilo za očekivati da se i kompaktnost može karakterizirati nizovima.

Teorem 25.10

Metrički prostor je kompaktan ako i samo ako je nizovno kompaktan.

Dokaz: $\Rightarrow$ Ovaj smjer je upravo tvrdnja propozicije 25.2.

$\Leftarrow$ Neka je $\mathscr{U}$ proizvoljan otvoren pokrivač metričkog prostora (X, d). Neka je λ Lebesgueov broj pokrivača $\mathscr{U}$ i neka je $\{x_1, \dots, x_n\}$ $\frac{\lambda}{2}$-mreža za X (propozicija 25.5). Prema definiciji Lebesgueova broja, postoje $U_k \in \mathscr{U}$ t.d. je $K\left(x_k; \frac{\lambda}{2}\right) \subseteq U_k$, pa je

$$X = \bigcup_{k=1}^{n} K\left(x_k; \tfrac{\lambda}{2}\right) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_k,$$

te je $\{U_1, \dots, U_n\}$ konačan potpokrivač od $\mathscr{U}$. $\square$

Kompaktnost *vs.* nizovna kompaktnost

U metričkim prostorima nizovi definiraju topološku strukturu, pa je bilo za očekivati da se i kompaktnost može karakterizirati nizovima.

Teorem 25.10

Metrički prostor je kompaktan ako i samo ako je nizovno kompaktan.

Dokaz: $\Rightarrow$ Ovaj smjer je upravo tvrdnja propozicije 25.2.

$\Leftarrow$ Neka je $\mathcal{U}$ proizvoljan otvoren pokrivač metričkog prostora (X, d). Neka je λ Lebesgueov broj pokrivača $\mathcal{U}$ i neka je $\{x_1, \ldots, x_n\}$ $\frac{\lambda}{2}$-mreža za X (propozicija 25.5). Prema definiciji Lebesgueova broja, postoje $U_k \in \mathcal{U}$ t.d. je $K\left(x_k; \frac{\lambda}{2}\right) \subseteq U_k$, pa je

$$X = \bigcup_{k=1}^{n} K\left(x_k; \tfrac{\lambda}{2}\right) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_k,$$

te je $\{U_1, \ldots, U_n\}$ konačan potpokrivač od $\mathcal{U}$. $\square$

Kompaktnost *vs.* nizovna kompaktnost

U metričkim prostorima nizovi definiraju topološku strukturu, pa je bilo za očekivati da se i kompaktnost može karakterizirati nizovima.

Teorem 25.10

Metrički prostor je kompaktan ako i samo ako je nizovno kompaktan.

Dokaz: $\Rightarrow$ Ovaj smjer je upravo tvrdnja propozicije 25.2.

$\Leftarrow$ Neka je $\mathscr{U}$ proizvoljan otvoren pokrivač metričkog prostora (X, d). Neka je λ Lebesgueov broj pokrivača $\mathscr{U}$ i neka je $\{x_1, \ldots, x_n\}$ $\frac{\lambda}{2}$-mreža za X (propozicija 25.5). Prema definiciji Lebesgueova broja, postoje $U_k \in \mathscr{U}$ t.d. je $K(x_k; \frac{\lambda}{2}) \subseteq U_k$, pa je

$$X = \bigcup_{k=1}^{n} K(x_k; \tfrac{\lambda}{2}) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_k,$$

te je $\{U_1, \ldots, U_n\}$ konačan potpokrivač od $\mathscr{U}$. $\square$

Kompaktnost *vs.* nizovna kompaktnost

U metričkim prostorima nizovi definiraju topološku strukturu, pa je bilo za očekivati da se i kompaktnost može karakterizirati nizovima.

Teorem 25.10

Metrički prostor je kompaktan ako i samo ako je nizovno kompaktan.

Dokaz: $\Rightarrow$ Ovaj smjer je upravo tvrdnja propozicije 25.2.

$\Leftarrow$ Neka je $\mathscr{U}$ proizvoljan otvoren pokrivač metričkog prostora (X, d). Neka je λ Lebesgueov broj pokrivača $\mathscr{U}$ i neka je $\{x_1, \ldots, x_n\}$ $\frac{\lambda}{2}$-mreža za X (propozicija 25.5). Prema definiciji Lebesgueova broja, postoje $U_k \in \mathscr{U}$ t.d. je $K(x_k; \frac{\lambda}{2}) \subseteq U_k$, pa je

$$X = \bigcup_{k=1}^{n} K(x_k; \tfrac{\lambda}{2}) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_k,$$

te je $\{U_1, \ldots, U_n\}$ konačan potpokrivač od $\mathscr{U}$. $\square$

Kompaktnost *vs.* nizovna kompaktnost

U metričkim prostorima nizovi definiraju topološku strukturu, pa je bilo za očekivati da se i kompaktnost može karakterizirati nizovima.

Teorem 25.10

Metrički prostor je kompaktan ako i samo ako je nizovno kompaktan.

Dokaz: $\Rightarrow$ Ovaj smjer je upravo tvrdnja propozicije 25.2.

$\Leftarrow$ Neka je $\mathscr{U}$ proizvoljan otvoren pokrivač metričkog prostora (X, d). Neka je λ Lebesgueov broj pokrivača $\mathscr{U}$ i neka je $\{x_1, \ldots, x_n\}$ $\frac{\lambda}{2}$-mreža za X (propozicija 25.5). Prema definiciji Lebesgueova broja, postoje $U_k \in \mathscr{U}$ t.d. je $K(x_k; \frac{\lambda}{2}) \subseteq U_k$, pa je

$$X = \bigcup_{k=1}^{n} K(x_k; \tfrac{\lambda}{2}) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_k,$$

te je $\{U_1, \ldots, U_n\}$ konačan potpokrivač od $\mathscr{U}$. $\square$

Kompaktnost *vs.* nizovna kompaktnost

U metričkim prostorima nizovi definiraju topološku strukturu, pa je bilo za očekivati da se i kompaktnost može karakterizirati nizovima.

Teorem 25.10

Metrički prostor je kompaktan ako i samo ako je nizovno kompaktan.

Dokaz: $\Rightarrow$ Ovaj smjer je upravo tvrdnja propozicije 25.2.

$\Leftarrow$ Neka je $\mathscr{U}$ proizvoljan otvoren pokrivač metričkog prostora (X, d). Neka je λ Lebesgueov broj pokrivača $\mathscr{U}$ i neka je $\{x_1, \ldots, x_n\}$ $\frac{\lambda}{2}$-mreža za X (propozicija 25.5). Prema definiciji Lebesgueova broja, postoje $U_k \in \mathscr{U}$ t.d. je $K\left(x_k; \frac{\lambda}{2}\right) \subseteq U_k$, pa je

$$X = \bigcup_{k=1}^{n} K\left(x_k; \tfrac{\lambda}{2}\right) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_k,$$

te je $\{U_1, \ldots, U_n\}$ konačan potpokrivač od $\mathscr{U}$. $\square$

7 UNIFORMNA KONVERGENCIJA

- Uniformna konvergencija

Motivacija

Mnoge funkcije u analizi su definirane, ili su dobivene kao rješenja diferencijalnih ili nekih drugih jednadžbi, kao limesi nizova, ili sume redova, „jednostavnijih" funkcija. Problem je u tome što limes niza (ili suma reda) neprekidnih funkcija nije uvijek neprekidna funkcija.

Primjer 26.1

Standardni jednostavni primjer konvergentnog niza neprekidnih funkcija čiji limes nije neprekidna funkcija je niz funkcija:

$$f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R} \text{ definiranih s } f_n(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N},$$

Motivacija

Mnoge funkcije u analizi su definirane, ili su dobivene kao rješenja diferencijalnih ili nekih drugih jednadžbi, kao limesi nizova, ili sume redova, „jednostavnijih" funkcija. Problem je u tome što limes niza (ili suma reda) neprekidnih funkcija nije uvijek neprekidna funkcija.

Primjer 26.1

Standardni jednostavni primjer konvergentnog niza neprekidnih funkcija čiji limes nije neprekidna funkcija je niz funkcija:

$$f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R} \text{ definiranih s } f_n(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N},$$

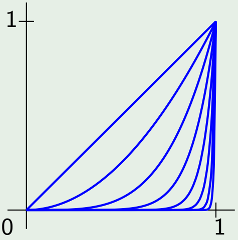
Motivacija

Mnoge funkcije u analizi su definirane, ili su dobivene kao rješenja diferencijalnih ili nekih drugih jednadžbi, kao limesi nizova, ili sume redova, „jednostavnijih" funkcija. Problem je u tome što limes niza (ili suma reda) neprekidnih funkcija nije uvijek neprekidna funkcija.

Primjer 26.1

Standardni jednostavni primjer konvergentnog niza neprekidnih funkcija čiji limes nije neprekidna funkcija je niz funkcija:

$$f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R} \text{ definiranih s } f_n(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N},$$



čiji je limes $f(x) = \begin{cases} 0\,, & x \in [0,1\rangle \\ 1\,, & x = 1 \end{cases}$.

grafovi funkcija f_n
za $n = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$.

Uniformna konvergencija

Definicija 26.2

Neka je (Y, d) metrički prostor. Niz funkcija $f_n\colon X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, *konvergira uniformno* funkciji $f\colon X \to Y$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $x \in X$ i sve $n \geqslant n_0$ vrijedi $d\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon$.

Dakle: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. $\forall x \in X\ \big(n \geqslant n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon\big)$.

Pisat ćemo $(f_n)_n \rightrightarrows f$.

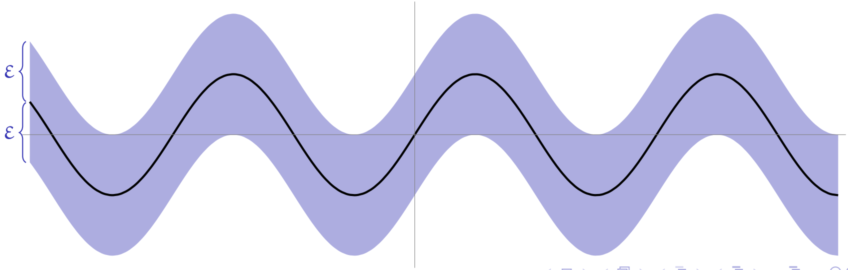
Uniformna konvergencija

Definicija 26.2

Neka je (Y, d) metrički prostor. Niz funkcija $f_n \colon X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, *konvergira uniformno* funkciji $f \colon X \to Y$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $x \in X$ i sve $n \geqslant n_0$ vrijedi $d\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon$.

Dakle: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. $\forall x \in X\ \big(n \geqslant n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon\big)$.

Pisat ćemo $(f_n)_n \rightrightarrows f$.



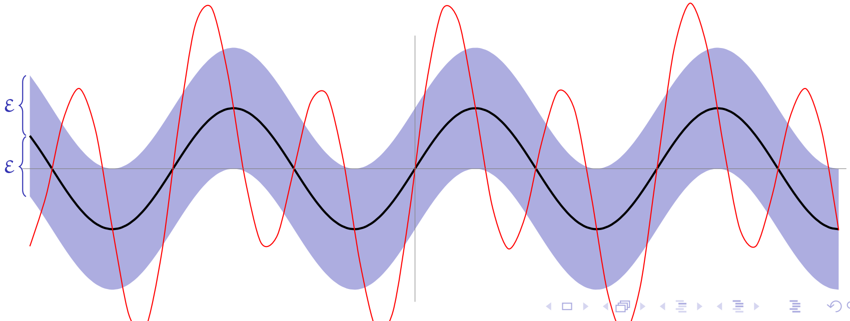
Uniformna konvergencija

Definicija 26.2

Neka je (Y, d) metrički prostor. Niz funkcija $f_n \colon X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, *konvergira uniformno* funkciji $f \colon X \to Y$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $x \in X$ i sve $n \geqslant n_0$ vrijedi $d\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon$.

Dakle: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. $\forall x \in X\ \big(n \geqslant n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon\big)$.

Pisat ćemo $(f_n)_n \rightrightarrows f$.



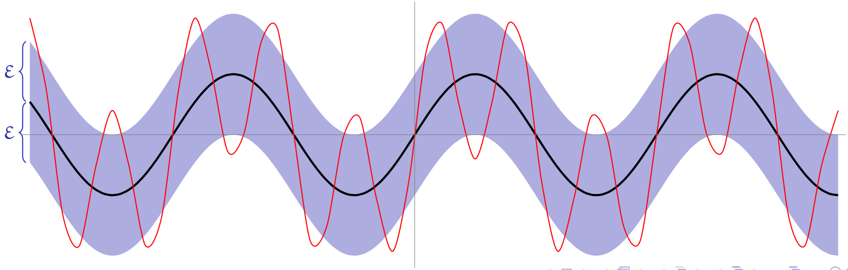
Uniformna konvergencija

Definicija 26.2

Neka je (Y, d) metrički prostor. Niz funkcija $f_n \colon X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, *konvergira uniformno* funkciji $f \colon X \to Y$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $x \in X$ i sve $n \geqslant n_0$ vrijedi $d\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon$.

Dakle: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. $\forall x \in X\ \big(n \geqslant n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon\big)$.

Pisat ćemo $(f_n)_n \rightrightarrows f$.



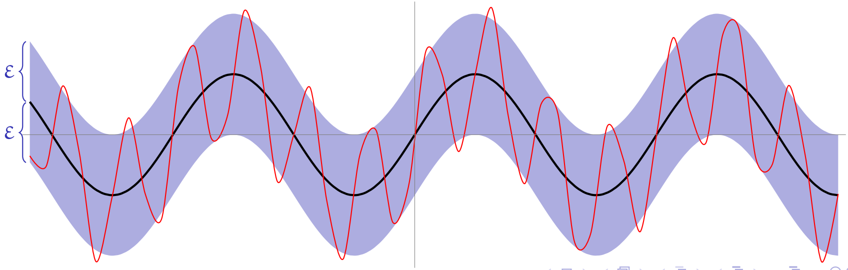
Uniformna konvergencija

Definicija 26.2

Neka je (Y, d) metrički prostor. Niz funkcija $f_n\colon X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, *konvergira uniformno* funkciji $f\colon X \to Y$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $x \in X$ i sve $n \geqslant n_0$ vrijedi $d\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon$.

Dakle: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. $\forall x \in X\ \big(n \geqslant n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon\big)$.

Pisat ćemo $(f_n)_n \rightrightarrows f$.



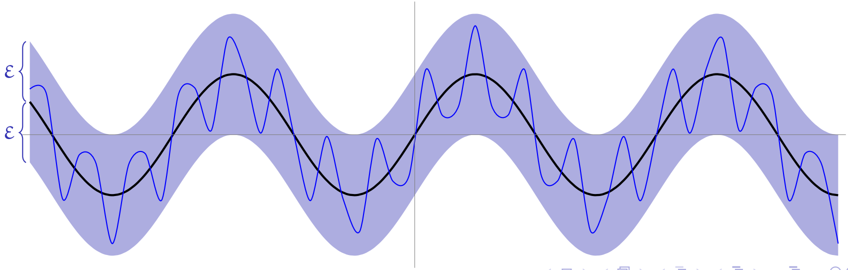
Uniformna konvergencija

Definicija 26.2

Neka je (Y, d) metrički prostor. Niz funkcija $f_n \colon X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, *konvergira uniformno* funkciji $f \colon X \to Y$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $x \in X$ i sve $n \geqslant n_0$ vrijedi $d\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon$.

Dakle: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. $\forall x \in X\ \big(n \geqslant n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon\big)$.

Pisat ćemo $(f_n)_n \rightrightarrows f$.



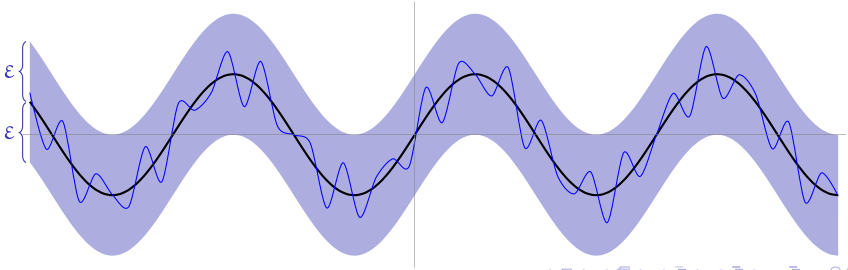
Uniformna konvergencija

Definicija 26.2

Neka je (Y, d) metrički prostor. Niz funkcija $f_n\colon X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, *konvergira uniformno* funkciji $f\colon X \to Y$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $x \in X$ i sve $n \geqslant n_0$ vrijedi $d\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon$.

Dakle: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. $\forall x \in X\ \big(n \geqslant n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon\big)$.

Pisat ćemo $(f_n)_n \rightrightarrows f$.



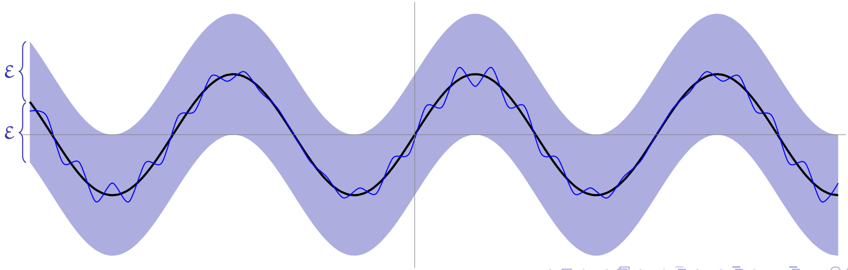
Uniformna konvergencija

Definicija 26.2

Neka je (Y, d) metrički prostor. Niz funkcija $f_n \colon X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, *konvergira uniformno* funkciji $f \colon X \to Y$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $x \in X$ i sve $n \geqslant n_0$ vrijedi $d\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon$.

Dakle: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. $\forall x \in X\ \big(n \geqslant n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon\big)$.

Pisat ćemo $(f_n)_n \rightrightarrows f$.



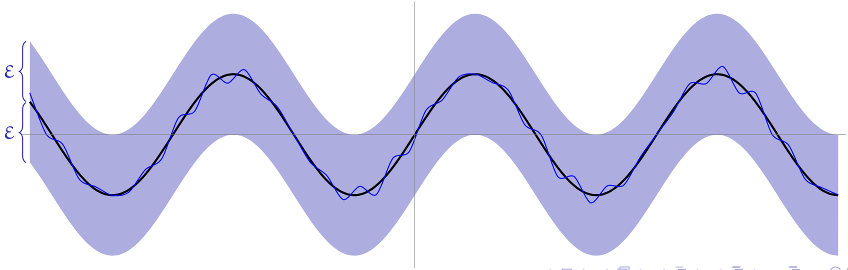
Uniformna konvergencija

Definicija 26.2

Neka je (Y, d) metrički prostor. Niz funkcija $f_n\colon X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, *konvergira uniformno* funkciji $f\colon X \to Y$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $x \in X$ i sve $n \geqslant n_0$ vrijedi $d\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon$.

Dakle: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. $\forall x \in X\ \big(n \geqslant n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon\big)$.

Pisat ćemo $(f_n)_n \rightrightarrows f$.



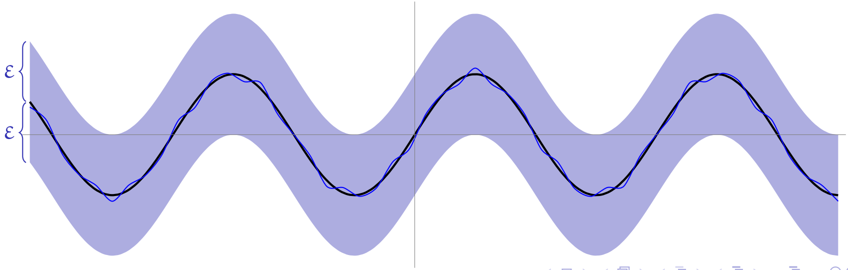
Uniformna konvergencija

Definicija 26.2

Neka je (Y, d) metrički prostor. Niz funkcija $f_n \colon X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, *konvergira uniformno* funkciji $f \colon X \to Y$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $x \in X$ i sve $n \geqslant n_0$ vrijedi $d\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon$.

Dakle: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. $\forall x \in X\ \big(n \geqslant n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon\big)$.

Pisat ćemo $(f_n)_n \rightrightarrows f$.



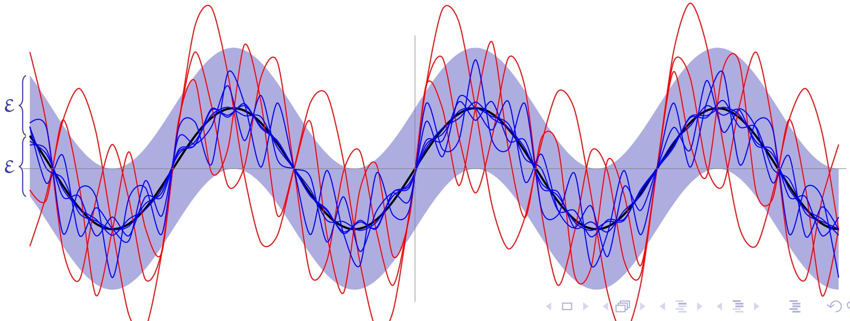
Uniformna konvergencija

Definicija 26.2

Neka je (Y, d) metrički prostor. Niz funkcija $f_n \colon X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, *konvergira uniformno* funkciji $f \colon X \to Y$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $x \in X$ i sve $n \geqslant n_0$ vrijedi $d\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon$.

Dakle: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. $\forall x \in X\ \big(n \geqslant n_0 \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon\big)$.

Pisat ćemo $(f_n)_n \rightrightarrows f$.



Niz funkcija $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, ne konvergira uniformno

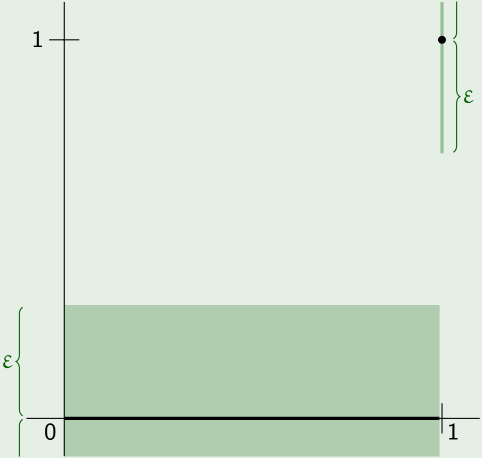
Primjer 26.3

Niz funkcija $(f_n)_n$ iz primjera 26.1 ne konvergira uniformno na $[0, 1]$.

Niz funkcija $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, ne konvergira uniformno

Primjer 26.3

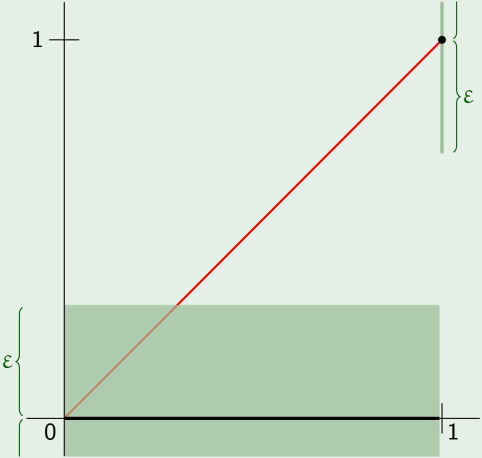
Niz funkcija $(f_n)_n$ iz primjera 26.1 ne konvergira uniformno na $[0, 1]$.



Niz funkcija $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, ne konvergira uniformno

Primjer 26.3

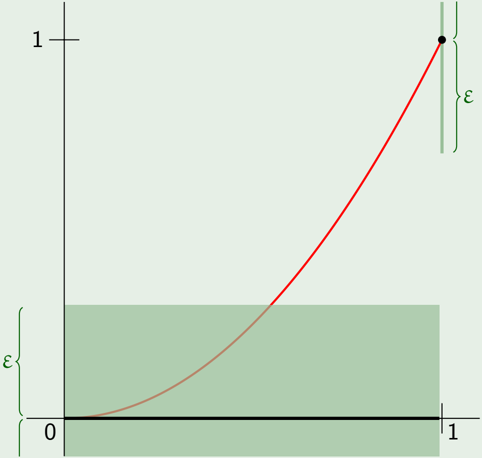
Niz funkcija $(f_n)_n$ iz primjera 26.1 ne konvergira uniformno na $[0, 1]$.



Niz funkcija $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, ne konvergira uniformno

Primjer 26.3

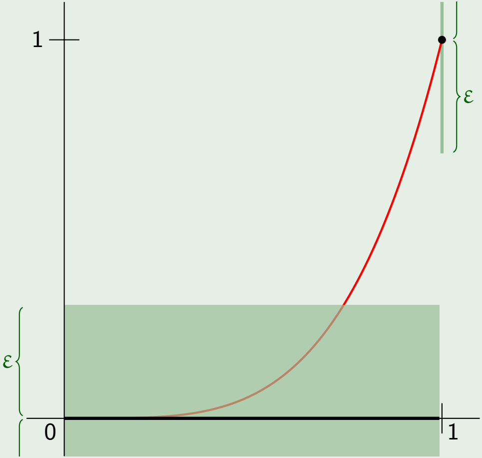
Niz funkcija $(f_n)_n$ iz primjera 26.1 ne konvergira uniformno na $[0, 1]$.



Niz funkcija $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, ne konvergira uniformno

Primjer 26.3

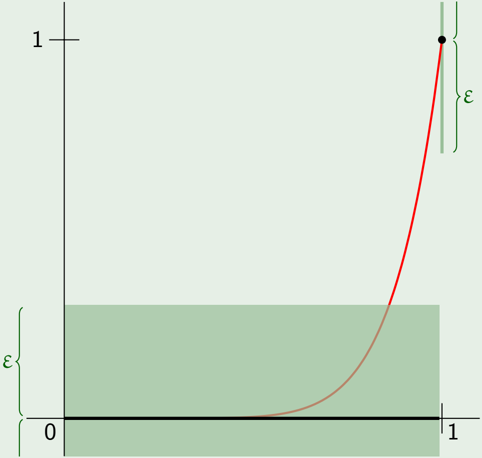
Niz funkcija $(f_n)_n$ iz primjera 26.1 ne konvergira uniformno na $[0, 1]$.



Niz funkcija $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, ne konvergira uniformno

Primjer 26.3

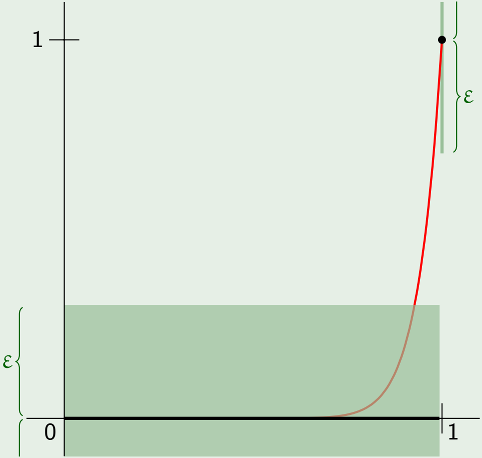
Niz funkcija $(f_n)_n$ iz primjera 26.1 ne konvergira uniformno na $[0, 1]$.



Niz funkcija $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, ne konvergira uniformno

Primjer 26.3

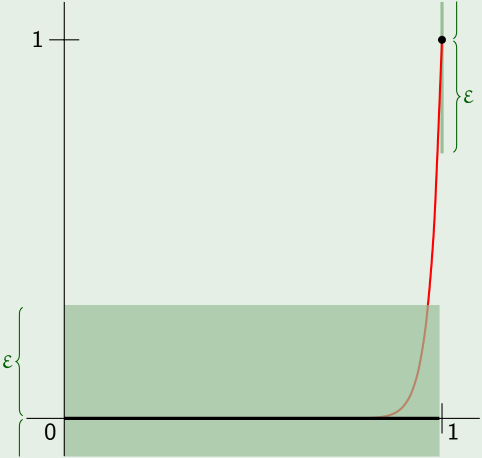
Niz funkcija $(f_n)_n$ iz primjera 26.1 ne konvergira uniformno na $[0, 1]$.



Niz funkcija $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, ne konvergira uniformno

Primjer 26.3

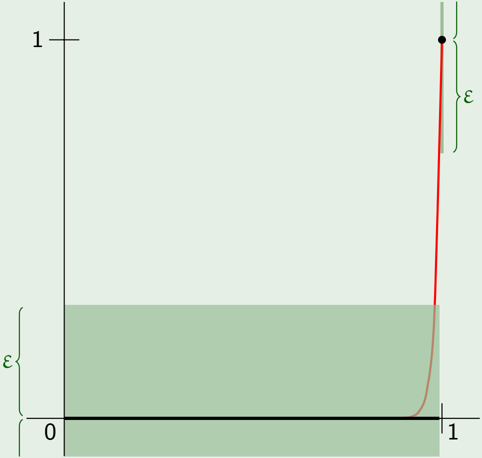
Niz funkcija $(f_n)_n$ iz primjera 26.1 ne konvergira uniformno na $[0, 1]$.



Niz funkcija $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, ne konvergira uniformno

Primjer 26.3

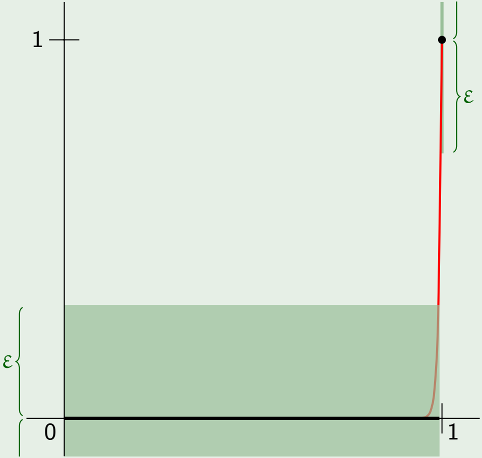
Niz funkcija $(f_n)_n$ iz primjera 26.1 ne konvergira uniformno na $[0, 1]$.



Niz funkcija $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, ne konvergira uniformno

Primjer 26.3

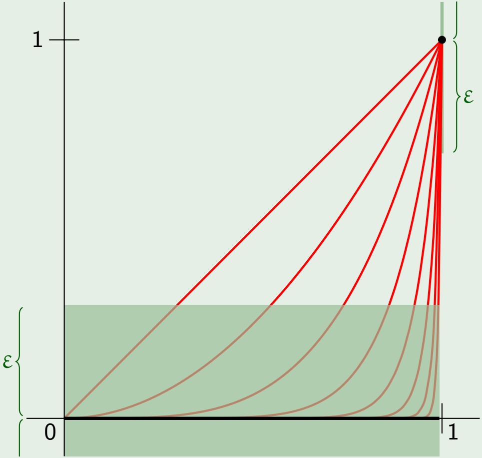
Niz funkcija $(f_n)_n$ iz primjera 26.1 ne konvergira uniformno na $[0, 1]$.



Niz funkcija $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, ne konvergira uniformno

Primjer 26.3

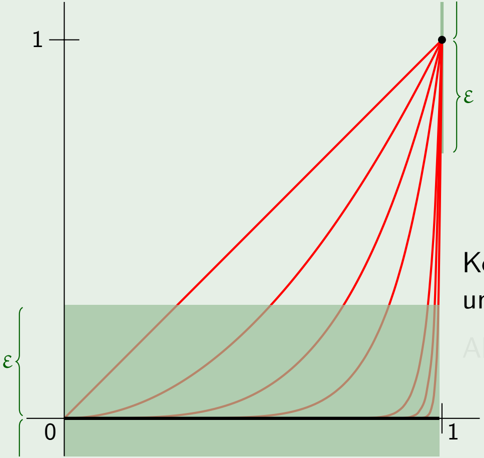
Niz funkcija $(f_n)_n$ iz primjera 26.1 ne konvergira uniformno na $[0, 1]$.



Niz funkcija $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, ne konvergira uniformno

Primjer 26.3

Niz funkcija $(f_n)_n$ iz primjera 26.1 ne konvergira uniformno na $[0, 1]$.



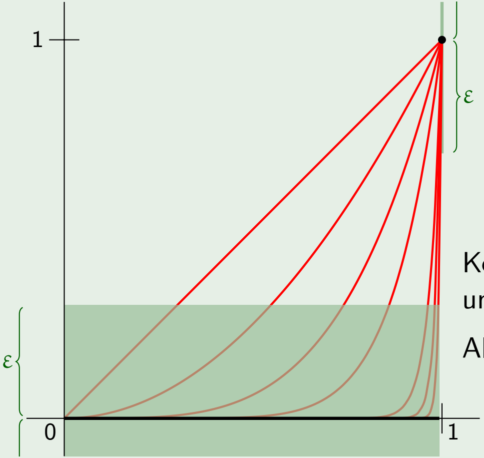
Konvergencija nije uniformna niti na $[0, 1\rangle$.

Ali. . .

Niz funkcija $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, ne konvergira uniformno

Primjer 26.3

Niz funkcija $(f_n)_n$ iz primjera 26.1 ne konvergira uniformno na $[0, 1]$.



Konvergencija nije uniformna niti na $[0, 1\rangle$.

Ali. . .

Ali. . .

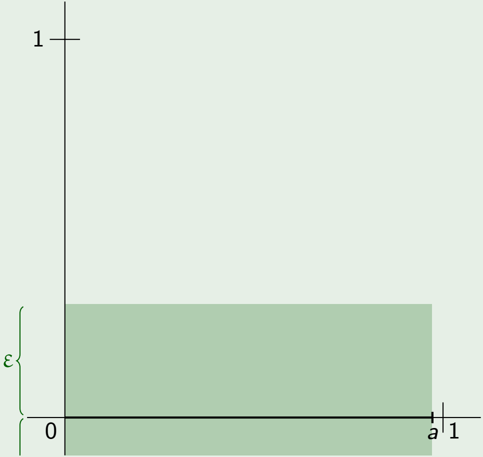
Primjer 26.4

Niz funkcija $(f_n)_n$ iz primjera 26.1 konvergira uniformno na $[0, a]$, za svaki $0 < a < 1$.

Ali. . .

Primjer 26.4

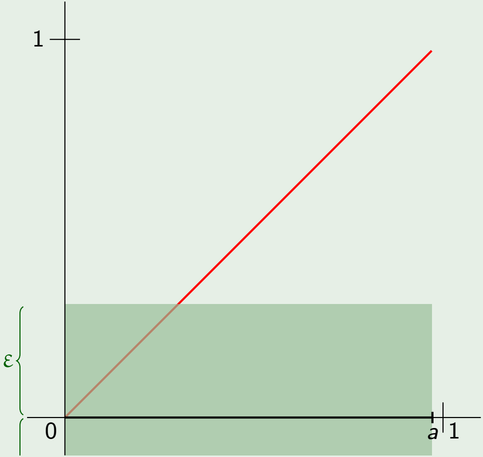
Niz funkcija $(f_n)_n$ iz primjera 26.1 konvergira uniformno na $[0, a]$, za svaki $0 < a < 1$.



Ali...

Primjer 26.4

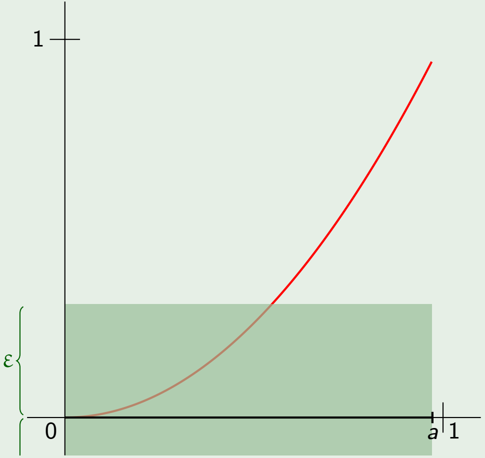
Niz funkcija $(f_n)_n$ iz primjera 26.1 konvergira uniformno na $[0, a]$, za svaki $0 < a < 1$.



Ali. . .

Primjer 26.4

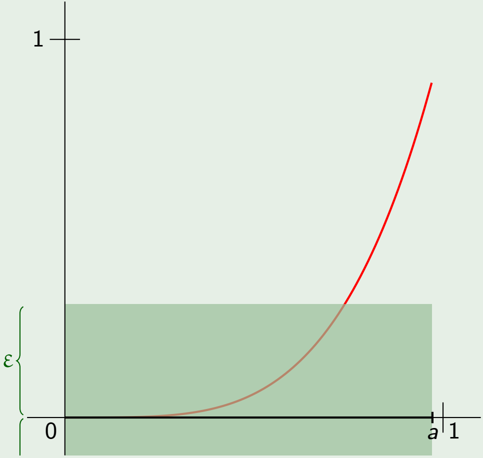
Niz funkcija $(f_n)_n$ iz primjera 26.1 konvergira uniformno na $[0, a]$, za svaki $0 < a < 1$.



Ali. . .

Primjer 26.4

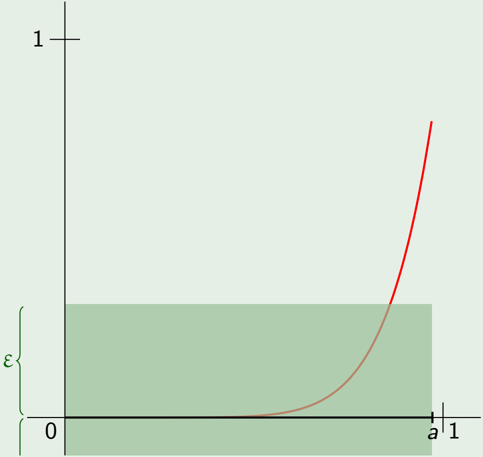
Niz funkcija $(f_n)_n$ iz primjera 26.1 konvergira uniformno na $[0, a]$, za svaki $0 < a < 1$.



Ali. . .

Primjer 26.4

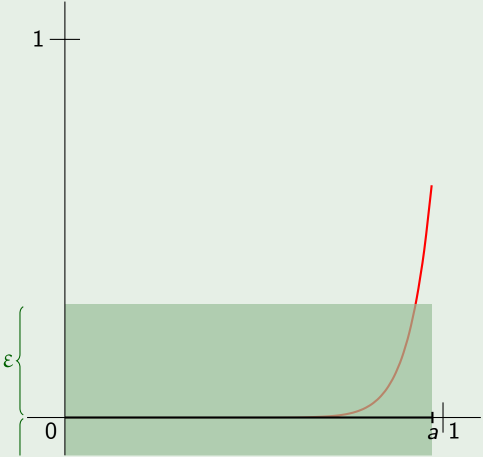
Niz funkcija $(f_n)_n$ iz primjera 26.1 konvergira uniformno na $[0, a]$, za svaki $0 < a < 1$.



Ali...

Primjer 26.4

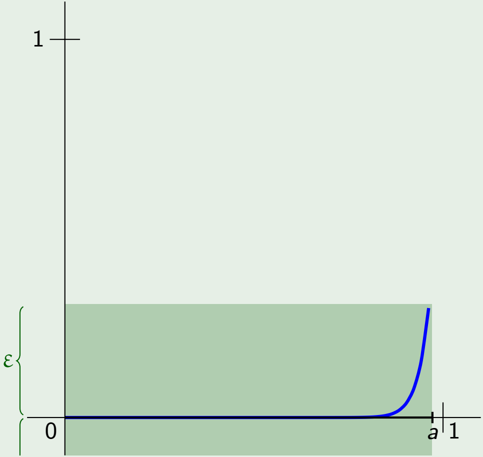
Niz funkcija $(f_n)_n$ iz primjera 26.1 konvergira uniformno na $[0, a]$, za svaki $0 < a < 1$.



Ali. . .

Primjer 26.4

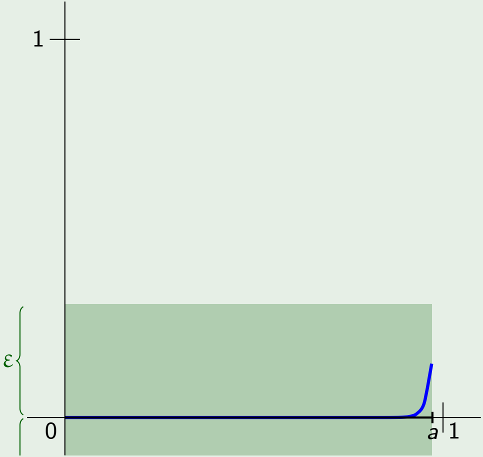
Niz funkcija $(f_n)_n$ iz primjera 26.1 konvergira uniformno na $[0, a]$, za svaki $0 < a < 1$.



Ali. . .

Primjer 26.4

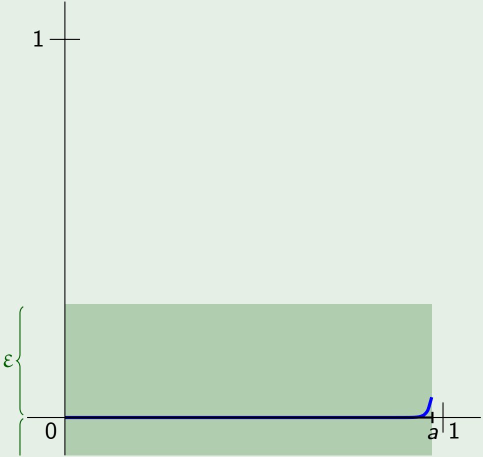
Niz funkcija $(f_n)_n$ iz primjera 26.1 konvergira uniformno na $[0, a]$, za svaki $0 < a < 1$.



Ali. . .

Primjer 26.4

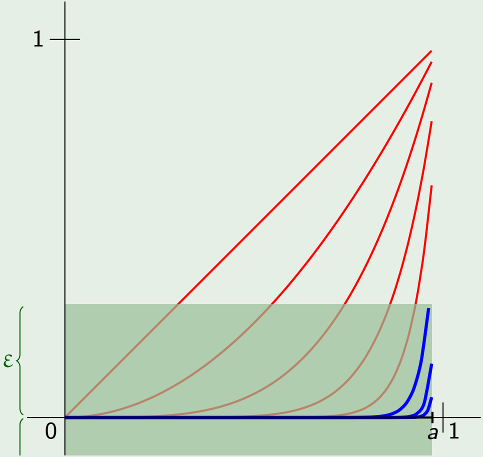
Niz funkcija $(f_n)_n$ iz primjera 26.1 konvergira uniformno na $[0, a]$, za svaki $0 < a < 1$.



Ali. . .

Primjer 26.4

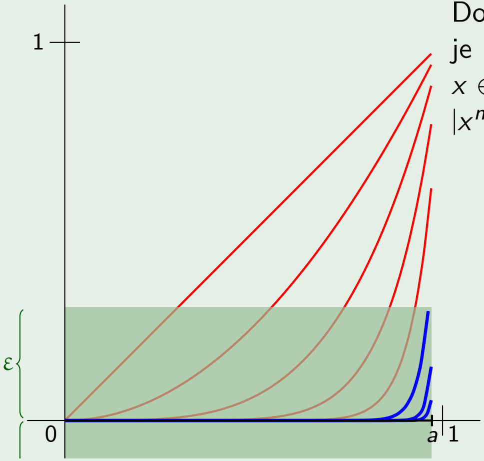
Niz funkcija $(f_n)_n$ iz primjera 26.1 konvergira uniformno na $[0, a]$, za svaki $0 < a < 1$.



Ali. . .

Primjer 26.4

Niz funkcija $(f_n)_n$ iz primjera 26.1 konvergira uniformno na $[0, a]$, za svaki $0 < a < 1$.

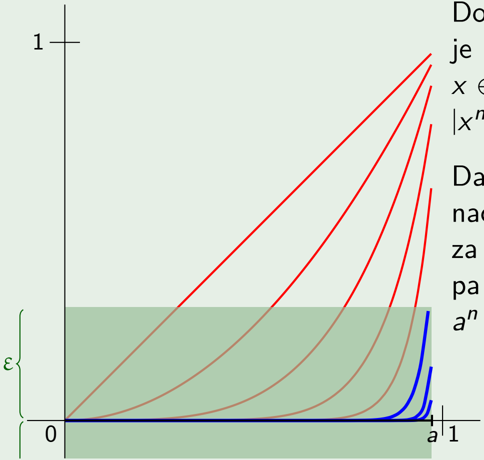


Dovoljno je bilo naći n_0 t.d. je $a^{n_0} < \varepsilon$, pa tada za sve $x \in [0, a]$ i $n \geqslant n_0$ vrijedi $|x^n - 0| \leqslant a^n \leqslant a^{n_0} < \varepsilon$.

Ali...

Primjer 26.4

Niz funkcija $(f_n)_n$ iz primjera 26.1 konvergira uniformno na $[0, a]$, za svaki $0 < a < 1$.



Dovoljno je bilo naći n_0 t.d. je $a^{n_0} < \varepsilon$, pa tada za sve $x \in [0, a]$ i $n \geqslant n_0$ vrijedi $|x^n - 0| \leqslant a^n \leqslant a^{n_0} < \varepsilon$.

Dakle, za svaki n mogli smo naći gornju među (ogradu) a^n za $|f_n(x) - f(x)|$ na $[0, a]$, pa smo koristili činjenicu da $a^n \to 0$ za $n \to \infty$.

Jedan kriterij za uniformnu konvergenciju

Prethodni primjer motivira sljedeću karakterizaciju uniformne konvergencije:

Propozicija 26.5

Neka je (Y, d) metrički prostor a $f_n\colon X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, niz funkcija koji konvergira funkciji $f : X \to Y$, i neka za sve n postoje supremumi $\sup\limits_{x\in X} d\big(f_n(x), f(x)\big) =: M_n$. Niz funkcija $(f_n)_n$ konvergira uniformno funkciji f, $(f_n)_n \rightrightarrows f$, ako i samo ako $M_n \to 0$ za $n \to \infty$.

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka $(f_n)_n \rightrightarrows f$. Za $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ t.d. za $\forall x \in X$ i $\forall n \geqslant n_0$ vrijedi $d(f_n(x), f(x)) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Dakle, skup $\{d(f_n(x), f(x)) : x \in X\}$ je omeđen, i za njegov supremum M_n vrijedi $M_n \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$, pa $(M_n)_n \to 0$.

$\Leftarrow$ Neka $(M_n)_n \to 0$. Za $\varepsilon > 0$ postoji n_0 t.d. je $M_n < \varepsilon$ za sve $n \geqslant n_0$. Kako je $d(f_n(x), f(x)) \leqslant M_n$ za sve $x \in X$, to je $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ za sve $x \in X$ i sve $n \geqslant n_0$, pa $(f_n)_n \rightrightarrows f$. □

Jedan kriterij za uniformnu konvergenciju

Prethodni primjer motivira sljedeću karakterizaciju uniformne konvergencije:

Propozicija 26.5

Neka je (Y, d) metrički prostor a $f_n \colon X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, niz funkcija koji konvergira funkciji $f : X \to Y$, i neka za sve n postoje supremumi $\sup\limits_{x \in X} d\big(f_n(x), f(x)\big) =: M_n$. Niz funkcija $(f_n)_n$ konvergira uniformno funkciji f, $(f_n)_n \rightrightarrows f$, ako i samo ako $M_n \to 0$ za $n \to \infty$.

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Neka $(f_n)_n \rightrightarrows f$. Za $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ t.d. za $\forall x \in X$ i $\forall n \geqslant n_0$ vrijedi $d\big(f_n(x), f(x)\big) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Dakle, skup $\{d\big(f_n(x), f(x)\big) : x \in X\}$ je omeđen, i za njegov supremum M_n vrijedi $M_n \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$, pa $(M_n)_n \to 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka $(M_n)_n \to 0$. Za $\varepsilon > 0$ postoji n_0 t.d. je $M_n < \varepsilon$ za sve $n \geqslant n_0$. Kako je $d\big(f_n(x), f(x)\big) \leqslant M_n$ za sve $x \in X$, to je $d\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon$ za sve $x \in X$ i sve $n \geqslant n_0$, pa $(f_n)_n \rightrightarrows f$. $\square$

Jedan kriterij za uniformnu konvergenciju

Prethodni primjer motivira sljedeću karakterizaciju uniformne konvergencije:

Propozicija 26.5

Neka je (Y, d) metrički prostor a $f_n\colon X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, niz funkcija koji konvergira funkciji $f : X \to Y$, i neka za sve n postoje supremumi $\sup\limits_{x\in X} d\big(f_n(x), f(x)\big) =: M_n$. Niz funkcija $(f_n)_n$ konvergira uniformno funkciji f, $(f_n)_n \rightrightarrows f$, ako i samo ako $M_n \to 0$ za $n \to \infty$.

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Neka $(f_n)_n \rightrightarrows f$. Za $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ t.d. za $\forall x \in X$ i $\forall n \geqslant n_0$ vrijedi $d\big(f_n(x), f(x)\big) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Dakle, skup $\big\{d\big(f_n(x), f(x)\big) : x \in X\big\}$ je omeđen, i za njegov supremum M_n vrijedi $M_n \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$, pa $(M_n)_n \to 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka $(M_n)_n \to 0$. Za $\varepsilon > 0$ postoji n_0 t.d. je $M_n < \varepsilon$ za sve $n \geqslant n_0$. Kako je $d\big(f_n(x), f(x)\big) \leqslant M_n$ za sve $x \in X$, to je $d\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon$ za sve $x \in X$ i sve $n \geqslant n_0$, pa $(f_n)_n \rightrightarrows f$. $\square$

Jedan kriterij za uniformnu konvergenciju

Prethodni primjer motivira sljedeću karakterizaciju uniformne konvergencije:

Propozicija 26.5

Neka je (Y, d) metrički prostor a $f_n\colon X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, niz funkcija koji konvergira funkciji $f: X \to Y$, i neka za sve n postoje supremumi $\sup\limits_{x\in X} d\big(f_n(x), f(x)\big) =: M_n$. Niz funkcija $(f_n)_n$ konvergira uniformno funkciji f, $(f_n)_n \rightrightarrows f$, ako i samo ako $M_n \to 0$ za $n \to \infty$.

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Neka $(f_n)_n \rightrightarrows f$. Za $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ t.d. za $\forall x \in X$ i $\forall n \geqslant n_0$ vrijedi $d\big(f_n(x), f(x)\big) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Dakle, skup $\big\{d\big(f_n(x), f(x)\big) : x \in X\big\}$ je omeđen, i za njegov supremum M_n vrijedi $M_n \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$, pa $(M_n)_n \to 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka $(M_n)_n \to 0$. Za $\varepsilon > 0$ postoji n_0 t.d. je $M_n < \varepsilon$ za sve $n \geqslant n_0$.

Kako je $d\big(f_n(x), f(x)\big) \leqslant M_n$ za sve $x \in X$, to je $d\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon$ za sve $x \in X$ i sve $n \geqslant n_0$, pa $(f_n)_n \rightrightarrows f$. $\square$

Jedan kriterij za uniformnu konvergenciju

Prethodni primjer motivira sljedeću karakterizaciju uniformne konvergencije:

Propozicija 26.5

Neka je (Y, d) metrički prostor a $f_n\colon X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, niz funkcija koji konvergira funkciji $f : X \to Y$, i neka za sve n postoje supremumi $\sup\limits_{x\in X} d\big(f_n(x), f(x)\big) =: M_n$. Niz funkcija $(f_n)_n$ konvergira uniformno funkciji f, $(f_n)_n \rightrightarrows f$, ako i samo ako $M_n \to 0$ za $n \to \infty$.

Dokaz: $\boxed{\Rightarrow}$ Neka $(f_n)_n \rightrightarrows f$. Za $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ t.d. za $\forall x \in X$ i $\forall n \geqslant n_0$ vrijedi $d\big(f_n(x), f(x)\big) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Dakle, skup $\big\{d\big(f_n(x), f(x)\big) : x \in X\big\}$ je omeđen, i za njegov supremum M_n vrijedi $M_n \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$, pa $(M_n)_n \to 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka $(M_n)_n \to 0$. Za $\varepsilon > 0$ postoji n_0 t.d. je $M_n < \varepsilon$ za sve $n \geqslant n_0$. Kako je $d\big(f_n(x), f(x)\big) \leqslant M_n$ za sve $x \in X$, to je $d\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon$ za sve $x \in X$ i sve $n \geqslant n_0$, pa $(f_n)_n \rightrightarrows f$. $\square$

Uniformna konvergencija i prostor omeđenih funkcija

Kada se radi o omeđenim funkcijama skupa X u metrički prostor (Y, d), onda prethodna propozicija pokazuje da je uniformna konvergencija ništa drugo doli konvergencija s obzirom na sup-metriku $\rho = d_\infty$ iz definicije 6.23, dakle konvergencija u prostoru $\mathscr{B}(X, Y)$ omeđenih funkcija s X u Y.

Ako je i X metrički, ili barem topološki prostor, pa možemo govoriti o neprekidnim preslikavanjima, onda prethodna propozicija pokazuje da je uniformna konvergencija nizova neprekidnih preslikavanja s X u Y isto što i konvergencija s obzirom na sup-metriku $\rho = d_\infty$ u prostoru $\mathscr{B}\mathscr{C}(X, Y)$ svih omeđenih neprekidnih preslikavanja s X u Y.

- Ako je X kompaktan, onda je uniformna konvergencija u skupu svih neprekidnih preslikavanja s X u metrički prostor (Y, d), isto što i konvergencija s obzirom na max-metriku u prostoru $\mathscr{C}(X, Y)$ svih neprekidnih preslikavanja s X u Y.

Uniformna konvergencija i prostor omeđenih funkcija

Kada se radi o omeđenim funkcijama skupa X u metrički prostor (Y, d), onda prethodna propozicija pokazuje da je uniformna konvergencija ništa drugo doli konvergencija s obzirom na sup-metriku $\rho = d_\infty$ iz definicije 6.23, dakle konvergencija u prostoru $\mathscr{B}(X, Y)$ omeđenih funkcija s X u Y.

Ako je i X metrički, ili barem topološki prostor, pa možemo govoriti o neprekidnim preslikavanjima, onda prethodna propozicija pokazuje da je uniformna konvergencija nizova neprekidnih preslikavanja s X u Y isto što i konvergencija s obzirom na sup-metriku $\rho = d_\infty$ u prostoru $\mathscr{B}\mathscr{C}(X, Y)$ svih omeđenih neprekidnih preslikavanja s X u Y.

- Ako je X kompaktan, onda je uniformna konvergencija u skupu svih neprekidnih preslikavanja s X u metrički prostor (Y, d), isto što i konvergencija s obzirom na max-metriku u prostoru $\mathscr{C}(X, Y)$ svih neprekidnih preslikavanja s X u Y.

Uniformna konvergencija i prostor omeđenih funkcija

Kada se radi o omeđenim funkcijama skupa X u metrički prostor (Y, d), onda prethodna propozicija pokazuje da je uniformna konvergencija ništa drugo doli konvergencija s obzirom na sup-metriku $\rho = d_\infty$ iz definicije 6.23, dakle konvergencija u prostoru $\mathscr{B}(X, Y)$ omeđenih funkcija s X u Y.

Ako je i X metrički, ili barem topološki prostor, pa možemo govoriti o neprekidnim preslikavanjima, onda prethodna propozicija pokazuje da je uniformna konvergencija nizova neprekidnih preslikavanja s X u Y isto što i konvergencija s obzirom na sup-metriku $\rho = d_\infty$ u prostoru $\mathscr{B}\mathscr{C}(X, Y)$ svih omeđenih neprekidnih preslikavanja s X u Y.

Ako je X kompaktan, onda je uniformna konvergencija u skupu svih neprekidnih preslikavanja s X u metrički prostor (Y, d), isto što i konvergencija s obzirom na max-metriku u prostoru $\mathscr{C}(X, Y)$ svih neprekidnih preslikavanja s X u Y.

Neprekidnost uniformnog limesa

Za razliku od „običnog” limesa, tj. limesa „po točkama”, uniformni limes niza neprekidnih preslikavanja je opet neprekidno preslikavanje.

Teorem 26.6

Neka je X topološki a (Y, d) metrički prostor. Ako je $(f_n)_n$ niz neprekidnih preslikavanja s X u Y koji uniformno konvergira preslikavanju $f\colon X \to Y$ onda je i f neprekidno preslikavanje.

Dokaz: Neka je $x \in X$ proizvoljna točka. Kako $(f_n)_n \rightrightarrows f$, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji n_0 t.d. za sve $x' \in X$ i sve $n \geqslant n_0$ vrijedi $d(f_n(x'), f(x')) < \frac{\varepsilon}{3}$. Preslikavanje f_{n_0} je neprekidno u x pa postoji okolina $U \ni x$ t.d. je $d(f_{n_0}(x'), f_{n_0}(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ za sve $x' \in U$. Stoga za sve $x' \in U$ vrijedi

$$d(f(x'), f(x)) \leqslant \underbrace{d(f(x'), f_{n_0}(x'))}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{d(f_{n_0}(x'), f_{n_0}(x))}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{d(f_{n_0}(x), f(x))}_{<\varepsilon/3} < \varepsilon$$

pa je preslikavanje f neprekidno u x, $\forall x \in X$, dakle neprekidno. $\square$

Neprekidnost uniformnog limesa

Za razliku od „običnog" limesa, tj. limesa „po točkama", uniformni limes niza neprekidnih preslikavanja je opet neprekidno preslikavanje.

Teorem 26.6

Neka je X topološki a (Y, d) metrički prostor. Ako je $(f_n)_n$ niz neprekidnih preslikavanja s X u Y koji uniformno konvergira preslikavanju $f\colon X \to Y$ onda je i f neprekidno preslikavanje.

Dokaz: Neka je $x \in X$ proizvoljna točka. Kako $(f_n)_n \rightrightarrows f$, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji n_0 t.d. za sve $x' \in X$ i sve $n \geqslant n_0$ vrijedi $d\big(f_n(x'), f(x')\big) < \frac{\varepsilon}{3}$.
Preslikavanje f_{n_0} je neprekidno u x pa postoji okolina $U \ni x$ t.d. je $d\big(f_{n_0}(x'), f_{n_0}(x)\big) < \frac{\varepsilon}{3}$ za sve $x' \in U$. Stoga za sve $x' \in U$ vrijedi

$$d\big(f(x'), f(x)\big) \leqslant \underbrace{d\big(f(x'), f_{n_0}(x')\big)}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{d\big(f_{n_0}(x'), f_{n_0}(x)\big)}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{d\big(f_{n_0}(x), f(x)\big)}_{<\varepsilon/3} < \varepsilon$$

pa je preslikavanje f neprekidno u x, $\forall x \in X$, dakle neprekidno. □

Neprekidnost uniformnog limesa

Za razliku od „običnog” limesa, tj. limesa „po točkama”, uniformni limes niza neprekidnih preslikavanja je opet neprekidno preslikavanje.

Teorem 26.6

Neka je X topološki a (Y, d) metrički prostor. Ako je $(f_n)_n$ niz neprekidnih preslikavanja s X u Y koji uniformno konvergira preslikavanju $f\colon X \to Y$ onda je i f neprekidno preslikavanje.

Dokaz: Neka je $x \in X$ proizvoljna točka. Kako $(f_n)_n \rightrightarrows f$, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji n_0 t.d. za sve $x' \in X$ i sve $n \geqslant n_0$ vrijedi $d\big(f_n(x'), f(x')\big) < \frac{\varepsilon}{3}$. Preslikavanje f_{n_0} je neprekidno u x pa postoji okolina $U \ni x$ t.d. je $d\big(f_{n_0}(x'), f_{n_0}(x)\big) < \frac{\varepsilon}{3}$ za sve $x' \in U$. Stoga za sve $x' \in U$ vrijedi

$$d\big(f(x'), f(x)\big) \leqslant \underbrace{d\big(f(x'), f_{n_0}(x')\big)}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{d\big(f_{n_0}(x'), f_{n_0}(x)\big)}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{d\big(f_{n_0}(x), f(x)\big)}_{<\varepsilon/3} < \varepsilon$$

pa je preslikavanje f neprekidno u x, $\forall x \in X$, dakle neprekidno.

Neprekidnost uniformnog limesa

Za razliku od „običnog” limesa, tj. limesa „po točkama”, uniformni limes niza neprekidnih preslikavanja je opet neprekidno preslikavanje.

Teorem 26.6

Neka je X topološki a (Y, d) metrički prostor. Ako je $(f_n)_n$ niz neprekidnih preslikavanja s X u Y koji uniformno konvergira preslikavanju $f\colon X \to Y$ onda je i f neprekidno preslikavanje.

Dokaz: Neka je $x \in X$ proizvoljna točka. Kako $(f_n)_n \rightrightarrows f$, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji n_0 t.d. za sve $x' \in X$ i sve $n \geqslant n_0$ vrijedi $d\big(f_n(x'), f(x')\big) < \frac{\varepsilon}{3}$. Preslikavanje f_{n_0} je neprekidno u x pa postoji okolina $U \ni x$ t.d. je $d\big(f_{n_0}(x'), f_{n_0}(x)\big) < \frac{\varepsilon}{3}$ za sve $x' \in U$. Stoga za sve $x' \in U$ vrijedi $d\big(f(x'), f(x)\big)$

$$\leqslant \underbrace{d\big(f(x'), f_{n_0}(x')\big)}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{d\big(f_{n_0}(x'), f_{n_0}(x)\big)}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{d\big(f_{n_0}(x), f(x)\big)}_{<\varepsilon/3} < \varepsilon$$

pa je preslikavanje f neprekidno u x, $\forall x \in X$, dakle neprekidno. $\square$

Komutiranje limesa i limesa

Prethodni teorem pokazuje kako se u slučaju uniformne konvergencije, limes niza neprekidnih funkcija i limes funkcije mogu „zamijeniti”.

Naime, ako $(f_n)_n \rightrightarrows f$, onda je

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \Big(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \Big) &= \lim_{x \to x_0} f(x) && (\text{jer } f_n \to f, \text{ tj. } f_n(x) \to f(x), \forall x) \\
&= f(x_0) && (\text{jer je } f \text{ neprekidno preslikavanje}) \\
&= \lim_{n \to \infty} f_n(x_0) && (\text{jer } f_n(x_0) \to f(x_0)) \\
&= \lim_{n \to \infty} \Big(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \Big). && (\text{jer je } f_n \text{ neprekidno})
\end{aligned}
$$

Komutiranje limesa i limesa

Prethodni teorem pokazuje kako se u slučaju uniformne konvergencije, limes niza neprekidnih funkcija i limes funkcije mogu „zamijeniti”. Naime, ako $(f_n)_n \rightrightarrows f$, onda je

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big) &= \lim_{x\to x_0} f(x) && (\text{jer } f_n \to f,\ \text{tj. } f_n(x) \to f(x),\ \forall x) \\
&= f(x_0) && (\text{jer je } f \text{ neprekidno preslikavanje}) \\
&= \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) && (\text{jer } f_n(x_0) \to f(x_0)) \\
&= \lim_{n\to\infty}\Big(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\Big). && (\text{jer je } f_n \text{ neprekidno})
\end{aligned}$$

Uniformno Cauchyjevo svojstvo niza funkcija

Ustanoviti konvergira li uniformno neki niz funkcija ili ne — nije lako. Kao i kod nizova realnih brojeva, Cauchyjevo svojstvo omogućuje da se za nizove realnih funkcija to ustanovi i bez poznavanja limesa.

Definicija 26.7

Niz realnih funkcija $f_n \colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, je *uniformno Cauchyjev* ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $\left|f_m(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon$ za sve $x \in X$ i sve $m, n \geqslant n_0$.

Teorem 26.8 (Cauchyjev kriterij za uniformnu konvergenciju)

Niz realnih funkcija $f_n \colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, konvergira uniformno ako i samo ako je uniformno Cauchyjev.

Dokaz: $\Rightarrow$ Nužnost se dokazuje kao i u propoziciji 24.8.

$\Leftarrow$

Uniformno Cauchyjevo svojstvo niza funkcija

Ustanoviti konvergira li uniformno neki niz funkcija ili ne — nije lako. Kao i kod nizova realnih brojeva, Cauchyjevo svojstvo omogućuje da se za nizove realnih funkcija to ustanovi i bez poznavanja limesa.

Definicija 26.7

Niz realnih funkcija $f_n \colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, je *uniformno Cauchyjev* ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $\left| f_m(x) - f_n(x) \right| < \varepsilon$ za sve $x \in X$ i sve $m, n \geqslant n_0$.

Teorem 26.8 (Cauchyjev kriterij za uniformnu konvergenciju)

Niz realnih funkcija $f_n \colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, konvergira uniformno ako i samo ako je uniformno Cauchyjev.

Dokaz: $\Rightarrow$ Nužnost se dokazuje kao i u propoziciji 24.8.

$\Leftarrow$

Uniformno Cauchyjevo svojstvo niza funkcija

Ustanoviti konvergira li uniformno neki niz funkcija ili ne — nije lako. Kao i kod nizova realnih brojeva, Cauchyjevo svojstvo omogućuje da se za nizove realnih funkcija to ustanovi i bez poznavanja limesa.

Definicija 26.7

Niz realnih funkcija $f_n \colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, je *uniformno Cauchyjev* ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $\left| f_m(x) - f_n(x) \right| < \varepsilon$ za sve $x \in X$ i sve $m, n \geqslant n_0$.

Teorem 26.8 (Cauchyjev kriterij za uniformnu konvergenciju)

Niz realnih funkcija $f_n \colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, konvergira uniformno ako i samo ako je uniformno Cauchyjev.

Dokaz: $\Rightarrow$ Nužnost se dokazuje kao i u propoziciji 24.8.

$\Leftarrow$

Uniformno Cauchyjevo svojstvo niza funkcija

Ustanoviti konvergira li uniformno neki niz funkcija ili ne — nije lako. Kao i kod nizova realnih brojeva, Cauchyjevo svojstvo omogućuje da se za nizove realnih funkcija to ustanovi i bez poznavanja limesa.

Definicija 26.7

Niz realnih funkcija $f_n \colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, je *uniformno Cauchyjev* ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $\left|f_m(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon$ za sve $x \in X$ i sve $m, n \geqslant n_0$.

Teorem 26.8 (Cauchyjev kriterij za uniformnu konvergenciju)

Niz realnih funkcija $f_n \colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, konvergira uniformno ako i samo ako je uniformno Cauchyjev.

Dokaz: $\Rightarrow$ Nužnost se dokazuje kao i u propoziciji 24.8.

$\Leftarrow$

$\Leftarrow$

$\Leftarrow$ Neka je niz $(f_n)_n$ uniformno Cauchyjev. Za fiksan $x \in X$ je tada $\big(f_n(x)\big)_n$ Cauchyjev niz u $\mathbb{R}$, pa konvergira nekom realnom broju, nazovimo ga $f(x)$. Tako dobivamo funkciju $f \colon X \to \mathbb{R}$. Pokažimo da $(f_n)_n \rightrightarrows f$.

Za $\varepsilon > 0$ neka je n_0 t.d. je $\big|f_m(x) - f_n(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2}$ za sve $x \in X$ i sve $m, n \geqslant n_0$. Za svaki $x \in X$ niz $\big(f_n(x)\big)_n$ konvergira k $f(x)$, pa postoje brojevi $m_x \in \mathbb{N}$ t.d. je $\big|f_{m_x}(x) - f(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2}$, i možemo ih odabrati tako da je $m_x \geqslant n_0$. Tada za sve $n \geqslant n_0$ vrijedi

$$\big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \underbrace{\big|f_n(x) - f_{m_x}(x)\big|}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{\big|f_{m_x}(x) - f(x)\big|}_{<\varepsilon/2} < \varepsilon.$$

Uoči da brojevi m_x ovise o x, ali broj n_0 ovisi samo o ε, a ne i o x. Stoga niz $(f_n)_n$ konvergira uniformno funkciji f. $\square$

Posljedica 26.9

Red $\sum f_n$ neprekidnih realnih funkcija $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ konvergira uniformno ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $\big|\sum_{k=m}^{n} f_k(x)\big| < \varepsilon$ za sve $x \in X$, i sve $n \geqslant m \geqslant n_0$. $\square$

⇐

⇐ Neka je niz $(f_n)_n$ uniformno Cauchyjev. Za fiksan $x \in X$ je tada $\big(f_n(x)\big)_n$ Cauchyjev niz u $\mathbb{R}$, pa konvergira nekom realnom broju, nazovimo ga $f(x)$. Tako dobivamo funkciju $f\colon X \to \mathbb{R}$. Pokažimo da $(f_n)_n \rightrightarrows f$.

Za $\varepsilon > 0$ neka je n_0 t.d. je $\big|f_m(x) - f_n(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2}$ za sve $x \in X$ i sve $m, n \geqslant n_0$.

Za svaki $x \in X$ niz $\big(f_n(x)\big)_n$ konvergira k $f(x)$, pa postoje brojevi $m_x \in \mathbb{N}$ t.d. je $\big|f_{m_x}(x) - f(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2}$, i možemo ih odabrati tako da je $m_x \geqslant n_0$.

Tada za sve $n \geqslant n_0$ vrijedi

$$\big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \underbrace{\big|f_n(x) - f_{m_x}(x)\big|}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{\big|f_{m_x}(x) - f(x)\big|}_{<\varepsilon/2} < \varepsilon.$$

Uoči da brojevi m_x ovise o x, ali broj n_0 ovisi samo o ε, a ne i o x. Stoga niz $(f_n)_n$ konvergira uniformno funkciji f. □

Posljedica 26.9

Red $\sum f_n$ neprekidnih realnih funkcija $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ konvergira uniformno ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $\big|\sum_{k=m}^{n} f_k(x)\big| < \varepsilon$ za sve $x \in X$, i sve $n \geqslant m \geqslant n_0$. □

$\Leftarrow$

$\Leftarrow$ Neka je niz $(f_n)_n$ uniformno Cauchyjev. Za fiksan $x \in X$ je tada $\big(f_n(x)\big)_n$ Cauchyjev niz u $\mathbb{R}$, pa konvergira nekom realnom broju, nazovimo ga $f(x)$. Tako dobivamo funkciju $f\colon X \to \mathbb{R}$. Pokažimo da $(f_n)_n \rightrightarrows f$.
Za $\varepsilon > 0$ neka je n_0 t.d. je $\big|f_m(x) - f_n(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2}$ za sve $x \in X$ i sve $m, n \geqslant n_0$.
Za svaki $x \in X$ niz $\big(f_n(x)\big)_n$ konvergira k $f(x)$, pa postoje brojevi $m_x \in \mathbb{N}$ t.d. je $\big|f_{m_x}(x) - f(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2}$, i možemo ih odabrati tako da je $m_x \geqslant n_0$.
Tada za sve $n \geqslant n_0$ vrijedi

$$\big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \underbrace{\big|f_n(x) - f_{m_x}(x)\big|}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{\big|f_{m_x}(x) - f(x)\big|}_{<\varepsilon/2} < \varepsilon.$$

Uoči da brojevi m_x ovise o x, ali broj n_0 ovisi samo o ε, a ne i o x.
Stoga niz $(f_n)_n$ konvergira uniformno funkciji f. $\square$

Posljedica 26.9

Red $\sum f_n$ neprekidnih realnih funkcija $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ konvergira uniformno ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $\big|\sum_{k=m}^{n} f_k(x)\big| < \varepsilon$ za sve $x \in X$, i sve $n \geqslant m \geqslant n_0$. $\square$

⇐

⇐ Neka je niz $(f_n)_n$ uniformno Cauchyjev. Za fiksan $x \in X$ je tada $\big(f_n(x)\big)_n$ Cauchyjev niz u $\mathbb{R}$, pa konvergira nekom realnom broju, nazovimo ga $f(x)$. Tako dobivamo funkciju $f\colon X \to \mathbb{R}$. Pokažimo da $(f_n)_n \rightrightarrows f$.

Za $\varepsilon > 0$ neka je n_0 t.d. je $\big|f_m(x) - f_n(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2}$ za sve $x \in X$ i sve $m, n \geqslant n_0$.

Za svaki $x \in X$ niz $\big(f_n(x)\big)_n$ konvergira k $f(x)$, pa postoje brojevi $m_x \in \mathbb{N}$ t.d. je $\big|f_{m_x}(x) - f(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2}$, i možemo ih odabrati tako da je $m_x \geqslant n_0$.

Tada za sve $n \geqslant n_0$ vrijedi

$$\big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \underbrace{\big|f_n(x) - f_{m_x}(x)\big|}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{\big|f_{m_x}(x) - f(x)\big|}_{<\varepsilon/2} < \varepsilon.$$

Uoči da brojevi m_x ovise o x, ali broj n_0 ovisi samo o ε, a ne i o x. Stoga niz $(f_n)_n$ konvergira uniformno funkciji f. □

Posljedica 26.9

Red $\sum f_n$ neprekidnih realnih funkcija $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ konvergira uniformno ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $\big|\sum_{k=m}^{n} f_k(x)\big| < \varepsilon$ za sve $x \in X$, i sve $n \geqslant m \geqslant n_0$. □

⇐

⇐ Neka je niz $(f_n)_n$ uniformno Cauchyjev. Za fiksan $x \in X$ je tada $\big(f_n(x)\big)_n$ Cauchyjev niz u $\mathbb{R}$, pa konvergira nekom realnom broju, nazovimo ga $f(x)$. Tako dobivamo funkciju $f\colon X \to \mathbb{R}$. Pokažimo da $(f_n)_n \rightrightarrows f$.

Za $\varepsilon > 0$ neka je n_0 t.d. je $\big|f_m(x) - f_n(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2}$ za sve $x \in X$ i sve $m, n \geqslant n_0$.

Za svaki $x \in X$ niz $\big(f_n(x)\big)_n$ konvergira k $f(x)$, pa postoje brojevi $m_x \in \mathbb{N}$ t.d. je $\big|f_{m_x}(x) - f(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2}$, i možemo ih odabrati tako da je $m_x \geqslant n_0$.

Tada za sve $n \geqslant n_0$ vrijedi

$$\big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \underbrace{\big|f_n(x) - f_{m_x}(x)\big|}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{\big|f_{m_x}(x) - f(x)\big|}_{<\varepsilon/2} < \varepsilon.$$

Uoči da brojevi m_x ovise o x, ali broj n_0 ovisi samo o ε, a ne i o x. Stoga niz $(f_n)_n$ konvergira uniformno funkciji f. $\square$

Posljedica 26.9

Red $\sum f_n$ neprekidnih realnih funkcija $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ konvergira uniformno ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $\big|\sum_{k=m}^{n} f_k(x)\big| < \varepsilon$ za sve $x \in X$, i sve $n \geqslant m \geqslant n_0$. $\square$

⇐

⇐ Neka je niz $(f_n)_n$ uniformno Cauchyjev. Za fiksan $x \in X$ je tada $\big(f_n(x)\big)_n$ Cauchyjev niz u $\mathbb{R}$, pa konvergira nekom realnom broju, nazovimo ga $f(x)$. Tako dobivamo funkciju $f\colon X \to \mathbb{R}$. Pokažimo da $(f_n)_n \rightrightarrows f$.
Za $\varepsilon > 0$ neka je n_0 t.d. je $\big|f_m(x) - f_n(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2}$ za sve $x \in X$ i sve $m, n \geqslant n_0$.
Za svaki $x \in X$ niz $\big(f_n(x)\big)_n$ konvergira k $f(x)$, pa postoje brojevi $m_x \in \mathbb{N}$ t.d. je $\big|f_{m_x}(x) - f(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2}$, i možemo ih odabrati tako da je $m_x \geqslant n_0$.
Tada za sve $n \geqslant n_0$ vrijedi

$$\big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \underbrace{\big|f_n(x) - f_{m_x}(x)\big|}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{\big|f_{m_x}(x) - f(x)\big|}_{<\varepsilon/2} < \varepsilon.$$

Uoči da brojevi m_x ovise o x, ali broj n_0 ovisi samo o ε, a ne i o x.
Stoga niz $(f_n)_n$ konvergira uniformno funkciji f. □

Posljedica 26.9

Red $\sum f_n$ neprekidnih realnih funkcija $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ konvergira uniformno ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $\big|\sum_{k=m}^{n} f_k(x)\big| < \varepsilon$ za sve $x \in X$, i sve $n \geqslant m \geqslant n_0$. □

Kompaktnost nije dovoljna

Kao što znamo, teorem 18.11, za metričke prostore, neprekidna funkcija s kompaktnom domenom je i uniformno neprekidna. Međutim, konvergentan niz neprekidnih funkcija s kompaktnom domenom ne mora konvergirati uniformno niti u slučaju da je limes neprekidna funkcija.

Primjer 26.10

Neka su funkcije $g_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, definirane s

$$g_n(x) = \sqrt{x^n\,(1 - x^n)}.$$

Kompaktnost nije dovoljna

Kao što znamo, teorem 18.11, za metričke prostore, neprekidna funkcija s kompaktnom domenom je i uniformno neprekidna. Međutim, konvergentan niz neprekidnih funkcija s kompaktnom domenom ne mora konvergirati uniformno niti u slučaju da je limes neprekidna funkcija.

Primjer 26.10

Neka su funkcije $g_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, definirane s

$$g_n(x) = \sqrt{x^n\,(1 - x^n)}.$$

Kompaktnost nije dovoljna

Kao što znamo, teorem 18.11, za metričke prostore, neprekidna funkcija s kompaktnom domenom je i uniformno neprekidna. Međutim, konvergentan niz neprekidnih funkcija s kompaktnom domenom ne mora konvergirati uniformno niti u slučaju da je limes neprekidna funkcija.

Primjer 26.10

Neka su funkcije $g_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, definirane s

$$g_n(x) = \sqrt{x^n\,(1-x^n)}.$$

One su neprekidne, niz $(g_n)_n$ konvergira konstantnoj funkciji $\mathbf{0} \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ koja je neprekidna, ali ta konvergencija nije uniformna. Naime, nije teško vidjeti da sve funkcije g_n imaju na $[0,1]$ maksimum jednak $1/2$ pa niz $(g_n)_n$ ne zadovoljava kriterij za uniformnu konvergenciju iz propozicije 26.5.

Kompaktnost nije dovoljna

Kao što znamo, teorem 18.11, za metričke prostore, neprekidna funkcija s kompaktnom domenom je i uniformno neprekidna. Međutim, konvergentan niz neprekidnih funkcija s kompaktnom domenom ne mora konvergirati uniformno niti u slučaju da je limes neprekidna funkcija.

Primjer 26.10

Neka su funkcije $g_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, definirane s

$$g_n(x) = \sqrt{x^n\left(1 - x^n\right)}.$$

One su neprekidne, niz $(g_n)_n$ konvergira konstantnoj funkciji $\mathbf{0}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ koja je neprekidna, ali ta konvergencija nije uniformna.

Naime, nije teško vidjeti da sve funkcije g_n imaju na $[0,1]$ maksimum jednak $1/2$ pa niz $(g_n)_n$ ne zadovoljava kriterij za uniformnu konvergenciju iz propozicije 26.5.

Kompaktnost nije dovoljna

Kao što znamo, teorem 18.11, za metričke prostore, neprekidna funkcija s kompaktnom domenom je i uniformno neprekidna. Međutim, konvergentan niz neprekidnih funkcija s kompaktnom domenom ne mora konvergirati uniformno niti u slučaju da je limes neprekidna funkcija.

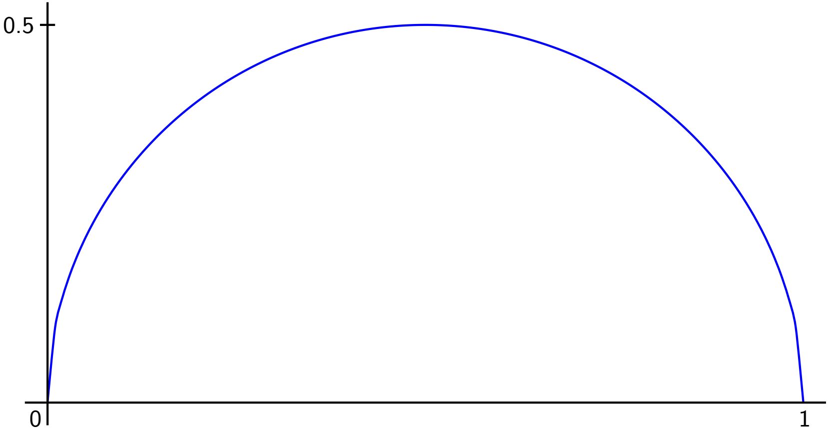
Primjer 26.10

Neka su funkcije $g_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, definirane s

$$g_n(x) = \sqrt{x^n\,(1 - x^n)}.$$

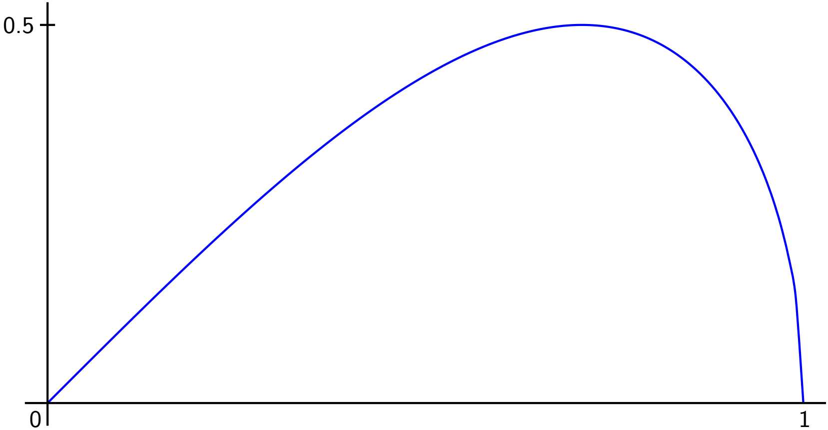
One su neprekidne, niz $(g_n)_n$ konvergira konstantnoj funkciji $\mathbf{0}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ koja je neprekidna, ali ta konvergencija nije uniformna. Naime, nije teško vidjeti da sve funkcije g_n imaju na $[0,1]$ maksimum jednak $1/2$ pa niz $(g_n)_n$ ne zadovoljava kriterij za uniformnu konvergenciju iz propozicije 26.5.

Ilustracija prethodnog primjera



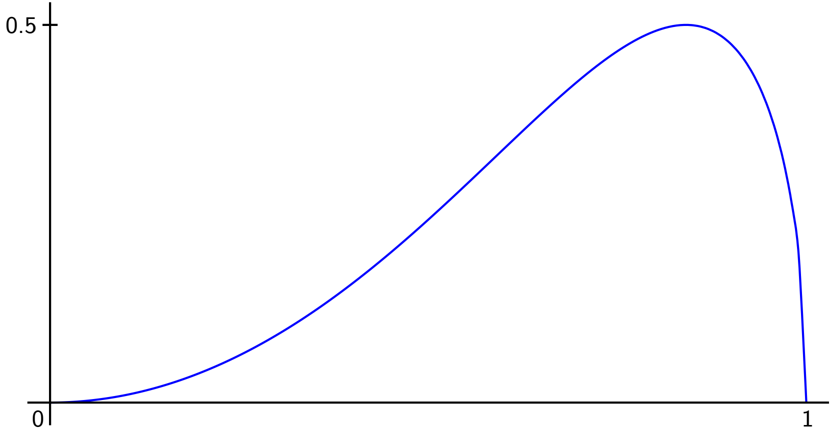
Graf funkcije $g_n(x) = \sqrt{x^n\,(1 - x^n)}$ za $n = 1$

Ilustracija prethodnog primjera



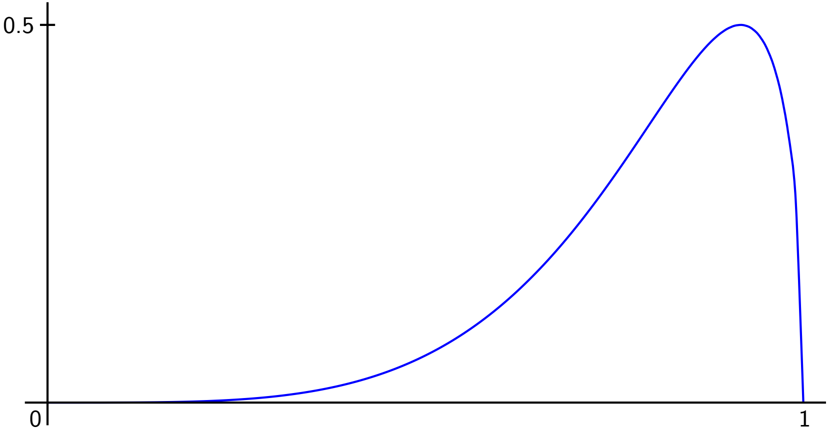
Graf funkcije $g_n(x) = \sqrt{x^n\,(1 - x^n)}$ za $n = 2$

Ilustracija prethodnog primjera



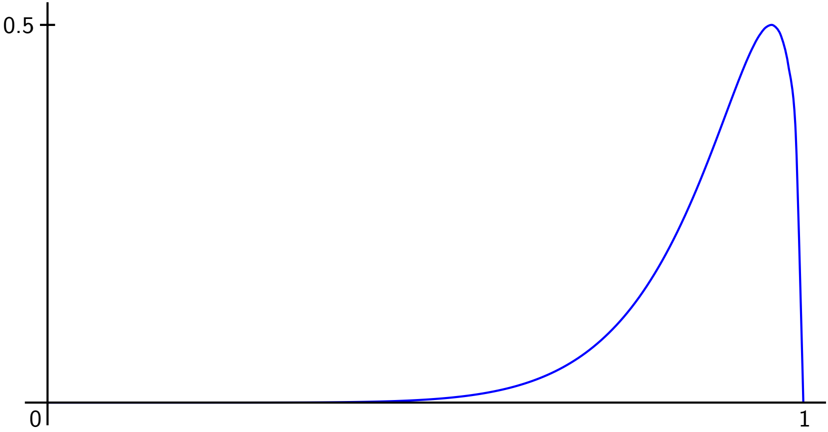
Graf funkcije $g_n(x) = \sqrt{x^n \left(1 - x^n\right)}$ za $n = 4$

Ilustracija prethodnog primjera



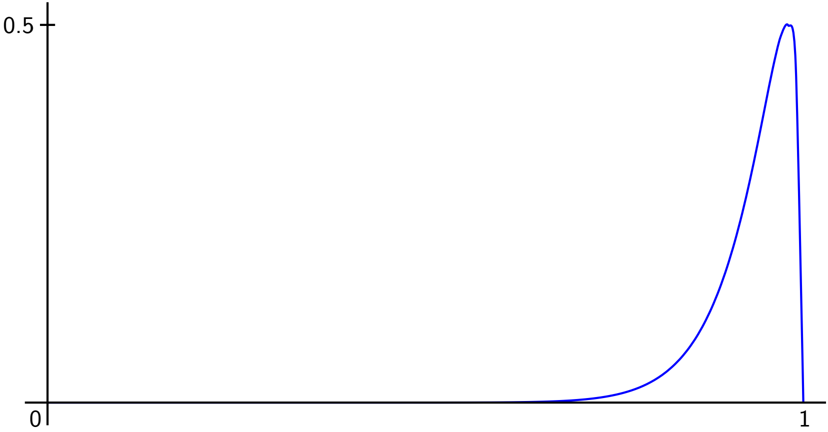
Graf funkcije $g_n(x) = \sqrt{x^n\,(1 - x^n)}$ za $n = 8$

Ilustracija prethodnog primjera



Graf funkcije $g_n(x) = \sqrt{x^n(1 - x^n)}$ za $n = 16$

Ilustracija prethodnog primjera



Graf funkcije $g_n(x) = \sqrt{x^n\,(1 - x^n)}$ za $n = 32$

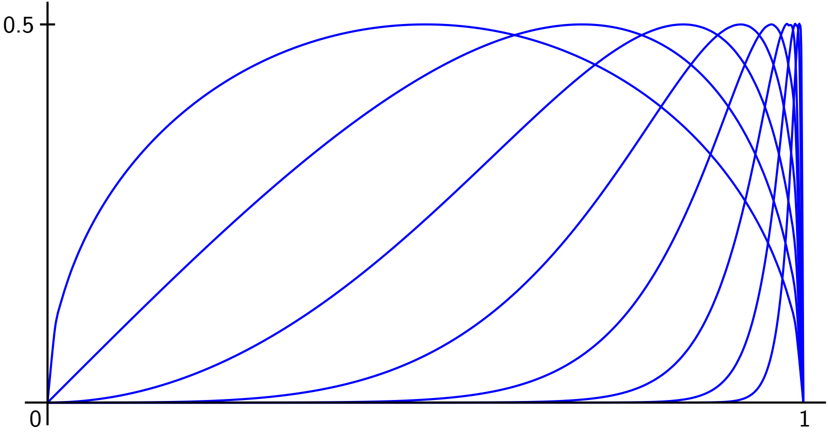
Ilustracija prethodnog primjera

Graf funkcije $g_n(x) = \sqrt{x^n\,(1 - x^n)}$ za $n = 64$

Ilustracija prethodnog primjera

Graf funkcije $g_n(x) = \sqrt{x^n\,(1 - x^n)}$ za $n = 128$

Ilustracija prethodnog primjera



Grafovi funkcija $g_n(x) = \sqrt{x^n\,(1 - x^n)}$ za $n = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128.$

Dinijev teorem

O dovoljnim uvjetima za uniformnu konvergenciju niza neprekidnih funkcija na kompaktnom prostoru govori sljedeći teorem:

Teorem 26.11 (Dinijev teorem o monotonoj konvergenciji)

Neka je X kompaktan topološki prostor a $f_n\colon X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, niz neprekidnih funkcija takvih da je $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x)$ za sve $x \in X$ i sve $n \in \mathbb{N}$. Ako niz $(f_n)_n$ konvergira (obično, po točkama) neprekidnoj funkciji $f\colon X \to \mathbb{R}$, onda on konvergira uniformno.

8 POTPUNI METRIČKI PROSTORI

- Potpunost
- Peanova preslikavanja
- Banachov teorem o fiksnoj točki

Motivacija

Vidjeli smo kako je Cantorov aksiom potpunosti (svaki odozgo omeđen skup realnih brojeva ima supremum), bio koristan (konvergencija monotonih omeđenih nizova u $\mathbb{R}$, što za posljedicu ima da svaki Cauchyjev niz u $\mathbb{R}$ konvergira; povezanost intervala; kompaktnost segmenta;...). Međutim, to svojstvo realnih brojeva bitno ovisi o uređaju u $\mathbb{R}$, pa se ne može poopćiti na metričke prostore.

Ali Cauchyjev kriterij konvergencije, teorem 2.4, koji je usko vezan za aksiom potpunosti, ima smisla i u metričkim prostorima.

Prisjetimo se definicije:

Definicija 27.1 (vidi definiciju 2.3)

Za niz $(x_n)_n$ u metričkom prostoru (X, d) kažemo da je *Cauchyjev niz* ili da *ima Cauchyjevo svojstvo* ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ za sve $m, n \geq n_0$.

Motivacija

Vidjeli smo kako je Cantorov aksiom potpunosti (svaki odozgo omeđen skup realnih brojeva ima supremum), bio koristan (konvergencija monotonih omeđenih nizova u $\mathbb{R}$, što za posljedicu ima da svaki Cauchyjev niz u $\mathbb{R}$ konvergira; povezanost intervala; kompaktnost segmenta;...). Međutim, to svojstvo realnih brojeva bitno ovisi o uređaju u $\mathbb{R}$, pa se ne može poopćiti na metričke prostore.

Ali Cauchyjev kriterij konvergencije, teorem 2.4, koji je usko vezan za aksiom potpunosti, ima smisla i u metričkim prostorima.

Prisjetimo se definicije:

Definicija 27.1 (vidi definiciju 2.3)

Za niz $(x_n)_n$ u metričkom prostoru (X, d) kažemo da je *Cauchyjev niz* ili da *ima Cauchyjevo svojstvo* ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ za sve $m, n \geq n_0$.

Motivacija

Vidjeli smo kako je Cantorov aksiom potpunosti (svaki odozgo omeđen skup realnih brojeva ima supremum), bio koristan (konvergencija monotonih omeđenih nizova u $\mathbb{R}$, što za posljedicu ima da svaki Cauchyjev niz u $\mathbb{R}$ konvergira; povezanost intervala; kompaktnost segmenta;...). Međutim, to svojstvo realnih brojeva bitno ovisi o uređaju u $\mathbb{R}$, pa se ne može poopćiti na metričke prostore.

Ali Cauchyjev kriterij konvergencije, teorem 2.4, koji je usko vezan za aksiom potpunosti, ima smisla i u metričkim prostorima.

Prisjetimo se definicije:

Definicija 27.1 (vidi definiciju 2.3)

Za niz $(x_n)_n$ u metričkom prostoru (X, d) kažemo da je *Cauchyjev niz* ili da *ima Cauchyjevo svojstvo* ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ za sve $m, n \geq n_0$.

Motivacija

Vidjeli smo kako je Cantorov aksiom potpunosti (svaki odozgo omeđen skup realnih brojeva ima supremum), bio koristan (konvergencija monotonih omeđenih nizova u $\mathbb{R}$, što za posljedicu ima da svaki Cauchyjev niz u $\mathbb{R}$ konvergira; povezanost intervala; kompaktnost segmenta;...). Međutim, to svojstvo realnih brojeva bitno ovisi o uređaju u $\mathbb{R}$, pa se ne može poopćiti na metričke prostore.

Ali Cauchyjev kriterij konvergencije, teorem 2.4, koji je usko vezan za aksiom potpunosti, ima smisla i u metričkim prostorima.

Prisjetimo se definicije:

Definicija 27.1 (vidi definiciju 2.3)

Za niz $(x_n)_n$ u metričkom prostoru (X, d) kažemo da je *Cauchyjev niz* ili da *ima Cauchyjevo svojstvo* ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ t.d. je $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ za sve $m, n \geqslant n_0$.

Potpunost

Znamo da je svaki konvergentan niz Cauchyjev. Ali, općenito, nije svaki Cauchyjev niz konvergentan.

Definicija 27.2

Metrički prostor (X, d) je *potpun* ako svaki Cauchyjev niz u X konvergira.

Primjer 27.3

Potpunost

Znamo da je svaki konvergentan niz Cauchyjev. Ali, općenito, nije svaki Cauchyjev niz konvergentan.

Definicija 27.2

Metrički prostor (X, d) je *potpun* ako svaki Cauchyjev niz u X konvergira.

Primjer 27.3

Potpunost

Znamo da je svaki konvergentan niz Cauchyjev. Ali, općenito, nije svaki Cauchyjev niz konvergentan.

Definicija 27.2

Metrički prostor (X, d) je *potpun* ako svaki Cauchyjev niz u X konvergira.

Primjer 27.3

- $\mathbb{R}$ je potpun;
- $\mathbb{Q}$ nije potpun: npr. niz $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, je Cauchyjev ali ne konvergira (u $\mathbb{Q}$!);
- $\langle 0, 1 \rangle \subseteq \mathbb{R}$ nije potpun;
- Prostori $\mathscr{B}(X, \mathbb{R})$ i $\mathscr{BC}(X, \mathbb{R})$ omeđenih, odnosno omeđenih neprekidnih realnih funkcija su potpuni metrički prostori.
- Općenito, ako je (Y, d) potpun metrički prostor onda su i $\mathscr{B}(X, Y)$ i $\mathscr{BC}(X, Y)$ potpuni metrički prostori.

Potpunost

Znamo da je svaki konvergentan niz Cauchyjev. Ali, općenito, nije svaki Cauchyjev niz konvergentan.

Definicija 27.2

Metrički prostor (X, d) je *potpun* ako svaki Cauchyjev niz u X konvergira.

Primjer 27.3

- $\mathbb{R}$ je potpun;
- $\mathbb{Q}$ nije potpun: npr. niz $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, je Cauchyjev ali ne konvergira (u $\mathbb{Q}$!);
- $\langle 0, 1\rangle \subseteq \mathbb{R}$ nije potpun;
- Prostori $\mathscr{B}(X, \mathbb{R})$ i $\mathscr{BC}(X, \mathbb{R})$ omeđenih, odnosno omeđenih neprekidnih realnih funkcija su potpuni metrički prostori.
- Općenito, ako je (Y, d) potpun metrički prostor onda su i $\mathscr{B}(X, Y)$ i $\mathscr{BC}(X, Y)$ potpuni metrički prostori.

Potpunost

Znamo da je svaki konvergentan niz Cauchyjev. Ali, općenito, nije svaki Cauchyjev niz konvergentan.

Definicija 27.2

Metrički prostor (X, d) je *potpun* ako svaki Cauchyjev niz u X konvergira.

Primjer 27.3

- $\mathbb{R}$ je potpun;
- $\mathbb{Q}$ nije potpun: npr. niz $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, je Cauchyjev ali ne konvergira (u $\mathbb{Q}$!);
- $\langle 0, 1\rangle \subseteq \mathbb{R}$ nije potpun;
- Prostori $\mathscr{B}(X, \mathbb{R})$ i $\mathscr{BC}(X, \mathbb{R})$ omeđenih, odnosno omeđenih neprekidnih realnih funkcija su potpuni metrički prostori.
- Općenito, ako je (Y, d) potpun metrički prostor onda su i $\mathscr{B}(X, Y)$ i $\mathscr{BC}(X, Y)$ potpuni metrički prostori.

Potpunost

Znamo da je svaki konvergentan niz Cauchyjev. Ali, općenito, nije svaki Cauchyjev niz konvergentan.

Definicija 27.2

Metrički prostor (X, d) je *potpun* ako svaki Cauchyjev niz u X konvergira.

Primjer 27.3

- $\mathbb{R}$ je potpun;
- $\mathbb{Q}$ nije potpun: npr. niz $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, je Cauchyjev ali ne konvergira (u $\mathbb{Q}$!);
- $\langle 0, 1\rangle \subseteq \mathbb{R}$ nije potpun;
- Prostori $\mathscr{B}(X, \mathbb{R})$ i $\mathscr{B}\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ omeđenih, odnosno omeđenih neprekidnih realnih funkcija su potpuni metrički prostori.
- Općenito, ako je (Y, d) potpun metrički prostor onda su i $\mathscr{B}(X, Y)$ i $\mathscr{B}\mathscr{C}(X, Y)$ potpuni metrički prostori.

Potpunost

Znamo da je svaki konvergentan niz Cauchyjev. Ali, općenito, nije svaki Cauchyjev niz konvergentan.

Definicija 27.2

Metrički prostor (X, d) je *potpun* ako svaki Cauchyjev niz u X konvergira.

Primjer 27.3

- $\mathbb{R}$ je potpun;
- $\mathbb{Q}$ nije potpun: npr. niz $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, je Cauchyjev ali ne konvergira (u $\mathbb{Q}$!);
- $\langle 0, 1\rangle \subseteq \mathbb{R}$ nije potpun;
- Prostori $\mathscr{B}(X, \mathbb{R})$ i $\mathscr{B}\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ omeđenih, odnosno omeđenih neprekidnih realnih funkcija su potpuni metrički prostori.
- Općenito, ako je (Y, d) potpun metrički prostor onda su i $\mathscr{B}(X, Y)$ i $\mathscr{B}\mathscr{C}(X, Y)$ potpuni metrički prostori.

Potpunost *nije* topološko svojstvo

Potpunost prostora ovisi o metrici — ona nije topološka invarijanta.

Primjer 27.4

$\mathbb{R}$ je potpun, a homeomorfan je intervalu $\langle -1, 1\rangle$ koji nije potpun (preslikavanje $f\colon \mathbb{R} \to \langle -1, 1\rangle$ definirano s $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ je homeomorfizam, vidi primjer (b) na str. 83).

Dakle, metrika ρ na $\mathbb{R}$ definirana formulom $\rho(x, y) = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right|$, je topološki ekvivalentna standardnoj metrici d, ali $(\mathbb{R}, \rho)$ nije potpun.

Potpunost *nije* topološko svojstvo

Potpunost prostora ovisi o metrici — ona nije topološka invarijanta.

Primjer 27.4

$\mathbb{R}$ je potpun, a homeomorfan je intervalu $\langle -1, 1\rangle$ koji nije potpun (preslikavanje $f\colon \mathbb{R} \to \langle -1, 1\rangle$ definirano s $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ je homeomorfizam, vidi primjer (b) na str. 83).

Dakle, metrika ρ na $\mathbb{R}$ definirana formulom $\rho(x, y) = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right|$, je topološki ekvivalentna standardnoj metrici d, ali $(\mathbb{R}, \rho)$ nije potpun.

Potpunost *nije* topološko svojstvo

Potpunost prostora ovisi o metrici — ona nije topološka invarijanta.

Primjer 27.4

$\mathbb{R}$ je potpun, a homeomorfan je intervalu $\langle -1, 1\rangle$ koji nije potpun (preslikavanje $f\colon \mathbb{R} \to \langle -1, 1\rangle$ definirano s $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ je homeomorfizam, vidi primjer (b) na str. 83).

Dakle, metrika ρ na $\mathbb{R}$ definirana formulom $\rho(x, y) = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right|$, je topološki ekvivalentna standardnoj metrici d, ali $(\mathbb{R}, \rho)$ nije potpun.

U nesuglasju s intuicijom

Kao primjenu potpunosti prostora $\mathscr{B}\mathscr{C}(X, Y)$ opisat ćemo konstrukciju „krivulje koja ispunjava kvadrat”.

Teorem 28.1

Postoji neprekidna surjekcija $f : [0, 1] \twoheadrightarrow [0, 1] \times [0, 1]$.

(Koristit ćemo oznake: $\mathbb{I} := [0, 1]$ i $\mathbb{I}^2 := \mathbb{I} \times \mathbb{I} = [0, 1] \times [0, 1]$).

Dokaz: 1. korak: Opišimo najprije jednu modifikaciju „trokutastih” puteva:

Za proizvoljan segment $[a, b]$ i proizvoljan kvadrat neka je g put sugeriran sljedećom slikom:

g

a b

Modificiran put g' sugeriran je tada sljedećom slikom:

g'

a b

U nesuglasju s intuicijom

Kao primjenu potpunosti prostora $\mathscr{BC}(X, Y)$ opisat ćemo konstrukciju „krivulje koja ispunjava kvadrat".

Teorem 28.1

Postoji neprekidna surjekcija $f\colon [0,1] \twoheadrightarrow [0,1] \times [0,1]$.

(Koristit ćemo oznake: $\mathbb{I} := [0,1]$ i $\mathbb{I}^2 := \mathbb{I} \times \mathbb{I} = [0,1] \times [0,1]$).

Dokaz: 1. korak: Opišimo najprije jednu modifikaciju „trokutastih" puteva:

Za proizvoljan segment $[a, b]$ i proizvoljan kvadrat neka je g put sugeriran sljedećom slikom:

g

a b

Modificiran put g' sugeriran je tada sljedećom slikom:

g'

a b

U nesuglasju s intuicijom

Kao primjenu potpunosti prostora $\mathscr{BC}(X, Y)$ opisat ćemo konstrukciju „krivulje koja ispunjava kvadrat".

Teorem 28.1

Postoji neprekidna surjekcija $f\colon [0,1] \twoheadrightarrow [0,1] \times [0,1]$.

(Koristit ćemo oznake: $\mathbb{I} := [0,1]$ i $\mathbb{I}^2 := \mathbb{I} \times \mathbb{I} = [0,1] \times [0,1]$).

Dokaz: 1. korak: Opišimo najprije jednu modifikaciju „trokutastih" puteva:

Za proizvoljan segment $[a, b]$ i proizvoljan kvadrat neka je g put sugeriran sljedećom slikom:

g

a b

Modificiran put g' sugeriran je tada sljedećom slikom:

g'

a b

U nesuglasju s intuicijom

Kao primjenu potpunosti prostora $\mathscr{BC}(X, Y)$ opisat ćemo konstrukciju „krivulje koja ispunjava kvadrat”.

Teorem 28.1

Postoji neprekidna surjekcija $f\colon [0,1] \twoheadrightarrow [0,1] \times [0,1]$.

(Koristit ćemo oznake: $\mathbb{I} := [0,1]$ i $\mathbb{I}^2 := \mathbb{I} \times \mathbb{I} = [0,1] \times [0,1]$).

Dokaz: 1. korak: Opišimo najprije jednu modifikaciju „trokutastih” puteva:

Za proizvoljan segment $[a, b]$ i proizvoljan kvadrat neka je g put sugeriran sljedećom slikom:

Modificiran put g' sugeriran je tada sljedećom slikom:

g

a b

g'

a b

U nesuglasju s intuicijom

Kao primjenu potpunosti prostora $\mathscr{B}\mathscr{C}(X, Y)$ opisat ćemo konstrukciju „krivulje koja ispunjava kvadrat".

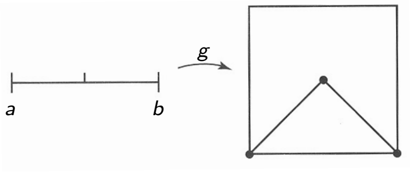
Teorem 28.1

Postoji neprekidna surjekcija $f\colon [0,1] \twoheadrightarrow [0,1] \times [0,1]$.

(Koristit ćemo oznake: $\mathbb{I} := [0,1]$ i $\mathbb{I}^2 := \mathbb{I} \times \mathbb{I} = [0,1] \times [0,1]$).

Dokaz: 1. korak: Opišimo najprije jednu modifikaciju „trokutastih" puteva:

Za proizvoljan segment $[a, b]$ i proizvoljan kvadrat neka je g put sugeriran sljedećom slikom:



Modificiran put g' sugeriran je tada sljedećom slikom:

g'

a b

U nesuglasju s intuicijom

Kao primjenu potpunosti prostora $\mathscr{B}\mathscr{C}(X, Y)$ opisat ćemo konstrukciju „krivulje koja ispunjava kvadrat”.

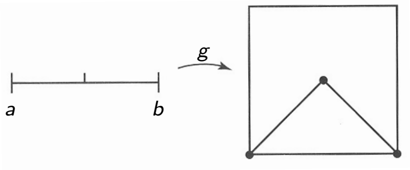
Teorem 28.1

Postoji neprekidna surjekcija $f\colon [0,1] \twoheadrightarrow [0,1] \times [0,1]$.

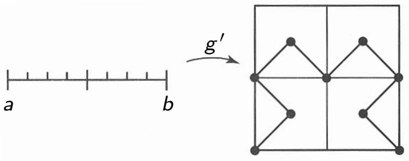
(Koristit ćemo oznake: $\mathbb{I} := [0,1]$ i $\mathbb{I}^2 := \mathbb{I} \times \mathbb{I} = [0,1] \times [0,1]$).

Dokaz: 1. korak: Opišimo najprije jednu modifikaciju „trokutastih” puteva:

Za proizvoljan segment $[a, b]$ i proizvoljan kvadrat neka je g put sugeriran sljedećom slikom:

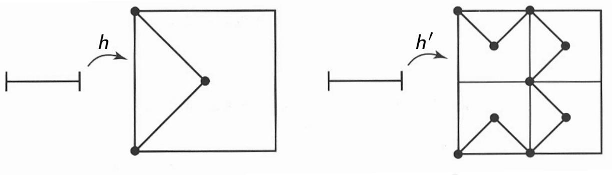


Modificiran put g' sugeriran je tada sljedećom slikom:



Konstrukcija Peanove krivulje

Analogna se modifikacija može napraviti i za ostale trokutaste puteve koji spajaju dva susjedna vrha kvadrata, naprimjer:



2. korak: Sada definiramo niz funkcija $f_n\colon \mathbb{I} \to \mathbb{I}^2$ ovako:

Funkcija f_0 neka je trokutast put g za $a = 0$ i $b = 1$.

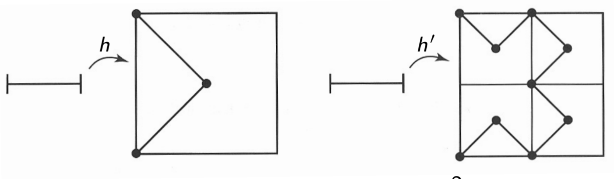
Funkcija f_1 neka je modificirani put g'.

Funkciju f_2 dobijemo tako da na svaki od četiri trokutasta puta koji čine f_1 primijenimo opisane modifikacije, itd.

Općenito, f_n se sastoji od 4^n trokutastih puteva koji svaki leži u kvadratiću stranice $\frac{1}{2^n}$, a f_{n+1} dobijemo tako da svaki od tih trokutastih puteva modificiramo na opisani način, zamjenjujući svaki od njih s četiri manja trokutasta puta.

Konstrukcija Peanove krivulje

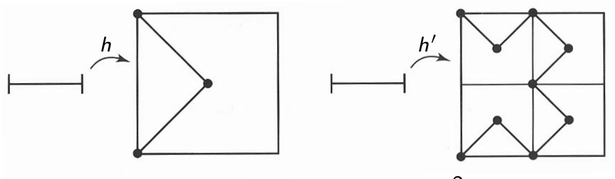
Analogna se modifikacija može napraviti i za ostale trokutaste puteve koji spajaju dva susjedna vrha kvadrata, naprimjer:



2. korak: Sada definiramo niz funkcija $f_n \colon \mathbb{I} \to \mathbb{I}^2$ ovako:
Funkcija f_0 neka je trokutast put g za $a = 0$ i $b = 1$.
Funkcija f_1 neka je modificirani put g'.
Funkciju f_2 dobijemo tako da na svaki od četiri trokutasta puta koji čine f_1 primijenimo opisane modifikacije, itd.
Općenito, f_n se sastoji od 4^n trokutastih puteva koji svaki leži u kvadratiću stranice $\frac{1}{2^n}$, a f_{n+1} dobijemo tako da svaki od tih trokutastih puteva modificiramo na opisani način, zamjenjujući svaki od njih s četiri manja trokutasta puta.

Konstrukcija Peanove krivulje

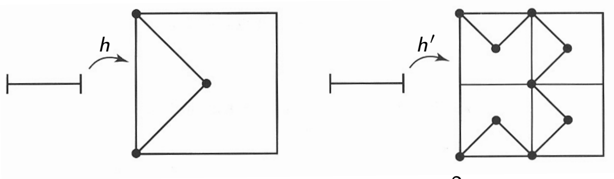
Analogna se modifikacija može napraviti i za ostale trokutaste puteve koji spajaju dva susjedna vrha kvadrata, naprimjer:



2. korak: Sada definiramo niz funkcija $f_n\colon \mathbb{I} \to \mathbb{I}^2$ ovako:
Funkcija f_0 neka je trokutast put g za $a = 0$ i $b = 1$.
Funkcija f_1 neka je modificirani put g'.
Funkciju f_2 dobijemo tako da na svaki od četiri trokutasta puta koji čine f_1 primijenimo opisane modifikacije, itd.
Općenito, f_n se sastoji od 4^n trokutastih puteva koji svaki leži u kvadratiću stranice $\frac{1}{2^n}$, a f_{n+1} dobijemo tako da svaki od tih trokutastih puteva modificiramo na opisani način, zamjenjujući svaki od njih s četiri manja trokutasta puta.

Konstrukcija Peanove krivulje

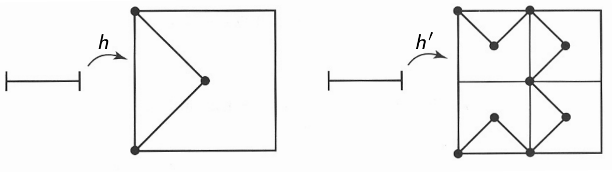
Analogna se modifikacija može napraviti i za ostale trokutaste puteve koji spajaju dva susjedna vrha kvadrata, naprimjer:



2. korak: Sada definiramo niz funkcija $f_n \colon \mathbb{I} \to \mathbb{I}^2$ ovako:
Funkcija f_0 neka je trokutast put g za $a = 0$ i $b = 1$.
Funkcija f_1 neka je modificirani put g'.
Funkciju f_2 dobijemo tako da na svaki od četiri trokutasta puta koji čine f_1 primijenimo opisane modifikacije, itd.
Općenito, f_n se sastoji od 4^n trokutastih puteva koji svaki leži u kvadratiću stranice $\frac{1}{2^n}$, a f_{n+1} dobijemo tako da svaki od tih trokutastih puteva modificiramo na opisani način, zamjenjujući svaki od njih s četiri manja trokutasta puta.

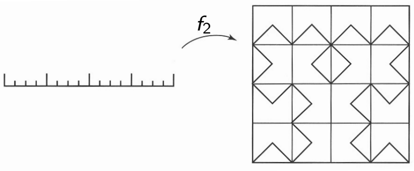
Konstrukcija Peanove krivulje

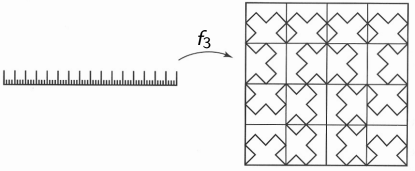
Analogna se modifikacija može napraviti i za ostale trokutaste puteve koji spajaju dva susjedna vrha kvadrata, naprimjer:



2. korak: Sada definiramo niz funkcija $f_n \colon \mathbb{I} \to \mathbb{I}^2$ ovako:
Funkcija f_0 neka je trokutast put g za $a = 0$ i $b = 1$.
Funkcija f_1 neka je modificirani put g'.
Funkciju f_2 dobijemo tako da na svaki od četiri trokutasta puta koji čine f_1 primijenimo opisane modifikacije, itd.
Općenito, f_n se sastoji od 4^n trokutastih puteva koji svaki leži u kvadratiću stranice $\frac{1}{2^n}$, a f_{n+1} dobijemo tako da svaki od tih trokutastih puteva modificiramo na opisani način, zamjenjujući svaki od njih s četiri manja trokutasta puta.

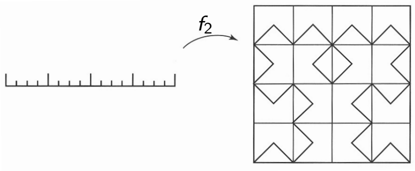
Peanovo preslikavanje

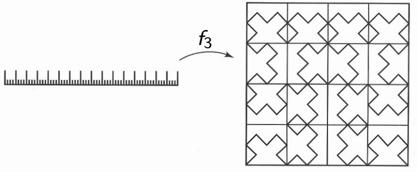




3. korak: Da dokažemo kako niz $(f_n)_n$ konvergira, zbog potpunosti prostora $\mathscr{C}(\mathbb{I}, \mathbb{I}^2)$, dovoljno je pokazati da je on Cauchyjev. No to slijedi iz konstrukcije, jer kada za $t \in [0,1]$ točka $f_n(t)$ „upadne" u neki kvadratić stranice $\frac{1}{2^n}$, bit će i $f_m(t)$ u tom istom kvadratiću i za sve $m > n$.
4. korak: Kako je $\mathscr{C}(\mathbb{I}, \mathbb{I}^2)$ potpun, niz f_n konvergira k neprekidnoj funkciji $f \colon \mathbb{I} \to \mathbb{I}^2$. Pokažimo da je f surjekcija. Neka je $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^2$ proizvoljna točka. Kako $\mathbf{x}$ leži u nekom od kvadratića stranice $\frac{1}{2^n}$, to je $d(\mathbf{x}, f_n(\mathbb{I})) \leqslant \frac{1}{2^n}$ jer put f_n „ulazi" u svaki takav kvadratić. Stoga za svaki $\varepsilon > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $\rho(f, f_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ i $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$, ε-okolina od $\mathbf{x}$ siječe $f(\mathbb{I})$, pa je $\mathbf{x} \in \overline{f(\mathbb{I})} = f(\mathbb{I})$.

Peanovo preslikavanje

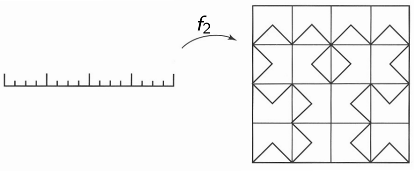


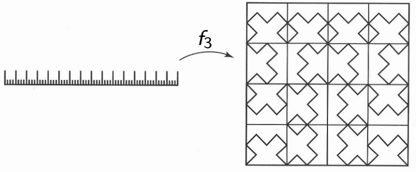


3. korak: Da dokažemo kako niz $(f_n)_n$ konvergira, zbog potpunosti prostora $\mathscr{C}(\mathbb{I}, \mathbb{I}^2)$, dovoljno je pokazati da je on Cauchyjev. No to slijedi iz konstrukcije, jer kada za $t \in [0,1]$ točka $f_n(t)$ „upadne" u neki kvadratić stranice $\frac{1}{2^n}$, bit će i $f_m(t)$ u tom istom kvadratiću i za sve $m > n$.

4. korak: Kako je $\mathscr{C}(\mathbb{I}, \mathbb{I}^2)$ potpun, niz f_n konvergira k neprekidnoj funkciji $f\colon \mathbb{I} \to \mathbb{I}^2$. Pokažimo da je f surjekcija. Neka je $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^2$ proizvoljna točka. Kako $\mathbf{x}$ leži u nekom od kvadratića stranice $\frac{1}{2^n}$, to je $d(\mathbf{x}, f_n(\mathbb{I})) \leqslant \frac{1}{2^n}$ jer put f_n „ulazi" u svaki takav kvadratić. Stoga za svaki $\varepsilon > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $\rho(f, f_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ i $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$, ε-okolina od $\mathbf{x}$ siječe $f(\mathbb{I})$, pa je $\mathbf{x} \in \overline{f(\mathbb{I})} = f(\mathbb{I})$. $\square$

Peanovo preslikavanje

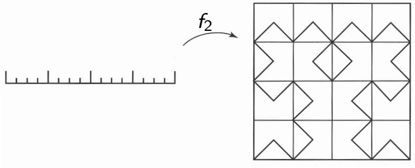


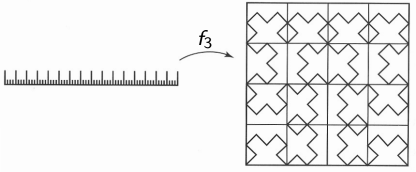


3. korak: Da dokažemo kako niz $(f_n)_n$ konvergira, zbog potpunosti prostora $\mathscr{C}(\mathbb{I}, \mathbb{I}^2)$, dovoljno je pokazati da je on Cauchyjev. No to slijedi iz konstrukcije, jer kada za $t \in [0,1]$ točka $f_n(t)$ „upadne" u neki kvadratić stranice $\frac{1}{2^n}$, bit će i $f_m(t)$ u tom istom kvadratiću i za sve $m > n$.

4. korak: Kako je $\mathscr{C}(\mathbb{I}, \mathbb{I}^2)$ potpun, niz f_n konvergira k neprekidnoj funkciji $f\colon \mathbb{I} \to \mathbb{I}^2$. Pokažimo da je f surjekcija. Neka je $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^2$ proizvoljna točka. Kako $\mathbf{x}$ leži u nekom od kvadratića stranice $\frac{1}{2^n}$, to je $d(\mathbf{x}, f_n(\mathbb{I})) \leqslant \frac{1}{2^n}$ jer put f_n „ulazi" u svaki takav kvadratić. Stoga za svaki $\varepsilon > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $\rho(f, f_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ i $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$, ε-okolina od $\mathbf{x}$ siječe $f(\mathbb{I})$, pa je $\mathbf{x} \in \overline{f(\mathbb{I})} = f(\mathbb{I})$.

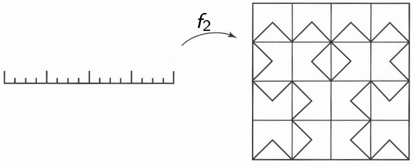
Peanovo preslikavanje

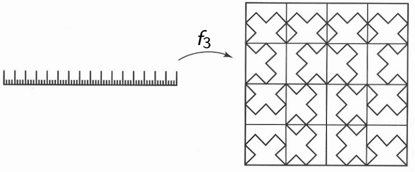




3. **korak:** Da dokažemo kako niz $(f_n)_n$ konvergira, zbog potpunosti prostora $\mathscr{C}(\mathbb{I}, \mathbb{I}^2)$, dovoljno je pokazati da je on Cauchyjev. No to slijedi iz konstrukcije, jer kada za $t \in [0,1]$ točka $f_n(t)$ „upadne” u neki kvadratić stranice $\frac{1}{2^n}$, bit će i $f_m(t)$ u tom istom kvadratiću i za sve $m > n$.
4. **korak:** Kako je $\mathscr{C}(\mathbb{I}, \mathbb{I}^2)$ potpun, niz f_n konvergira k neprekidnoj funkciji $f\colon \mathbb{I} \to \mathbb{I}^2$. Pokažimo da je f surjekcija. Neka je $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^2$ proizvoljna točka. Kako $\mathbf{x}$ leži u nekom od kvadratića stranice $\frac{1}{2^n}$, to je $d(\mathbf{x}, f_n(\mathbb{I})) \leqslant \frac{1}{2^n}$ jer put f_n „ulazi” u svaki takav kvadratić. Stoga za svaki $\varepsilon > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $\rho(f, f_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ i $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$, ε-okolina od $\mathbf{x}$ siječe $f(\mathbb{I})$, pa je $\mathbf{x} \in \overline{f(\mathbb{I})} = f(\mathbb{I})$. $\square$

Peanovo preslikavanje

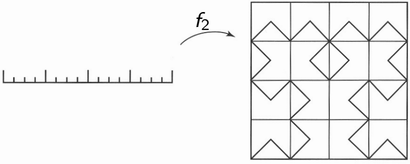


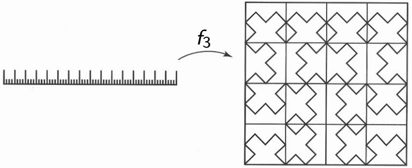


3. korak: Da dokažemo kako niz $(f_n)_n$ konvergira, zbog potpunosti prostora $\mathscr{C}(\mathbb{I}, \mathbb{I}^2)$, dovoljno je pokazati da je on Cauchyjev. No to slijedi iz konstrukcije, jer kada za $t \in [0, 1]$ točka $f_n(t)$ „upadne" u neki kvadratić stranice $\frac{1}{2^n}$, bit će i $f_m(t)$ u tom istom kvadratiću i za sve $m > n$.

4. korak: Kako je $\mathscr{C}(\mathbb{I}, \mathbb{I}^2)$ potpun, niz f_n konvergira k neprekidnoj funkciji $f\colon \mathbb{I} \to \mathbb{I}^2$. Pokažimo da je f surjekcija. Neka je $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^2$ proizvoljna točka. Kako $\mathbf{x}$ leži u nekom od kvadratića stranice $\frac{1}{2^n}$, to je $d(\mathbf{x}, f_n(\mathbb{I})) \leqslant \frac{1}{2^n}$ jer put f_n „ulazi" u svaki takav kvadratić. Stoga za svaki $\varepsilon > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $\rho(f, f_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ i $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$, ε-okolina od $\mathbf{x}$ siječe $f(\mathbb{I})$, pa je $\mathbf{x} \in \overline{f(\mathbb{I})} = f(\mathbb{I})$.

Peanovo preslikavanje





3. korak: Da dokažemo kako niz $(f_n)_n$ konvergira, zbog potpunosti prostora $\mathscr{C}(\mathbb{I}, \mathbb{I}^2)$, dovoljno je pokazati da je on Cauchyjev. No to slijedi iz konstrukcije, jer kada za $t \in [0, 1]$ točka $f_n(t)$ „upadne” u neki kvadratić stranice $\frac{1}{2^n}$, bit će i $f_m(t)$ u tom istom kvadratiću i za sve $m > n$.
4. korak: Kako je $\mathscr{C}(\mathbb{I}, \mathbb{I}^2)$ potpun, niz f_n konvergira k neprekidnoj funkciji $f : \mathbb{I} \to \mathbb{I}^2$. Pokažimo da je f surjekcija. Neka je $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^2$ proizvoljna točka. Kako $\mathbf{x}$ leži u nekom od kvadratića stranice $\frac{1}{2^n}$, to je $d(\mathbf{x}, f_n(\mathbb{I})) \leqslant \frac{1}{2^n}$ jer put f_n „ulazi” u svaki takav kvadratić. Stoga za svaki $\varepsilon > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $\rho(f, f_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ i $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$, ε-okolina od $\mathbf{x}$ siječe $f(\mathbb{I})$, pa je $\mathbf{x} \in \overline{f(\mathbb{I})} = f(\mathbb{I})$.

Potpunost potprostora

Podskup $A \subseteq \mathbb{R}$ je zatvoren ako i samo ako je potpun. Vrijedi i više:

Teorem 28.2

Neka je (X, d) metrički prostor.

(a) *Ako je potprostor $Y \subseteq X$ potpun onda je Y zatvoren u X.*

(b) *Ako je (X, d) potpun i $Y \subseteq X$ zatvoren, onda je Y potpun.*

Dokaz: (a) Neka je $x \in \overline{Y}$ i neka je $(x_n)_n$ niz u Y koji konvergira x (lema 24.2). Niz $(x_n)_n$ je Cauchyjev, pa, jer je Y potpun, konvergira u Y, te je, zbog jedinstvenosti limesa, $x \in Y$. Dakle, $\overline{Y} \subseteq Y$, tj. Y je zatvoren.

(b) Neka je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz u Y. Tada je on Cauchyjev niz i u X, pa je zbog potpunosti od X, konvergentan. Neka je $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Prema lemi 24.2, $x_0 \in \underbrace{\overline{Y} = Y}_{\text{jer je } Y \text{ zatvoren}}$, tj. Y je potpun. $\square$

Potpunost potprostora

Podskup $A \subseteq \mathbb{R}$ je zatvoren ako i samo ako je potpun. Vrijedi i više:

Teorem 28.2

Neka je (X, d) metrički prostor.

(a) *Ako je potprostor $Y \subseteq X$ potpun onda je Y zatvoren u X.*

(b) *Ako je (X, d) potpun i $Y \subseteq X$ zatvoren, onda je Y potpun.*

Dokaz: (a) Neka je $x \in \overline{Y}$ i neka je $(x_n)_n$ niz u Y koji konvergira x (lema 24.2). Niz $(x_n)_n$ je Cauchyjev, pa, jer je Y potpun, konvergira u Y, te je, zbog jedinstvenosti limesa, $x \in Y$. Dakle, $\overline{Y} \subseteq Y$, tj. Y je zatvoren.

(b) Neka je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz u Y. Tada je on Cauchyjev niz i u X, pa je zbog potpunosti od X, konvergentan. Neka je $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Prema lemi 24.2, $x_0 \in \underbrace{\overline{Y} = Y}_{\text{jer je } Y \text{ zatvoren}}$, tj. Y je potpun. $\square$

Potpunost potprostora

Podskup $A \subseteq \mathbb{R}$ je zatvoren ako i samo ako je potpun. Vrijedi i više:

Teorem 28.2

Neka je (X, d) metrički prostor.

(a) *Ako je potprostor $Y \subseteq X$ potpun onda je Y zatvoren u X.*

(b) *Ako je (X, d) potpun i $Y \subseteq X$ zatvoren, onda je Y potpun.*

Dokaz: (a) Neka je $x \in \overline{Y}$ i neka je $(x_n)_n$ niz u Y koji konvergira x (lema 24.2). Niz $(x_n)_n$ je Cauchyjev, pa, jer je Y potpun, konvergira u Y, te je, zbog jedinstvenosti limesa, $x \in Y$. Dakle, $\overline{Y} \subseteq Y$, tj. Y je zatvoren.

(b) Neka je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz u Y. Tada je on Cauchyjev niz i u X, pa je zbog potpunosti od X, konvergentan. Neka je $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Prema lemi 24.2, $x_0 \in \underbrace{\overline{Y} = Y}_{\text{jer je } Y \text{ zatvoren}}$, tj. Y je potpun.

Potpunost potprostora

Podskup $A \subseteq \mathbb{R}$ je zatvoren ako i samo ako je potpun. Vrijedi i više:

Teorem 28.2

Neka je (X, d) metrički prostor.

(a) *Ako je potprostor $Y \subseteq X$ potpun onda je Y zatvoren u X.*

(b) *Ako je (X, d) potpun i $Y \subseteq X$ zatvoren, onda je Y potpun.*

Dokaz: (a) Neka je $x \in \overline{Y}$ i neka je $(x_n)_n$ niz u Y koji konvergira x (lema 24.2). Niz $(x_n)_n$ je Cauchyjev, pa, jer je Y potpun, konvergira u Y, te je, zbog jedinstvenosti limesa, $x \in Y$. Dakle, $\overline{Y} \subseteq Y$, tj. Y je zatvoren.

(b) Neka je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz u Y. Tada je on Cauchyjev niz i u X, pa je zbog potpunosti od X, konvergentan. Neka je $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Prema lemi 24.2, $x_0 \in \underbrace{\overline{Y} = Y}_{\text{jer je } Y \text{ zatvoren}}$, tj. Y je potpun. $\square$

Potpunost potprostora

Podskup $A \subseteq \mathbb{R}$ je zatvoren ako i samo ako je potpun. Vrijedi i više:

Teorem 28.2

Neka je (X, d) metrički prostor.

(a) *Ako je potprostor $Y \subseteq X$ potpun onda je Y zatvoren u X.*

(b) *Ako je (X, d) potpun i $Y \subseteq X$ zatvoren, onda je Y potpun.*

Dokaz: (a) Neka je $x \in \overline{Y}$ i neka je $(x_n)_n$ niz u Y koji konvergira x (lema 24.2). Niz $(x_n)_n$ je Cauchyjev, pa, jer je Y potpun, konvergira u Y, te je, zbog jedinstvenosti limesa, $x \in Y$. Dakle, $\overline{Y} \subseteq Y$, tj. Y je zatvoren.

(b) Neka je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz u Y. Tada je on Cauchyjev niz i u X, pa je zbog potpunosti od X, konvergentan. Neka je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Prema lemi 24.2, $x_0 \in \underbrace{\overline{Y} = Y}_{\text{jer je } Y \text{ zatvoren}}$, tj. Y je potpun. $\square$

Potpunost potprostora

Podskup $A \subseteq \mathbb{R}$ je zatvoren ako i samo ako je potpun. Vrijedi i više:

Teorem 28.2

Neka je (X, d) metrički prostor.

(a) *Ako je potprostor $Y \subseteq X$ potpun onda je Y zatvoren u X.*

(b) *Ako je (X, d) potpun i $Y \subseteq X$ zatvoren, onda je Y potpun.*

Dokaz: (a) Neka je $x \in \overline{Y}$ i neka je $(x_n)_n$ niz u Y koji konvergira x (lema 24.2). Niz $(x_n)_n$ je Cauchyjev, pa, jer je Y potpun, konvergira u Y, te je, zbog jedinstvenosti limesa, $x \in Y$. Dakle, $\overline{Y} \subseteq Y$, tj. Y je zatvoren.

(b) Neka je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz u Y. Tada je on Cauchyjev niz i u X, pa je zbog potpunosti od X, konvergentan. Neka je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Prema lemi 24.2, $x_0 \in \underbrace{\overline{Y} = Y}_{\text{jer je } Y \text{ zatvoren}}$, tj. Y je potpun. $\square$

Kompaktni su potpuni

Potpun metrički prostor ne mora biti kompaktan. Ali:

Teorem 28.3

Svaki kompaktan metrički prostor je potpun.

Dokaz: Neka je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz u kompaktnom metričkom prostoru (X, d). Kako je svaki kompaktan metrički prostor nizovno kompaktan (propozicija 25.2 i teorem 25.10), postoji konvergentan podniz $\left(x_{n_k}\right)_k$. Tvrdnja teorema slijedi sada iz sljedeće leme:

Lema 28.4

Ako Cauchyjev niz $(x_n)_n$ ima konvergentan podniz $\left(x_{n_k}\right)_k$ s limesom x_0, onda je i sâm niz $(x_n)_n$ konvergentan, i limes mu je x_0.

Dokaz: Za $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$ t.d. je $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ za sve $m, n \geq n_0$.
$\exists k_0$ t.d. je $d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ za sve $k \geq k_0$.
t.d. je $n_k \geq n$.

Kompaktni su potpuni

Potpun metrički prostor ne mora biti kompaktan. Ali:

Teorem 28.3

Svaki kompaktan metrički prostor je potpun.

Dokaz: Neka je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz u kompaktnom metričkom prostoru (X, d).
Kako je svaki kompaktan metrički prostor nizovno kompaktan (propozicija 25.2 i teorem 25.10), postoji konvergentan podniz $(x_{n_k})_k$.
Tvrdnja teorema slijedi sada iz sljedeće leme:

Lema 28.4

Ako Cauchyjev niz $(x_n)_n$ ima konvergentan podniz $(x_{n_k})_k$ s limesom x_0, onda je i sâm niz $(x_n)_n$ konvergentan, i limes mu je x_0.

Dokaz: Za $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0$ t.d. je $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ za sve $m, n \geqslant n_0$.
$\exists k_0$ t.d. je $d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ za sve $k \geqslant k_0$.
t.d. je $n_k \geqslant n$.

Kompaktni su potpuni

Potpun metrički prostor ne mora biti kompaktan. Ali:

Teorem 28.3

Svaki kompaktan metrički prostor je potpun.

Dokaz: Neka je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz u kompaktnom metričkom prostoru (X, d). Kako je svaki kompaktan metrički prostor nizovno kompaktan (propozicija 25.2 i teorem 25.10), postoji konvergentan podniz $(x_{n_k})_k$.
Tvrdnja teorema slijedi sada iz sljedeće leme:

Lema 28.4

Ako Cauchyjev niz $(x_n)_n$ ima konvergentan podniz $(x_{n_k})_k$ s limesom x_0, onda je i sâm niz $(x_n)_n$ konvergentan, i limes mu je x_0.

Dokaz: Za $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0$ t.d. je $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ za sve $m, n \geqslant n_0$.
$\exists k_0$ t.d. je $d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ za sve $k \geqslant k_0$.
t.d. je $n_k \geqslant n$.

Kompaktni su potpuni

Potpun metrički prostor ne mora biti kompaktan. Ali:

Teorem 28.3

Svaki kompaktan metrički prostor je potpun.

Dokaz: Neka je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz u kompaktnom metričkom prostoru (X, d). Kako je svaki kompaktan metrički prostor nizovno kompaktan (propozicija 25.2 i teorem 25.10), postoji konvergentan podniz $(x_{n_k})_k$. Tvrdnja teorema slijedi sada iz sljedeće leme:

Lema 28.4

Ako Cauchyjev niz $(x_n)_n$ ima konvergentan podniz $(x_{n_k})_k$ s limesom x_0, onda je i sâm niz $(x_n)_n$ konvergentan, i limes mu je x_0.

Dokaz: Za $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0$ t.d. je $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ za sve $m, n \geqslant n_0$.
$\exists k_0$ t.d. je $d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ za sve $k \geqslant k_0$.
t.d. je $n_k \geqslant n$.

Kompaktni su potpuni

Potpun metrički prostor ne mora biti kompaktan. Ali:

Teorem 28.3

Svaki kompaktan metrički prostor je potpun.

Dokaz: Neka je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz u kompaktnom metričkom prostoru (X, d). Kako je svaki kompaktan metrički prostor nizovno kompaktan (propozicija 25.2 i teorem 25.10), postoji konvergentan podniz $\left(x_{n_k}\right)_k$. Tvrdnja teorema slijedi sada iz sljedeće leme:

Lema 28.4

Ako Cauchyjev niz $(x_n)_n$ ima konvergentan podniz $\left(x_{n_k}\right)_k$ s limesom x_0, onda je i sâm niz $(x_n)_n$ konvergentan, i limes mu je x_0.

Kompaktni su potpuni

Potpun metrički prostor ne mora biti kompaktan. Ali:

Teorem 28.3

Svaki kompaktan metrički prostor je potpun.

Dokaz: Neka je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz u kompaktnom metričkom prostoru (X, d). Kako je svaki kompaktan metrički prostor nizovno kompaktan (propozicija 25.2 i teorem 25.10), postoji konvergentan podniz $\left(x_{n_k}\right)_k$. Tvrdnja teorema slijedi sada iz sljedeće leme:

Lema 28.4

Ako Cauchyjev niz $(x_n)_n$ ima konvergentan podniz $\left(x_{n_k}\right)_k$ s limesom x_0, onda je i sâm niz $(x_n)_n$ konvergentan, i limes mu je x_0.

Dokaz: Za $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0$ t.d. je $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ za sve $m, n \geqslant n_0$.

Kompaktni su potpuni

Potpun metrički prostor ne mora biti kompaktan. Ali:

Teorem 28.3

Svaki kompaktan metrički prostor je potpun.

Dokaz: Neka je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz u kompaktnom metričkom prostoru (X, d). Kako je svaki kompaktan metrički prostor nizovno kompaktan (propozicija 25.2 i teorem 25.10), postoji konvergentan podniz $\left(x_{n_k}\right)_k$. Tvrdnja teorema slijedi sada iz sljedeće leme:

Lema 28.4

Ako Cauchyjev niz $(x_n)_n$ ima konvergentan podniz $\left(x_{n_k}\right)_k$ s limesom x_0, onda je i sâm niz $(x_n)_n$ konvergentan, i limes mu je x_0.

Dokaz: Za $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0$ t.d. je $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ za sve $m, n \geqslant n_0$. Kako $x_{n_k} \xrightarrow{k} x_0$, $\exists k_0$ t.d. je $d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ za sve $k \geqslant k_0$. Za svaki $n \geqslant n_0$ neka je $k \geqslant k_0$ t.d. je $n_k \geqslant n$.

Kompaktni su potpuni

Potpun metrički prostor ne mora biti kompaktan. Ali:

Teorem 28.3

Svaki kompaktan metrički prostor je potpun.

Dokaz: Neka je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz u kompaktnom metričkom prostoru (X, d). Kako je svaki kompaktan metrički prostor nizovno kompaktan (propozicija 25.2 i teorem 25.10), postoji konvergentan podniz $\left(x_{n_k}\right)_k$. Tvrdnja teorema slijedi sada iz sljedeće leme:

Lema 28.4

Ako Cauchyjev niz $(x_n)_n$ ima konvergentan podniz $\left(x_{n_k}\right)_k$ s limesom x_0, onda je i sâm niz $(x_n)_n$ konvergentan, i limes mu je x_0.

Dokaz: Za $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0$ t.d. je $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ za sve $m, n \geqslant n_0$. Kako $x_{n_k} \xrightarrow{k} x_0$, $\exists k_0$ t.d. je $d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ za sve $k \geqslant k_0$. Za svaki $n \geqslant n_0$ neka je $k \geqslant k_0$ t.d. je $n_k \geqslant n$. Tada je $d(x_n, x_0) \leqslant d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) < \varepsilon$, pa $x_n \xrightarrow{n} x_0$. □

Kompaktni su potpuni

Potpun metrički prostor ne mora biti kompaktan. Ali:

Teorem 28.3

Svaki kompaktan metrički prostor je potpun.

Dokaz: Neka je $(x_n)_n$ Cauchyjev niz u kompaktnom metričkom prostoru (X, d). Kako je svaki kompaktan metrički prostor nizovno kompaktan (propozicija 25.2 i teorem 25.10), postoji konvergentan podniz $\left(x_{n_k}\right)_k$. Tvrdnja teorema slijedi sada iz sljedeće leme:

Lema 28.4

Ako Cauchyjev niz $(x_n)_n$ ima konvergentan podniz $\left(x_{n_k}\right)_k$ s limesom x_0, onda je i sâm niz $(x_n)_n$ konvergentan, i limes mu je x_0.

Dokaz: Za $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0$ t.d. je $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ za sve $m, n \geqslant n_0$. Kako $x_{n_k} \xrightarrow{k} x_0$, $\exists k_0$ t.d. je $d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ za sve $k \geqslant k_0$. Za svaki $n \geqslant n_0$ neka je $k \geqslant k_0$ t.d. je $n_k \geqslant n$. Tada je $d(x_n, x_0) \leqslant d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) < \varepsilon$, pa $x_n \xrightarrow{n} x_0$. $\square$

Potpunost euklidskih prostora

Prostor $\mathbb{R}$ realnih brojeva je potpun (teorem 2.4). Da su i svi euklidski prostori $\mathbb{E}^n$ potpuni, slijedi iz sljedećeg teorema:

Teorem 28.5

Neka su (X, d_X) *i* (Y, d_Y) *potpuni metrički prostori. Tada je i produkt* $(X \times Y, d)$ *potpun za svaku od metrika* $d = d_1, d_2, d_\infty$ *iz definicije* 6.11.

Dokaz: Neka je $\left((x_n, y_n)\right)_n$ Cauchyjev niz u $X \times Y$. Tada su i nizovi $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ Cauchyjevi nizovi u X odnosno Y, pa su, zbog potpunosti, konvergentni. Stoga i niz $\left((x_n, y_n)\right)_n$ konvergira. □

Indukcijom se pokazuje da je i produkt od konačno mnogo potpunih prostora potpun. Specijalno,

Posljedica 28.6

Euklidski prostori $\mathbb{E}^n$ *su potpuni za sve* $n \in \mathbb{N}$. □

Potpunost euklidskih prostora

Prostor $\mathbb{R}$ realnih brojeva je potpun (teorem 2.4). Da su i svi euklidski prostori $\mathbb{E}^n$ potpuni, slijedi iz sljedećeg teorema:

Teorem 28.5

Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) potpuni metrički prostori. Tada je i produkt $(X \times Y, d)$ potpun za svaku od metrika $d = d_1, d_2, d_\infty$ iz definicije 6.11.

Dokaz: Neka je $\big((x_n, y_n)\big)_n$ Cauchyjev niz u $X \times Y$. Tada su i nizovi $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ Cauchyjevi nizovi u X odnosno Y, pa su, zbog potpunosti, konvergentni. Stoga i niz $\big((x_n, y_n)\big)_n$ konvergira. $\square$

Indukcijom se pokazuje da je i produkt od konačno mnogo potpunih prostora potpun. Specijalno,

Posljedica 28.6

Euklidski prostori $\mathbb{E}^n$ su potpuni za sve $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Potpunost euklidskih prostora

Prostor $\mathbb{R}$ realnih brojeva je potpun (teorem 2.4). Da su i svi euklidski prostori $\mathbb{E}^n$ potpuni, slijedi iz sljedećeg teorema:

Teorem 28.5

Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) potpuni metrički prostori. Tada je i produkt $(X \times Y, d)$ potpun za svaku od metrika $d = d_1, d_2, d_\infty$ iz definicije 6.11.

Dokaz: Neka je $\left((x_n, y_n)\right)_n$ Cauchyjev niz u $X \times Y$. Tada su i nizovi $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ Cauchyjevi nizovi u X odnosno Y, pa su, zbog potpunosti, konvergentni. Stoga i niz $\left((x_n, y_n)\right)_n$ konvergira. □

Indukcijom se pokazuje da je i produkt od konačno mnogo potpunih prostora potpun. Specijalno,

Posljedica 28.6

Euklidski prostori $\mathbb{E}^n$ su potpuni za sve $n \in \mathbb{N}$. □

Potpunost euklidskih prostora

Prostor $\mathbb{R}$ realnih brojeva je potpun (teorem 2.4). Da su i svi euklidski prostori $\mathbb{E}^n$ potpuni, slijedi iz sljedećeg teorema:

Teorem 28.5

Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) potpuni metrički prostori. Tada je i produkt $(X \times Y, d)$ potpun za svaku od metrika $d = d_1, d_2, d_\infty$ iz definicije 6.11.

Dokaz: Neka je $\big((x_n, y_n)\big)_n$ Cauchyjev niz u $X \times Y$. Tada su i nizovi $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ Cauchyjevi nizovi u X odnosno Y, pa su, zbog potpunosti, konvergentni. Stoga i niz $\big((x_n, y_n)\big)_n$ konvergira. □

Indukcijom se pokazuje da je i produkt od konačno mnogo potpunih prostora potpun. Specijalno,

Posljedica 28.6

Euklidski prostori $\mathbb{E}^n$ su potpuni za sve $n \in \mathbb{N}$. □

Potpunost euklidskih prostora

Prostor $\mathbb{R}$ realnih brojeva je potpun (teorem 2.4). Da su i svi euklidski prostori $\mathbb{E}^n$ potpuni, slijedi iz sljedećeg teorema:

Teorem 28.5

Neka su (X, d_X) *i* (Y, d_Y) *potpuni metrički prostori. Tada je i produkt* $(X \times Y, d)$ *potpun za svaku od metrika* $d = d_1, d_2, d_\infty$ *iz definicije* 6.11.

Dokaz: Neka je $\big((x_n, y_n)\big)_n$ Cauchyjev niz u $X \times Y$. Tada su i nizovi $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ Cauchyjevi nizovi u X odnosno Y, pa su, zbog potpunosti, konvergentni. Stoga i niz $\big((x_n, y_n)\big)_n$ konvergira. $\square$

Indukcijom se pokazuje da je i produkt od konačno mnogo potpunih prostora potpun. Specijalno,

Posljedica 28.6

Euklidski prostori $\mathbb{E}^n$ *su potpuni za sve* $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Potpunost euklidskih prostora

Prostor $\mathbb{R}$ realnih brojeva je potpun (teorem 2.4). Da su i svi euklidski prostori $\mathbb{E}^n$ potpuni, slijedi iz sljedećeg teorema:

Teorem 28.5

Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) potpuni metrički prostori. Tada je i produkt $(X \times Y, d)$ potpun za svaku od metrika $d = d_1, d_2, d_\infty$ iz definicije 6.11.

Dokaz: Neka je $\big((x_n, y_n)\big)_n$ Cauchyjev niz u $X \times Y$. Tada su i nizovi $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ Cauchyjevi nizovi u X odnosno Y, pa su, zbog potpunosti, konvergentni. Stoga i niz $\big((x_n, y_n)\big)_n$ konvergira. $\square$

Indukcijom se pokazuje da je i produkt od konačno mnogo potpunih prostora potpun. Specijalno,

Posljedica 28.6

Euklidski prostori $\mathbb{E}^n$ su potpuni za sve $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Lipschitzova preslikavanja

Definicija 29.1

Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori. Za preslikavanje $f : X \to Y$ kažemo da ima *Lipschitzovo svojstvo* ili da je *Lipschitzovo preslikavanje*, ako postoji $\lambda > 0$ takav da je $d_Y(f(x), f(x')) \leqslant \lambda\, d_X(x, x')$ za sve $x, x' \in X$.

Teorem 29.2

Svako Lipschitzovo preslikavanje je uniformno neprekidno.

Dokaz: Neka je $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ Lipschitzovo preslikavanje s konstantom $\lambda > 0$. Za $\varepsilon > 0$ odaberimo $\delta = \frac{\varepsilon}{\lambda}$. Tada za sve $x, x' \in X$ za koje je $d_X(x, x') < \delta$ vrijedi

$$d_Y\big(f(x), f(x')\big) \leqslant \lambda\, d_X(x, x') < \lambda\, \delta = \varepsilon$$

pa je preslikavanje f uniformno neprekidno. $\square$

Lipschitzova preslikavanja

Definicija 29.1

Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori. Za preslikavanje $f\colon X \to Y$ kažemo da ima *Lipschitzovo svojstvo* ili da je *Lipschitzovo preslikavanje*, ako postoji $\lambda > 0$ takav da je $d_Y\big(f(x), f(x')\big) \leqslant \lambda\, d_X(x, x')$ za sve $x, x' \in X$.

Teorem 29.2

Svako Lipschitzovo preslikavanje je uniformno neprekidno.

Dokaz: Neka je $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ Lipschitzovo preslikavanje s konstantom $\lambda > 0$. Za $\varepsilon > 0$ odaberimo $\delta = \frac{\varepsilon}{\lambda}$. Tada za sve $x, x' \in X$ za koje je $d_X(x, x') < \delta$ vrijedi

$$d_Y\big(f(x), f(x')\big) \leqslant \lambda\, d_X(x, x') < \lambda\, \delta = \varepsilon$$

pa je preslikavanje f uniformno neprekidno. $\square$

Lipschitzova preslikavanja

Definicija 29.1

Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori. Za preslikavanje $f\colon X \to Y$ kažemo da ima *Lipschitzovo svojstvo* ili da je *Lipschitzovo preslikavanje*, ako postoji $\lambda > 0$ takav da je $d_Y\big(f(x), f(x')\big) \leqslant \lambda\, d_X(x, x')$ za sve $x, x' \in X$.

Teorem 29.2

Svako Lipschitzovo preslikavanje je uniformno neprekidno.

Dokaz: Neka je $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ Lipschitzovo preslikavanje s konstantom $\lambda > 0$. Za $\varepsilon > 0$ odaberimo $\delta = \frac{\varepsilon}{\lambda}$. Tada za sve $x, x' \in X$ za koje je $d_X(x, x') < \delta$ vrijedi

$$d_Y\big(f(x), f(x')\big) \leqslant \lambda\, d_X(x, x') < \lambda\, \delta = \varepsilon$$

pa je preslikavanje f uniformno neprekidno. □

Lipschitzova preslikavanja

Definicija 29.1

Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori. Za preslikavanje $f: X \to Y$ kažemo da ima *Lipschitzovo svojstvo* ili da je *Lipschitzovo preslikavanje*, ako postoji $\lambda > 0$ takav da je $d_Y\big(f(x), f(x')\big) \leqslant \lambda\, d_X(x, x')$ za sve $x, x' \in X$.

Teorem 29.2

Svako Lipschitzovo preslikavanje je uniformno neprekidno.

Dokaz: Neka je $f: (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ Lipschitzovo preslikavanje s konstantom $\lambda > 0$. Za $\varepsilon > 0$ odaberimo $\delta = \frac{\varepsilon}{\lambda}$. Tada za sve $x, x' \in X$ za koje je $d_X(x, x') < \delta$ vrijedi

$$d_Y\big(f(x), f(x')\big) \leqslant \lambda\, d_X(x, x') < \lambda\, \delta = \varepsilon$$

pa je preslikavanje f uniformno neprekidno. $\square$

Kontrakcija

Posebno važna Lipschitzova preslikavanja su kontrakcije.

Definicija 29.3

Neka je (X, d) metrički prostor. Preslikavanje $f\colon X \to X$ je *kontrakcija* ako postoji $0 < \lambda < 1$ takav da za sve $x, x' \in X$ vrijedi $d\big(f(x), f(x')\big) \leqslant \lambda\, d(x, x')$.

Napomena: Je li neko preslikavanje $f\colon X \to X$ kontrakcija ili ne, bitno ovisi o odabranoj metrici na X.

Iz prethodnog teorema neposredno slijedi

Posljedica 29.4

Svaka kontrakcija $f\colon (X, d) \to (X, d)$ je uniformno neprekidno preslikavanje. $\square$

Kontrakcija

Posebno važna Lipschitzova preslikavanja su kontrakcije.

Definicija 29.3

Neka je (X, d) metrički prostor. Preslikavanje $f\colon X \to X$ je *kontrakcija* ako postoji $0 < \lambda < 1$ takav da za sve $x, x' \in X$ vrijedi $d\big(f(x), f(x')\big) \leqslant \lambda\, d(x, x')$.

Napomena: Je li neko preslikavanje $f\colon X \to X$ kontrakcija ili ne, bitno ovisi o odabranoj metrici na X.

Iz prethodnog teorema neposredno slijedi

Posljedica 29.4

Svaka kontrakcija $f\colon (X, d) \to (X, d)$ je uniformno neprekidno preslikavanje. $\square$

Kontrakcija

Posebno važna Lipschitzova preslikavanja su kontrakcije.

Definicija 29.3

Neka je (X, d) metrički prostor. Preslikavanje $f\colon X \to X$ je *kontrakcija* ako postoji $0 < \lambda < 1$ takav da za sve $x, x' \in X$ vrijedi $d\big(f(x), f(x')\big) \leqslant \lambda\, d(x, x')$.

Napomena: Je li neko preslikavanje $f\colon X \to X$ kontrakcija ili ne, bitno ovisi o odabranoj metrici na X.

Iz prethodnog teorema neposredno slijedi

Posljedica 29.4

Svaka kontrakcija $f\colon (X, d) \to (X, d)$ je uniformno neprekidno preslikavanje. □

Fiksne točke preslikavanja

Definicija 29.5

Za točku $x \in X$ kažemo da je *fiksna točka* funkcije $f\colon X \to X$ ako je $f(x) = x$.

Neke funkcije imaju jednu ili više fiksnih točaka (npr. za identitetu sve su točke fiksne), a neke nemaju niti jednu fiksnu točku (npr. rotacija kružnice za kut $\neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

Jedan teorem o postojanju fiksne točke već smo imali — 9. zadatak u vježbama uz 5. poglavlje:

> Svaka neprekidna funkcija $f\colon [a,b] \to [a,b]$ ima fiksnu točku.

Jedan od najvažnijih i svestrano primjenjiv teorem o fiksnoj točki je sljedeći teorem poljskog matematičara Stefana Banacha (1892–1945):

Fiksne točke preslikavanja

Definicija 29.5

Za točku $x \in X$ kažemo da je *fiksna točka* funkcije $f\colon X \to X$ ako je $f(x) = x$.

Neke funkcije imaju jednu ili više fiksnih točaka (npr. za identitetu sve su točke fiksne), a neke nemaju niti jednu fiksnu točku (npr. rotacija kružnice za kut $\neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

Jedan teorem o postojanju fiksne točke već smo imali — 9. zadatak u vježbama uz 5. poglavlje:

Svaka neprekidna funkcija $f\colon [a, b] \to [a, b]$ ima fiksnu točku.

Jedan od najvažnijih i svestrano primjenjiv teorem o fiksnoj točki je sljedeći teorem poljskog matematičara Stefana Banacha (1892–1945):

Fiksne točke preslikavanja

Definicija 29.5

Za točku $x \in X$ kažemo da je *fiksna točka* funkcije $f\colon X \to X$ ako je $f(x) = x$.

Neke funkcije imaju jednu ili više fiksnih točaka (npr. za identitetu sve su točke fiksne), a neke nemaju niti jednu fiksnu točku (npr. rotacija kružnice za kut $\neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

Jedan teorem o postojanju fiksne točke već smo imali — 9. zadatak u vježbama uz 5. poglavlje:

Svaka neprekidna funkcija $f\colon [a, b] \to [a, b]$ ima fiksnu točku.

Jedan od najvažnijih i svestrano primjenjiv teorem o fiksnoj točki je sljedeći teorem poljskog matematičara Stefana Banacha (1892–1945):

Fiksne točke preslikavanja

Definicija 29.5

Za točku $x \in X$ kažemo da je *fiksna točka* funkcije $f\colon X \to X$ ako je $f(x) = x$.

Neke funkcije imaju jednu ili više fiksnih točaka (npr. za identitetu sve su točke fiksne), a neke nemaju niti jednu fiksnu točku (npr. rotacija kružnice za kut $\neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

Jedan teorem o postojanju fiksne točke već smo imali — 9. zadatak u vježbama uz 5. poglavlje:

Svaka neprekidna funkcija $f\colon [a, b] \to [a, b]$ ima fiksnu točku.

Jedan od najvažnijih i svestrano primjenjiv teorem o fiksnoj točki je sljedeći teorem poljskog matematičara Stefana Banacha (1892–1945):

Banachov teorem o fiksnoj točki

Teorem 29.6 (Banachov teorem o fiksnoj točki (1922))

Svaka kontrakcija $f\colon X \to X$ potpunog metričkog prostora (X, d) ima jednu jedinu fiksnu točku.

Dokaz: Egzistencija: Neka je $x_0 \in X$ proizvoljna točka, i induktivno definirajmo točke $x_n := f(x_{n-1})$, $n \geqslant 1$.

Tvrdnja: Niz $(x_n)_n$ je Cauchyjev. Za svaki $n \geqslant 1$ vrijedi

$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leqslant \lambda\, d(x_n, x_{n-1}) \leqslant \cdots \leqslant \lambda^n\, d(x_1, x_0)$, gdje je $\lambda < 1$ koeficijent kontrakcije f, pa za $m > n$ iz $d(x_m, x_n) \leqslant d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n)$ dobivamo

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leqslant (\lambda^{m-1} + \lambda^{m-2} + \cdots + \lambda^n)\, d(x_1, x_0) \\ &= \lambda^n(\lambda^{m-n-1} + \lambda^{m-n-2} + \cdots + 1)\, d(x_1, x_0) \\ &= \frac{\lambda^n(1-\lambda^{m-n})}{1-\lambda} d(x_1, x_0) < \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_1, x_0). \qquad (*) \end{aligned}$$

Kako je $\lambda < 1$ to $\frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_1, x_0) \xrightarrow{n} 0$ pa je niz $(x_n)_n$ Cauchyjev.

Banachov teorem o fiksnoj točki

Teorem 29.6 (Banachov teorem o fiksnoj točki (1922))

Svaka kontrakcija $f : X \to X$ potpunog metričkog prostora (X, d) ima jednu jedinu fiksnu točku.

Dokaz: **Egzistencija:** Neka je $x_0 \in X$ proizvoljna točka, i induktivno definirajmo točke $x_n := f(x_{n-1})$, $n \geqslant 1$.

Tvrdnja: Niz $(x_n)_n$ je Cauchyjev. Za svaki $n \geqslant 1$ vrijedi

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leqslant \lambda\, d(x_n, x_{n-1}) \leqslant \cdots \leqslant \lambda^n\, d(x_1, x_0),$$

gdje je $\lambda < 1$ koeficijent kontrakcije f, pa za $m > n$ iz $d(x_m, x_n) \leqslant d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n)$ dobivamo

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leqslant (\lambda^{m-1} + \lambda^{m-2} + \cdots + \lambda^n)\, d(x_1, x_0) \\ &= \lambda^n(\lambda^{m-n-1} + \lambda^{m-n-2} + \cdots + 1)\, d(x_1, x_0) \\ &= \frac{\lambda^n(1-\lambda^{m-n})}{1-\lambda} d(x_1, x_0) < \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_1, x_0). \qquad (*) \end{aligned}$$

Kako je $\lambda < 1$ to $\frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_1, x_0) \xrightarrow{n} 0$ pa je niz $(x_n)_n$ Cauchyjev.

Banachov teorem o fiksnoj točki

Teorem 29.6 (Banachov teorem o fiksnoj točki (1922))

Svaka kontrakcija $f\colon X \to X$ potpunog metričkog prostora (X, d) ima jednu jedinu fiksnu točku.

Dokaz: Egzistencija: Neka je $x_0 \in X$ proizvoljna točka, i induktivno definirajmo točke $x_n := f(x_{n-1})$, $n \geqslant 1$.

Tvrdnja: Niz $(x_n)_n$ je Cauchyjev. Za svaki $n \geqslant 1$ vrijedi

$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leqslant \lambda\, d(x_n, x_{n-1}) \leqslant \cdots \leqslant \lambda^n\, d(x_1, x_0)$,

gdje je $\lambda < 1$ koeficijent kontrakcije f, pa za $m > n$ iz $d(x_m, x_n) \leqslant d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n)$ dobivamo

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leqslant (\lambda^{m-1} + \lambda^{m-2} + \cdots + \lambda^n)\, d(x_1, x_0) \\ &= \lambda^n(\lambda^{m-n-1} + \lambda^{m-n-2} + \cdots + 1)\, d(x_1, x_0) \\ &= \frac{\lambda^n(1-\lambda^{m-n})}{1-\lambda} d(x_1, x_0) < \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_1, x_0). \qquad (*) \end{aligned}$$

Kako je $\lambda < 1$ to $\frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_1, x_0) \xrightarrow{n} 0$ pa je niz $(x_n)_n$ Cauchyjev.

Banachov teorem o fiksnoj točki

Teorem 29.6 (Banachov teorem o fiksnoj točki (1922))

Svaka kontrakcija $f\colon X \to X$ potpunog metričkog prostora (X, d) ima jednu jedinu fiksnu točku.

Dokaz: Egzistencija: Neka je $x_0 \in X$ proizvoljna točka, i induktivno definirajmo točke $x_n := f(x_{n-1})$, $n \geqslant 1$.

Tvrdnja: Niz $(x_n)_n$ je Cauchyjev. Za svaki $n \geqslant 1$ vrijedi

$$d(x_{n+1}, x_n) = d\big(f(x_n), f(x_{n-1})\big) \leqslant \lambda\, d(x_n, x_{n-1}) \leqslant \cdots \leqslant \lambda^n\, d(x_1, x_0),$$

gdje je $\lambda < 1$ koeficijent kontrakcije f, pa za $m > n$ iz $d(x_m, x_n) \leqslant d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n)$ dobivamo

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leqslant (\lambda^{m-1} + \lambda^{m-2} + \cdots + \lambda^n)\, d(x_1, x_0) \\ &= \lambda^n(\lambda^{m-n-1} + \lambda^{m-n-2} + \cdots + 1)\, d(x_1, x_0) \\ &= \frac{\lambda^n(1-\lambda^{m-n})}{1-\lambda} d(x_1, x_0) < \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_1, x_0). \qquad (*) \end{aligned}$$

Kako je $\lambda < 1$ to $\frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_1, x_0) \xrightarrow{n} 0$ pa je niz $(x_n)_n$ Cauchyjev.

Banachov teorem o fiksnoj točki

Teorem 29.6 (Banachov teorem o fiksnoj točki (1922))

Svaka kontrakcija $f\colon X \to X$ potpunog metričkog prostora (X, d) ima jednu jedinu fiksnu točku.

Dokaz: Egzistencija: Neka je $x_0 \in X$ proizvoljna točka, i induktivno definirajmo točke $x_n := f(x_{n-1})$, $n \geqslant 1$.

Tvrdnja: Niz $(x_n)_n$ je Cauchyjev. Za svaki $n \geqslant 1$ vrijedi

$$d(x_{n+1}, x_n) = d\big(f(x_n), f(x_{n-1})\big) \leqslant \lambda\, d(x_n, x_{n-1}) \leqslant \cdots \leqslant \lambda^n\, d(x_1, x_0),$$

gdje je $\lambda < 1$ koeficijent kontrakcije f, pa za $m > n$ iz $d(x_m, x_n) \leqslant d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n)$ dobivamo

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leqslant (\lambda^{m-1} + \lambda^{m-2} + \cdots + \lambda^n)\, d(x_1, x_0) \\ &= \lambda^n(\lambda^{m-n-1} + \lambda^{m-n-2} + \cdots + 1)\, d(x_1, x_0) \\ &= \frac{\lambda^n(1-\lambda^{m-n})}{1-\lambda} d(x_1, x_0) < \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_1, x_0). \qquad (*) \end{aligned}$$

Kako je $\lambda < 1$ to $\frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_1, x_0) \xrightarrow{n} 0$ pa je niz $(x_n)_n$ Cauchyjev.

Banachov teorem o fiksnoj točki

Teorem 29.6 (Banachov teorem o fiksnoj točki (1922))

Svaka kontrakcija $f\colon X \to X$ potpunog metričkog prostora (X, d) ima jednu jedinu fiksnu točku.

Dokaz: Egzistencija: Neka je $x_0 \in X$ proizvoljna točka, i induktivno definirajmo točke $x_n := f(x_{n-1})$, $n \geqslant 1$.

Tvrdnja: Niz $(x_n)_n$ je Cauchyjev. Za svaki $n \geqslant 1$ vrijedi

$$d(x_{n+1}, x_n) = d\big(f(x_n), f(x_{n-1})\big) \leqslant \lambda\, d(x_n, x_{n-1}) \leqslant \cdots \leqslant \lambda^n\, d(x_1, x_0),$$

gdje je $\lambda < 1$ koeficijent kontrakcije f, pa za $m > n$ iz $d(x_m, x_n) \leqslant d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n)$ dobivamo

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leqslant (\lambda^{m-1} + \lambda^{m-2} + \cdots + \lambda^n)\, d(x_1, x_0) \\ &= \lambda^n(\lambda^{m-n-1} + \lambda^{m-n-2} + \cdots + 1)\, d(x_1, x_0) \\ &= \tfrac{\lambda^n(1-\lambda^{m-n})}{1-\lambda} d(x_1, x_0) < \tfrac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_1, x_0). \qquad (*) \end{aligned}$$

Kako je $\lambda < 1$ to $\frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(x_1, x_0) \xrightarrow{n} 0$ pa je niz $(x_n)_n$ Cauchyjev.

Završetak dokaza

Kako je (X, d) potpun, niz $(x_n)_n$ konvergira. Neka je $\lim_n x_n = x^*$.
Budući je kontrakcija f neprekidna, vrijedi

$$f(x^*) = f(\lim_n x_n) = \lim_n f(x_n) = \lim_n x_{n+1} = x^*,$$

pa je x^* fiksna točka za f.

Jedinstvenost: Neka su x^* i $\hat{x}$ dvije fiksne točke preslikavanja f. Tada je

$$d(x^*, \hat{x}) = d\big(f(x^*), f(\hat{x})\big) \leqslant \lambda\, d(x^*, \hat{x})$$

što je, zbog $\lambda < 1$, moguće jedino za $x^* = \hat{x}$. □

Posljedica 29.7 (Ocjena greške)

Uz pretpostavke i oznake kao u prethodnom teoremu i dokazu, vrijedi $\quad d(x_n, x^*) \leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\, d\big(f(x_0), x_0\big)$.

Dokaz: Iz $(*)$ slijedi $d(x_m, x_n) < \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\, d\big(f(x_0), x_0\big)$ za sve $m > n$, pa tvrdnju dobivamo za $m \to \infty$. □

Završetak dokaza

Kako je (X, d) potpun, niz $(x_n)_n$ konvergira. Neka je $\lim\limits_n x_n = x^*$.
Budući je kontrakcija f neprekidna, vrijedi

$$f(x^*) = f(\lim_n x_n) = \lim_n f(x_n) = \lim_n x_{n+1} = x^*,$$

pa je x^* fiksna točka za f.

Jedinstvenost: Neka su x^* i $\hat{x}$ dvije fiksne točke preslikavanja f. Tada je

$$d(x^*, \hat{x}) = d\big(f(x^*), f(\hat{x})\big) \leqslant \lambda\, d(x^*, \hat{x})$$

što je, zbog $\lambda < 1$, moguće jedino za $x^* = \hat{x}$. □

Posljedica 29.7 (Ocjena greške)

Uz pretpostavke i oznake kao u prethodnom teoremu i dokazu, vrijedi $\quad d(x_n, x^*) \leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\, d\big(f(x_0), x_0\big)$.

Dokaz: Iz $(*)$ slijedi $d(x_m, x_n) < \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\, d\big(f(x_0), x_0\big)$ za sve $m > n$, pa tvrdnju dobivamo za $m \to \infty$. □

Završetak dokaza

Kako je (X, d) potpun, niz $(x_n)_n$ konvergira. Neka je $\lim_n x_n = x^*$.
Budući je kontrakcija f neprekidna, vrijedi

$$f(x^*) = f(\lim_n x_n) = \lim_n f(x_n) = \lim_n x_{n+1} = x^*,$$

pa je x^* fiksna točka za f.

Jedinstvenost: Neka su x^* i $\hat{x}$ dvije fiksne točke preslikavanja f. Tada je

$$d(x^*, \hat{x}) = d\big(f(x^*), f(\hat{x})\big) \leqslant \lambda\, d(x^*, \hat{x})$$

što je, zbog $\lambda < 1$, moguće jedino za $x^* = \hat{x}$. $\square$

Posljedica 29.7 (Ocjena greške)

Uz pretpostavke i oznake kao u prethodnom teoremu i dokazu, vrijedi $\quad d(x_n, x^*) \leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\, d\big(f(x_0), x_0\big)$.

Dokaz: Iz $(*)$ slijedi $d(x_m, x_n) < \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\, d\big(f(x_0), x_0\big)$ za sve $m > n$, pa tvrdnju dobivamo za $m \to \infty$. $\square$

Završetak dokaza

Kako je (X, d) potpun, niz $(x_n)_n$ konvergira. Neka je $\lim_n x_n = x^*$.
Budući je kontrakcija f neprekidna, vrijedi

$$f(x^*) = f(\lim_n x_n) = \lim_n f(x_n) = \lim_n x_{n+1} = x^*,$$

pa je x^* fiksna točka za f.

Jedinstvenost: Neka su x^* i $\hat{x}$ dvije fiksne točke preslikavanja f. Tada je

$$d(x^*, \hat{x}) = d\big(f(x^*), f(\hat{x})\big) \leqslant \lambda\, d(x^*, \hat{x})$$

što je, zbog $\lambda < 1$, moguće jedino za $x^* = \hat{x}$. □

Posljedica 29.7 (Ocjena greške)

Uz pretpostavke i oznake kao u prethodnom teoremu i dokazu, vrijedi $\quad d(x_n, x^*) \leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\, d\big(f(x_0), x_0\big).$

Dokaz: Iz $(*)$ slijedi $d(x_m, x_n) < \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\, d\big(f(x_0), x_0\big)$ za sve $m > n$,
pa tvrdnju dobivamo za $m \to \infty$. □

Završetak dokaza

Kako je (X, d) potpun, niz $(x_n)_n$ konvergira. Neka je $\lim_n x_n = x^*$. Budući je kontrakcija f neprekidna, vrijedi

$$f(x^*) = f(\lim_n x_n) = \lim_n f(x_n) = \lim_n x_{n+1} = x^*,$$

pa je x^* fiksna točka za f.

Jedinstvenost: Neka su x^* i $\hat{x}$ dvije fiksne točke preslikavanja f. Tada je

$$d(x^*, \hat{x}) = d\big(f(x^*), f(\hat{x})\big) \leqslant \lambda\, d(x^*, \hat{x})$$

što je, zbog $\lambda < 1$, moguće jedino za $x^* = \hat{x}$. □

Posljedica 29.7 (Ocjena greške)

Uz pretpostavke i oznake kao u prethodnom teoremu i dokazu, vrijedi $\quad d(x_n, x^*) \leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\, d\big(f(x_0), x_0\big)$.

Dokaz: Iz $(*)$ slijedi $d(x_m, x_n) < \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\, d\big(f(x_0), x_0\big)$ za sve $m > n$, pa tvrdnju dobivamo za $m \to \infty$. □

Komentari

Napomena 29.8

- Banachov teorem jedan je od rijetkih teorema u analizi gdje dokaz egzistencije daje i koristan praktičan rezultat: u ovom slučaju postupak za nalaženje fiksne točke i ocjenu greške.
- Činjenica da je f kontrakcija, bitno ovisi o odabranoj metrici na X, pa je često, u primjeni teorema u konkretnom problemu, potrebna dovitljivost pri nalaženju pogodne metrike.

Komentari

Napomena 29.8

- Banachov teorem jedan je od rijetkih teorema u analizi gdje dokaz egzistencije daje i koristan praktičan rezultat: u ovom slučaju postupak za nalaženje fiksne točke i ocjenu greške.
- Činjenica da je f kontrakcija, bitno ovisi o odabranoj metrici na X, pa je često, u primjeni teorema u konkretnom problemu, potrebna dovitljivost pri nalaženju pogodne metrike.

Cantorov teorem

Dokažimo na kraju još jedan koristan teorem:

Teorem 29.9 (Cantorov teorem o presjeku)

Neka je $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots$ silazan niz nepraznih zatvorenih podskupova potpunog metričkog prostora (X, d), takvih da je $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = 0$. Tada je presjek $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ neprazan i sadrži točno jednu točku.

Dokaz: Za svaki n odaberimo točku $x_n \in F_n$. Zbog $\operatorname{diam} F_n \to 0$, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji n_0 t.d. je $\operatorname{diam} F_{n_0} < \varepsilon$. Za sve $m, n \geqslant n_0$ su $x_m, x_n \in F_{n_0}$, pa je $d(x_m, x_n) \leqslant \operatorname{diam} F_{n_0} < \varepsilon$, tj. niz $(x_n)_n$ je Cauchyjev. Kako je (X, d) potpun, niz $(x_n)_n$ konvergira nekoj točki $x^* \in X$. Za svaki $n \geqslant m$ je $x_n \in F_m$, pa je $x^* \in F_m$ jer je F_m zatvoren. Dakle, $x^* \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ pa je $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ neprazan.

Cantorov teorem

Dokažimo na kraju još jedan koristan teorem:

Teorem 29.9 (Cantorov teorem o presjeku)

Neka je $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots$ silazan niz nepraznih zatvorenih podskupova potpunog metričkog prostora (X, d), takvih da je $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = 0$. Tada je presjek $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ neprazan i sadrži točno jednu točku.

Dokaz: Za svaki n odaberimo točku $x_n \in F_n$. Zbog $\operatorname{diam} F_n \to 0$, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji n_0 t.d. je $\operatorname{diam} F_{n_0} < \varepsilon$. Za sve $m, n \geqslant n_0$ su $x_m, x_n \in F_{n_0}$, pa je $d(x_m, x_n) \leqslant \operatorname{diam} F_{n_0} < \varepsilon$, tj. niz $(x_n)_n$ je Cauchyjev. Kako je (X, d) potpun, niz $(x_n)_n$ konvergira nekoj točki $x^* \in X$. Za svaki $n \geqslant m$ je $x_n \in F_m$, pa je $x^* \in F_m$ jer je F_m zatvoren. Dakle, $x^* \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ pa je $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ neprazan. Da u presjeku ne može biti

Cantorov teorem

Dokažimo na kraju još jedan koristan teorem:

Teorem 29.9 (Cantorov teorem o presjeku)

Neka je $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots$ silazan niz nepraznih zatvorenih podskupova potpunog metričkog prostora (X, d), takvih da je $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = 0$. Tada je presjek $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ neprazan i sadrži točno jednu točku.

Dokaz: Za svaki n odaberimo točku $x_n \in F_n$. Zbog $\operatorname{diam} F_n \to 0$, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji n_0 t.d. je $\operatorname{diam} F_{n_0} < \varepsilon$. Za sve $m, n \geqslant n_0$ su $x_m, x_n \in F_{n_0}$, pa je $d(x_m, x_n) \leqslant \operatorname{diam} F_{n_0} < \varepsilon$, tj. niz $(x_n)_n$ je Cauchyjev.
Kako je (X, d) potpun, niz $(x_n)_n$ konvergira nekoj točki $x^* \in X$.
Za svaki $n \geqslant m$ je $x_n \in F_m$, pa je $x^* \in F_m$ jer je F_m zatvoren.
Dakle, $x^* \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ pa je $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ neprazan. Da u presjeku ne može biti

Cantorov teorem

Dokažimo na kraju još jedan koristan teorem:

Teorem 29.9 (Cantorov teorem o presjeku)

Neka je $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots$ silazan niz nepraznih zatvorenih podskupova potpunog metričkog prostora (X, d), takvih da je $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = 0$. Tada je presjek $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ neprazan i sadrži točno jednu točku.

Dokaz: Za svaki n odaberimo točku $x_n \in F_n$. Zbog $\operatorname{diam} F_n \to 0$, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji n_0 t.d. je $\operatorname{diam} F_{n_0} < \varepsilon$. Za sve $m, n \geqslant n_0$ su $x_m, x_n \in F_{n_0}$, pa je $d(x_m, x_n) \leqslant \operatorname{diam} F_{n_0} < \varepsilon$, tj. niz $(x_n)_n$ je Cauchyjev. Kako je (X, d) potpun, niz $(x_n)_n$ konvergira nekoj točki $x^* \in X$.

Za svaki $n \geqslant m$ je $x_n \in F_m$, pa je $x^* \in F_m$ jer je F_m zatvoren.

Dakle, $x^* \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ pa je $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ neprazan. Da u presjeku ne može biti

Cantorov teorem

Dokažimo na kraju još jedan koristan teorem:

Teorem 29.9 (Cantorov teorem o presjeku)

Neka je $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots$ silazan niz nepraznih zatvorenih podskupova potpunog metričkog prostora (X, d), takvih da je $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = 0$. Tada je presjek $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ neprazan i sadrži točno jednu točku.

Dokaz: Za svaki n odaberimo točku $x_n \in F_n$. Zbog $\operatorname{diam} F_n \to 0$, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji n_0 t.d. je $\operatorname{diam} F_{n_0} < \varepsilon$. Za sve $m, n \geqslant n_0$ su $x_m, x_n \in F_{n_0}$, pa je $d(x_m, x_n) \leqslant \operatorname{diam} F_{n_0} < \varepsilon$, tj. niz $(x_n)_n$ je Cauchyjev. Kako je (X, d) potpun, niz $(x_n)_n$ konvergira nekoj točki $x^* \in X$. Za svaki $n \geqslant m$ je $x_n \in F_m$, pa je $x^* \in F_m$ jer je F_m zatvoren.

Dakle, $x^* \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ pa je $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ neprazan.

Cantorov teorem

Dokažimo na kraju još jedan koristan teorem:

Teorem 29.9 (Cantorov teorem o presjeku)

Neka je $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots$ silazan niz nepraznih zatvorenih podskupova potpunog metričkog prostora (X, d), takvih da je $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = 0$. Tada je presjek $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ neprazan i sadrži točno jednu točku.

Dokaz: Za svaki n odaberimo točku $x_n \in F_n$. Zbog $\operatorname{diam} F_n \to 0$, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji n_0 t.d. je $\operatorname{diam} F_{n_0} < \varepsilon$. Za sve $m, n \geqslant n_0$ su $x_m, x_n \in F_{n_0}$, pa je $d(x_m, x_n) \leqslant \operatorname{diam} F_{n_0} < \varepsilon$, tj. niz $(x_n)_n$ je Cauchyjev. Kako je (X, d) potpun, niz $(x_n)_n$ konvergira nekoj točki $x^* \in X$. Za svaki $n \geqslant m$ je $x_n \in F_m$, pa je $x^* \in F_m$ jer je F_m zatvoren. Dakle, $x^* \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ pa je $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ neprazan. Da u presjeku ne može biti više od jedne točke, slijedi iz činjenice da $\operatorname{diam} F_n \to 0$

Cantorov teorem

Dokažimo na kraju još jedan koristan teorem:

Teorem 29.9 (Cantorov teorem o presjeku)

Neka je $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots$ silazan niz nepraznih zatvorenih podskupova potpunog metričkog prostora (X, d), takvih da je $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = 0$. Tada je presjek $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ neprazan i sadrži točno jednu točku.

Dokaz: Za svaki n odaberimo točku $x_n \in F_n$. Zbog $\operatorname{diam} F_n \to 0$, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji n_0 t.d. je $\operatorname{diam} F_{n_0} < \varepsilon$. Za sve $m, n \geqslant n_0$ su $x_m, x_n \in F_{n_0}$, pa je $d(x_m, x_n) \leqslant \operatorname{diam} F_{n_0} < \varepsilon$, tj. niz $(x_n)_n$ je Cauchyjev. Kako je (X, d) potpun, niz $(x_n)_n$ konvergira nekoj točki $x^* \in X$. Za svaki $n \geqslant m$ je $x_n \in F_m$, pa je $x^* \in F_m$ jer je F_m zatvoren. Dakle, $x^* \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ pa je $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ neprazan. Da u presjeku ne može biti više od jedne točke, slijedi iz činjenice da $\operatorname{diam} F_n \to 0$ za $n \to \infty$. $\square$